

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-PASCAL ANSEL

CHRISTOPHE STRICKER

## Décomposition de Kunita-Watanabe

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 27 (1993), p. 30-32

<[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1993\\_\\_27\\_\\_30\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__30_0)>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# DÉCOMPOSITION DE KUNITA-WATANABE

par J.P. Ansel et C. Stricker

## 1. Introduction :

On se propose de faire ici un bilan des connaissances sur la décomposition de Kunita-Watanabe, apparue dans l'étude des sous-espaces de  $\mathcal{M}^2$  (voir Kunita-Watanabe [4]), et utilisée récemment dans une question de Mathématiques financières sur la couverture des actifs contingents (voir [1] et [3]).

L'objet de cette décomposition est l'écriture d'une martingale locale  $N$  comme la somme de deux martingales locales, l'une appartenant au sous-espace stable engendré par une martingale locale  $M$   $d$ -dimensionnelle, et l'autre étant orthogonale au sens du crochet droit à chaque composante de  $M$ .

Après des rappels sur l'intégrale stochastique vectorielle, nous explicitons quatre situations où l'on peut confirmer ou infirmer l'existence de cette décomposition.

## 2. Intégrales stochastiques par rapport à une martingale locale vectorielle :

Nous donnons ici la construction de Jacod [2] sur l'intégrale stochastique vectorielle. Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  un espace probabilisé filtré vérifiant les conditions habituelles. Les vecteurs  $x$  de  $\mathbf{R}^d$  seront identifiés à des matrices  $d \times 1$ ,  $x^*$  désignera la transposée de  $x$  et  $\|x\|^2 := x^*x$ . L'intégrale stochastique vectorielle (voir Jacod [2] pour une définition précise) du processus prévisible  $H$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  est notée  $(H^* \cdot X)_t$ . Nous conviendrons que  $(H^* \cdot X)_0 = 0$ . Pour  $q \geq 1$ ,  $\mathcal{H}^q$  désigne l'espace vectoriel des martingales  $M$  telles que  $E[\sup_t \|M_t\|^q] < +\infty$ . Il est bien connu que  $\mathcal{H}^q$  est un espace de Banach si on le munit de

la norme  $\|M\|_{\mathcal{H}^q} := \left( E[\sup_t \|M_t\|^q] \right)^{1/q}$ .

On dit que  $\mathcal{H}$  est un sous-espace stable de  $\mathcal{H}^q$  si c'est un sous-espace vectoriel fermé tel que  $1_A M^T \in \mathcal{H}$  pour tout  $M \in \mathcal{H}$ ,  $A \in \mathcal{F}_0$  et  $T$  temps d'arrêt. Pour que  $\mathcal{H}$  soit stable il faut et il suffit qu'il soit fermé et stable par intégration stochastique.

Soit  $M = (M^i)_{1 \leq i \leq d}$  une martingale locale à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  et telle que pour tout  $i$ ,  $M^i \in \mathcal{H}_{loc}^q$ . On sait qu'il existe un processus à variation intégrable  $A$  et une matrice optionnelle  $a$  telle que  $[M, M^*] = a \cdot A$ . On définit les ensembles suivants :

$$L^q(M^i) = \{H^i \text{ prévisible ; } E[\int_0^\infty (H^i)^2 \cdot [M^i, M^i]_\infty^{q/2}] < +\infty\}.$$

$$L^{q,0}(M) = \{H \text{ prévisible à valeurs dans } \mathbf{R}^d ; H^i \in L^q(M^i), 1 \leq i \leq d\}.$$

$$L^{q,0}(M) = \{H^* \cdot M := \sum_{i=1}^d H^i \cdot M^i ; H \in L^{q,0}(M)\}.$$

$L^q(M) = \{H \text{ prévisible à valeurs dans } \mathbf{R}^d ; \|H\|_{L^q(M)} := E[\|(H^*aH).A\|^{q/2}] < +\infty\}$ .

$L^q(M)$  est la complétion de  $L^{q,0}(M)$  pour la semi-norme  $\|\cdot\|_{L^q(M)}$ , et pour  $H \in L^q(M)$  on peut définir l'intégrale stochastique  $H^*.M$ . Si  $\mathcal{L}^q(M)$  désigne la fermeture dans  $\mathcal{H}^q$  de  $L^{q,0}(M)$  c'est aussi le sous-espace stable engendré par  $M$  et  $\mathcal{L}^q(M) = \{H^*.M ; H \in L^q(M)\}$ .

Nous dirons que la martingale locale  $L$  est orthogonale à la martingale locale  $M = (M^i)_{1 \leq i \leq d}$  si le crochet  $[L, M^i]$  est une martingale locale pour tout  $i ; 1 \leq i \leq d$ .

### 3. Décomposition de Kunita-Watanabe :

Soient  $N$  une martingale locale réelle et  $M$  une martingale locale à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$ . On appelle décomposition de Kunita-Watanabe de  $N$  sur  $M$  une décomposition de la forme  $N_t = N_0 + H^*.M_t + L_t$  où  $H \in L_{loc}(M)$  et  $L$  est une martingale locale orthogonale à  $M$ . Cette décomposition est évidemment unique.

Voici maintenant les quatre situations évoquées dans l'introduction. On suppose  $N_0 = 0$ .

#### D.K.W. cas 1 :

D'après Jacod [2] on a le résultat suivant :

Lorsque  $M$  et  $N$  sont localement de carré intégrable, alors la décomposition existe.

#### D.K.W. cas 2 :

Lorsque  $N$  est de carré intégrable mais  $M$  est quelconque, il existe un contre-exemple (décrit dans Jacod [2]). Supposons que  $\mathcal{F}_0$  est la tribu dégénérée et considérons la filtration  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_0$  pour  $t < \frac{1}{2}$  et  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$  pour  $t \geq \frac{1}{2}$ . On remarque que si  $H$  est un processus prévisible, alors  $H$  est égal à une constante  $h$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , et si  $T$  est un t.a. alors  $P\{T < \frac{1}{2}\} = 0$  ou 1. Ainsi toute martingale locale est une martingale et elle s'écrit  $M_t = E[M_1] 1_{[0, 1/2]} + M_1 1_{[1/2, 1]}$ .

Soient maintenant  $U$  et  $V$  deux v.a. centrées avec  $E[V^2] < +\infty, E[U^2] = +\infty$  et  $E[UV] \neq 0$ . Posons  $M = U 1_{[1/2, 1]}$  et  $N = V 1_{[1/2, 1]}$ .  $M$  et  $N$  ne sont pas orthogonales car  $E[UV] \neq 0$ , donc s'il existe une décomposition de Kunita-Watanabe  $N = H.M + L$  alors  $H \neq 0$  et  $H.M = hU 1_{[1/2, 1]}, L = Z 1_{[1/2, 1]}$  avec  $E[UZ] = 0$ . Ainsi  $V = hU + Z$  et  $E[V^2] = h^2 E[U^2] + E[Z^2]$  ce qui est impossible si  $h \neq 0$ .

#### D.K.W. cas 3 :

Lorsque  $N$  est quelconque mais que  $M$  est continue, alors la décomposition existe. En effet on peut écrire  $N$  sous la forme  $N = N^c + N^d$  où  $N^c$  est la partie continue de  $N, N^d$  la partie purement discontinue.  $N^d$  est orthogonale à toute martingale locale continue et  $N^c$  est localement borné donc localement de carré intégrable, on lui applique la DKW cas 1.  $N^c = H^*.M + U$  avec  $U$  orthogonale à  $M$  et  $H \in L_{loc}(M)$ . Il suffit de poser  $L = U + N^d$  et  $N = H^*.M + L$  convient.

#### D.K.W. cas 4 :

Malheureusement on ne peut pas généraliser le résultat précédent lorsque  $M$  n'est pas continue mais simplement localement borné comme le montre l'exemple suivant :

Soient  $B$  un mouvement brownien et  $P$  un processus de Poisson compensé. Posons  $M = B + P$  et soit  $f \in L^1([0, 1]) \setminus L^2([0, 1])$  alors  $N = f \cdot P$  (intégrale au sens de Stieltjes) est une martingale locale : en effet il suffit de montrer que  $N$  est dans  $\mathcal{H}_{loc}^1$  et donc que  $(f^2 \cdot [P, P])^{1/2}$  est localement de carré intégrable. Soit  $(T_n)_n$  la suite des instants de sauts de  $P$ , on suppose que  $\Delta P_{T_n} = 1$ , alors

$$[P, P]_t = \sum_{s \leq t} \Delta N_s^2 = \sum_n 1_{[T_n, +\infty[}(t) \text{ et } f^2 \cdot [P, P]_t = \sum_n f^2(T_n) 1_{[T_n, +\infty[}(t).$$

$$\text{Or } (f^2 \cdot [P, P]_t)^{1/2} \leq \sum_n |f(T_n)| 1_{[T_n, +\infty[}(t) = |f| \cdot [P, P]_t \text{ et } E[(|f| \cdot [P, P]_t)] = \int_0^t |f_s| ds.$$

Ainsi  $N$  est une martingale locale et si on peut écrire  $N = H \cdot M + L$  avec  $\langle L, M \rangle = 0$  alors  $H = \frac{d\langle N, M \rangle}{d\langle M, M \rangle} = \frac{f}{2}$  et  $L = \frac{f}{2} \cdot (P - B)$  mais  $f$  n'est pas intégrable relativement à  $B$ . Il n'y a donc pas de décomposition de Kunita-Watanabe.

**Remarque :** Dans les questions de Mathématiques financières, la martingale locale que l'on cherche à décomposer est souvent positive. L'exemple ci-dessus reste valable en prenant  $f$  positive et  $N = \int_0^1 f(s) ds + f \cdot P$ .

### Bibliographie

- [1] J.P. Ansel, C. Stricker :  
Couverture des actifs contingents (1992). A paraître.
- [2] J. Jacod :  
Calcul stochastique et problème de martingales. Lect. Notes Math., n° 714. Springer 1979.
- [3] N. El Karoui, M.C. Quenez :  
Dynamic Programming and Pricing of Contingent claims in an Incomplete Market. A paraître.
- [4] H. Kunita, S. Watanabe :  
On square integrable martingales. Nagoya Math. J., 30, 1967, p. 209-245.

Laboratoire de Mathématiques  
URA CNRS 741  
16, Route de Gray  
F - 25030 Besançon Cedex