

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

**Représentation d'un semigroupe d'opérateurs
sur un espace L^1 par des noyaux. Remarques sur
deux articles de S.E. Kuznetsov**

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 304-311

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__304_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**REPRESENTATION D'UN SEMI-GROUPE D'OPERATEURS SUR
UN ESPACE L^1 PAR DES NOYAUX.
REMARQUES SUR DEUX ARTICLES DE S.E. KUZNETSOV**

par Gabriel MOKOBODZKI

Dans un article récent [4], S.E. KUZNETSOV établit l'existence d'un semi-groupe dual d'un semi-groupe mesurable, la dualité étant considérée par rapport à une mesure excessive au sens faible de la théorie du potentiel. Nous montrons dans ce travail qu'on peut notablement affaiblir les hypothèses en utilisant des méthodes classiques de compactification à la RAY-KNIGHT, un peu de théorie ergodique, un argument essentiel de restriction de l'espace d'états dû à KUZNETSOV lui-même, sans pour autant faire appel aux méthodes s'appuyant sur le retournement du temps ou à des procédés analogues. On établira pour cela le théorème suivant :

THEOREME. Soient (E, \mathcal{B}) un espace lusinien muni de sa tribu borélienne, $m \geq 0$ une mesure sur (E, \mathcal{B}) , $(P_t)_{t>0}$ un semi-groupe à contraction sur $L^1(X, \mathcal{B}, m)$ vérifiant les conditions suivantes :

- 1) $P_t 1 \leq 1 \quad \forall t; P_t f \geq 0$ si $f \geq 0$
- 2) m est excessive : $\forall f \in L^1_+(m), \int f dm = \sup_t \int P_t f dm$
- 3) le semi-groupe est fortement continu sur $R^+ \setminus \{0\}$. i.e. $\forall f \in L^1(m)$, l'application $t \rightarrow P_t f$ est continue en norme.

Sous ces hypothèses, il existe un semi-groupe $(Q_t)_{t>0}$ de vrais noyaux sur (E, \mathcal{B}) , sous markoviens, tels que pour toute $f \in L^1(m)$, $Q_t f$ soit un représentant de $P_t f$.

Première étape : Construction d'une famille résolvente de noyaux.

On définit S_λ opérateur borné sur $L^1(X, \mathcal{B}, m)$, $\lambda > 0$ par $S_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f dt$; la famille résolvente $(S_\lambda)_{\lambda > 0}$ ainsi obtenue est sous-markovienne.

Nous décrivons rapidement la méthode qui est celle employée pour construire des résolvantes duales cf. [2].

On choisit d'abord un espace H_0 de fonctions boréliennes bornées sur E , séparant les points de E , réticulé et contenant les fonctions constantes et qui vérifie les conditions suivantes :

1) H_0 est séparable pour la norme uniforme. La tribu borélienne engendrée par H_0 est d'après le théorème de BLACKWELL identique à \mathcal{B} .

2) Si g désigne l'injection canonique de H_0 dans $L^1(E, \mathcal{B}, m)$, alors $g(H_0)$ est stable par l'action de $(S_\lambda)_{\lambda > 0}$.

On construit alors une famille résolvente sous-markovienne $(W_\lambda)_{\lambda > 0}$ de vrais noyaux sur (E, \mathcal{B}, m) et un ensemble $A \subset X$, de complémentaire m -négligeable telle que

a) pour tout $f \in H_0$, $W_\lambda f$ est un représentant de $S_\lambda f$.

b) $1_A W_\lambda 1_A = W_\lambda$ et W_λ opère sur $1_A \cdot H_0$.

On désigne maintenant par Y un compactifié de A par rapport à la famille de fonctions $\{1_A f\}_{f \in H_0}$. L'espace Y est compact métrisable et A s'envoie injectivement sur un borélien \tilde{A} de Y .

Par construction, on obtient une famille résolvente $(\tilde{W}_\lambda)_{\lambda > 0}$ de noyaux felleriens sur Y , telle que pour tout $y \in \tilde{A}$, $\varepsilon_y \tilde{W}_\lambda = \varepsilon_y W_\lambda$. Evidemment, $\tilde{W}_\lambda(\mathcal{C}(Y))$ n'a aucune raison de séparer les points de Y . Soit alors G l'espace vectoriel réticulé fermé contenant les constantes, engendré par $\tilde{W}_\lambda(\mathcal{C}(Y))$. L'espace G s'identifie à un espace $\mathcal{C}(Z)$ où Z est un compact métrisable quotient de Y . Si φ désigne l'application canonique de Y sur Z , on transporte (W_λ) sur $\mathcal{C}(Z)$ en une famille résolvente (U_λ) sur Z par $U_\lambda h = f$ où $f \circ \varphi = W_\lambda(h \circ \varphi)$ de sorte que $(U_\lambda h) \circ \varphi = W_\lambda(h \circ \varphi)$.

On a cette fois une résolvente de Ray sur Z . Désignons par Z_0 l'ensemble des points de non-branchement et soit $\mu = \varphi(m)$. La théorie générale de Hille-Yosida permet de construire un semi-groupe $(P'_t)_{t > 0}$ sur l'espace $Im U_\lambda$, qu'on étend canoniquement en un semi-groupe de noyaux portés par Z_0 par la formule $P'_t f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P'_t \lambda U_\lambda f$, pour f parcourant $\mathcal{C}(Z)$.

Enfin, la mesure m étant excessive pour (W_λ) , $\mu = \varphi(m)$ est aussi excessive pour (U_λ) .

On va décrire maintenant une méthode permettant de relever (P_t) en un semi-groupe de noyaux sur Y .

LEMME 1. *Il existe un ensemble borélien $B \subset Z$, tel que $\mu(Z \setminus B) = 0$ et tel que pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, tout $y \in D = \varphi^{-1}(B)$, la limite $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda W_\lambda f(y) = \hat{f}(y)$ existe.*

Démonstration. Fixons un $\lambda_0 > 0$. Pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, $0 \leq f \leq 1$ la fonction $W_{\lambda_0}(f)$ est de la forme $u \circ \varphi$ où $u \in \mathcal{C}(Z)$. De plus u est une fonction λ_0 -excessive dominée par l'ordre fort des fonctions λ_0 -excessives par $U_{\lambda_0}1$. D'après un théorème de dérivation des résolvantes établi par l'auteur cf. [8], [2], $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(I - \lambda U_{\lambda_0 + \lambda})u = g$ existe en dehors d'un ensemble M_u , avec $U_{\lambda_0}(1_{M_u}) = 0$ et $g \circ \varphi = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W_\lambda f$ sur $\varphi^{-1}(M_u)^c$. Soit (f_n) une suite dense dans $\mathcal{C}(Y)$, (u_n) la suite correspondante de fonctions λ_0 -excessives sur Z définie par $u_n \circ \varphi = W_{\lambda_0} f_n$. Posons $B_n = \{ \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(I - \lambda U_{\lambda + \lambda_0})u_n = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda(I - \lambda U_{\lambda + \lambda_0})u_n \}$. L'ensemble $B = \bigcap_n B_n$ est borélien dans Z (on peut d'ailleurs montrer que $B \subset Z_0$) et répond aux conditions cherchées.

On va utiliser maintenant à deux reprises une technique inventée par KUZNETSOV et exposée dans [4], p. 482.

Disons qu'un semi-groupe de noyaux $(R_t)_{t>0}$ est mesurable sur un espace (X, \mathcal{F}) , si pour tout f mesurable bornée sur X , l'application $(x, t) \rightarrow R_t f(x)$ est mesurable sur $X \times \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Pour deux tels semi-groupes $(R_t)_{t>0}, (R'_t)_{t>0}$ on dira qu'ils sont équivalents par rapport à une mesure excessive m , si pour toute f mesurable bornée sur X et tout $t > 0$

$$R_t f = R'_t f \quad m \text{ p.partout.}$$

LEMME 2. *Soient (X, \mathcal{F}) un espace lusinien, $(R_t)_{t>0}$ un semi-groupe mesurable de noyaux ≥ 0 bornés, m une mesure excessive pour $(R_t)_{t>0}$. Pour tout ensemble $F \in \mathcal{F}$, portant la mesure m , il existe un semi-groupe mesurable $(R'_t)_{t>0}$ équivalent à $(R_t)_{t>0}$ et tel que*

$$1_F R'_t 1_F = R'_t \quad \forall t.$$

On renvoie à [4] pour la démonstration.

On revient aux notations du lemme 1. On applique une première fois le lemme de KUZNETSOV sur Z , au semi-groupe $(P'_t)_{t>0}$ et à l'ensemble B vérifiant les conditions du lemme 1.

LEMME 3. *Il existe un semi-groupe mesurable $(P''_t)_{t>0}$ μ -équivalent à (P'_t) et tel que*

$$1_B P''_t 1_B = P''_t \text{ pour tout } t > 0.$$

RELEVEMENT DE (P_t'') SUR Y .

On a vu que pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, tout, $y \in D = \varphi^{-1}(B)$, la limite $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda W_{\lambda} f(y) = \hat{f}(y)$ existe. Pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, il existe donc une unique fonction borélienne, sur Z , qu'on notera Qf , définie par $Qf\alpha\varphi = 1_D \hat{f}$. On vérifie facilement que pour $h \in \mathcal{C}(Z)$ $Q(h\alpha\varphi) = 1_D . h\alpha\varphi$, de sorte que $\tilde{Q} = f \mapsto Q(f)\alpha\varphi$ est un noyau ≥ 0 sur Y qui est aussi un projecteur i.e. $\tilde{Q}^2 = \tilde{Q}$. Par construction $P_t'' = 1_B . P_t'' . 1_B$. On définit R_t sur Y par la formule $R_t f = [P_t''(Qf)]\alpha\varphi$.

On a

$$\begin{aligned} R_t \circ R_s f &= P_t''(Q(R_s f)\alpha\varphi) \\ &= P_t''(Q.[P_s''(Qf)\alpha\varphi])\alpha\varphi \\ &= (P_t'' P_s'' Qf)\alpha\varphi = P_{t+s}''(Qf)\alpha\varphi = R_{t+s} f. \end{aligned}$$

LEMME 4. Pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, tout $t > 0$ $R_t f$ représente $P_t f$ dans $L^1(E, \mathcal{B}, m)$.

Démonstration. Le semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ étant fortement continu, $P_t f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P_t(\lambda S_{\lambda} f)$ dans $L^1(m)$. Il en résulte que $P_t'(Qf)\alpha\varphi$ représente $P_t f$ et donc aussi $R_t f$. \square

On rappelle que, dans la construction de Y , on avait utilisé un ensemble $A \subset E$, portant m , envoyé injectivement sur un borélien \tilde{A} de Y par le plongement de A dans son compactifié.

On applique une $2^{\text{ème}}$ fois le lemme de KUZNETSOV au système $((R_t), \tilde{A})$.

THEOREME 5. Il existe un semi-groupe $(Q_t)_{t>0}$ mesurable de noyaux sous-markoviens sur Y , tels que $1_{\tilde{A}} Q_t 1_{\tilde{A}} = Q_t$, m -équivalent à R_t , et qui représente $(P_t)_{t>0}$.

Nous revenons maintenant à la construction d'un semi-groupe dual. Soit (E, \mathcal{B}) un espace lusien, $m \geq 0$ une mesure bornée sur (E, \mathcal{B}) et soit $(P_t)_{t \geq 0}$ un semi-groupe mesurable sous-markovien de vrais noyaux sur (E, \mathcal{B}) pour lequel m est excessive. Le semi-groupe $(P_t)_{t>0}$ se prolonge alors en un semi-groupe faiblement mesurable de contractions de $L^2(E, \mathcal{B}, m)$. En effet, pour tout $h \in L^{\infty}(m)$, tout $f \in L^1(E, \mathcal{B}, m)$ l'application $t \mapsto \int h . P_t f dm$ est borélienne sur $\mathbb{R}^+ - \{0\}$.

Comme on a supposé (E, \mathcal{B}) lusien, $L^2(E, \mathcal{B}, m)$ est séparable, et les structures boréliennes induites sur $L^1(E, \mathcal{B}, m)$ par les topologies fortes et faibles sont identiques. Le semi-groupe (P_t) est donc fortement mesurable dans $L^2(m)$ et en raison d'un théorème de PHILLIPS cf. [9], il est automatiquement continu.

Soit $(P_t^*)_{t>0}$ le semi-groupe dual de (P_t) dans $L^2(m)$. Le semi-groupe $(P_t^*)_{t>0}$ est faiblement continu, donc fortement continu dans $L^2(m)$, et se prolonge en un semi-groupe

fortement continu dans $L^1(m)$. On applique maintenant le théorème de représentation (th. n° 5) au semi-groupe $(P_t^*)_{t>0}$. Il existe donc un semi-groupe mesurable $(\hat{P}_t)_{t>0}$ de noyaux sur (E, \mathcal{B}) , qui sont positifs et sous-markoviens, et tels que pour tout $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, m)$

$$\hat{P}_t f \text{ représente } P_t^* f \in L^1(E, \mathcal{B}, m)$$

Par suite, pour h, f , boréliennes bornées sur (E, \mathcal{B}) , on a

$$\int h P_t f \, dm = \int \hat{P}_t h \, dm.$$

Remarque 1. Le théorème de représentation a été démontré sous l'hypothèse que (P_t) est sous-markovien. Quitte à remplacer (P_t) par $(e^{-\lambda t} P_t)$, on peut se ramener au cas où il existe une fonction u strictement positive telle que $P_t u \leq u \quad \forall t > 0$, et $\int u \, dm < +\infty$. On se ramène au cas traité en prenant $m' = u \cdot m, Q_t = \frac{1}{u} P_t \cdot u$.

SUR LES SEMI-GROUPES SEPARANT (E, \mathcal{B}) .

Dans sa construction du dual d'un semi-groupe mesurable $(P_t)_{t>0}$, défini sur un espace lusinien (E, \mathcal{B}) , Kuznetsov est amené à faire l'hypothèse de séparation suivante sur (P_t) :

(S) Pour $x, y \in E, x \neq y$, il existe $t > 0$ tel que $\varepsilon_x P_t \neq \varepsilon_y P_t$.

Cette hypothèse lui permet, par un changement de structure convenable et donc de topologie sur E , de se ramener à un semi-groupe "stochastically continuous". Nous allons voir que cela peut être obtenu simplement par une compactification de Ray, sans passer par des processus de Markov. Quitte à remplacer (P_t) par $(e^{-\lambda t} P_t)$, nous supposons que $V_0 = \int_0^\infty P_t \, dt$ est un noyau borné.

LEMME 6. (KUZNETSOV). Si (P_t) sépare les points de E , alors l'image de V_0 sépare les points de E .

Démonstration. Comme E est lusinien, il existe une suite (f_n) de fonctions boréliennes bornées, dense dans $L^1(\mu)$ pour toute mesure $\mu \geq 0$ sur (E, \mathcal{B}) . Supposons que $V_\lambda f_n(x) = V_\lambda f_n(y)$ pour tout $\lambda > 0$ et toute f_n . Il en résulte facilement que pour tous $s > t > 0$

$$\int_t^s P_u f_n(x) \, du = \int_t^s P_u f_n(y) \, du.$$

On en déduit l'existence d'un ensemble borélien A , négligeable pour la mesure de Lebesgue, tel que pour $t \in A^c, P_t f_n(x) = P_t f_n(y)$ pour tout n , et donc $\varepsilon_x P_t = \varepsilon_y P_t$ pour tout $t \in A^c$.

Pour tout $s > 0, \varepsilon_x P_{t+s} = \varepsilon_y P_{t+s}$ et finalement $\varepsilon_x P_t = \varepsilon_y P_t$ pour tout $t > 0$, ce qui implique $x = y$.

On suppose maintenant que $H = (f_n)$ est un espace vectoriel réticulé séparable, contenant les constantes, stable par l'action des opérateurs $V_p = \int_0^\infty e^{-pt} P_t, p \in \mathbb{N}$. On désigne par \mathcal{S} le cône des fonctions excessives bornées par rapport à (P_t) (ou ce qui revient au même par rapport à (V_λ)) et l'on désigne par $\overline{\mathcal{S}}$ le saturé inf-stable de \mathcal{S} . Pour $v \in \overline{\mathcal{S}}$, on désigne par $\hat{v} = \sup_t P_t v = \sup_p p V_p v$ sa régularisée excessive. On sait que pour $u \in \overline{\mathcal{S}}, u = \hat{u}, m.$ presque partout. D'après le théorème de PHILLIPS, $(P_t)_{t>0}$ est continu dans $L^1(m)$ et pour $u \in \overline{\mathcal{S}}, \int P_t u dm = \sup_{s>t} \int P_s u dm$. On a donc aussi $P_t v = P_t \hat{v} = \sup_{s>t} P_s \hat{v}, m$ p.partout.

Nous entreprenons la compactification.

On reprend l'espace vectoriel $H = (f_n)$ et on pose $H_1 = V_0(H)$; on compactifie E en \hat{E} , en rendant continues toutes les fonctions de H_1 . L'hypothèse de séparation implique que l'application canonique $i : E \rightarrow \hat{E}$ est une injection mesurable de E sur un borélien E' de \hat{E} . Il existe donc une famille résolvente de Ray $(\tilde{V}_\lambda)_{\lambda>0}$ sur \hat{E} , telle que (en identifiant E et E') $1_E \tilde{V}_\lambda 1_E = V_\lambda$. Soit \hat{E}_0 l'ensemble des points de non branchement de \hat{E} par rapport à \tilde{V}_λ . On désigne par $(R_t)_{t>0}$ le semi-groupe de noyaux canoniquement construit sur \hat{E}_0 , associé à (\tilde{V}_λ) cf. [2]) par le procédé de HILLE-YOSIDA, adapté aux résolventes de RAY.

Le semi-groupe (R_t) a les 3 propriétés suivantes :

- a) pour tout $f \in \mathcal{C}(\hat{E}), R_t f = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} R_t(\lambda V_\lambda f)$
- b) $\tilde{V}_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R_t dt$
- c) pour toute excessive u pour la résolvente $(\tilde{V}_\lambda), u = \sup_t R_t u$.

THEOREME 7. Pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$. Pour tout $t > 0$, on a $P_t 1_E f = 1_E R_t f, m.$ presque partout.

Démonstration. Soit $C = V_0(\mathcal{C}_+(\hat{E})) + \mathbb{R}^+$ et soit \overline{C} le saturé inf-stable de C . Pour $u \in \overline{C}$, on a

$$\hat{u} = \sup_\lambda \lambda \tilde{V}_\lambda u = \sup_{t>0} R_t u$$

Pour $v = 1_E . u$ on a aussi par rapport à la résolvente $(V_\lambda), \hat{v} = \sup_\lambda \lambda V_\lambda v$ mais aussi $\hat{v} = \sup_\lambda \lambda \tilde{V}_\lambda u$ de sorte que $\hat{v} = 1_E . \hat{u}$. Considérons maintenant pour $t < s$,

$$B_{t,s} = \frac{1}{s-t} \int_t^s P_r dr \quad D_{t,s} = \frac{1}{t-s} \int_t^s R_r dr$$

On aura encore $B_{t,s}v = 1_E D_{t,s}u$. On a vu que $P_t v = P_t \hat{v}$, m.p.p., de sorte que $P_t v = \sup_{s \downarrow t} B_{t,s}v$ de même $R_t u = \sup_{s \downarrow t} D_{t,s}u$ et finalement $P_t v = 1_E R_t u$ m.p.p. L'espace vectoriel $F = \overline{C} - \overline{C}$ est dense dans $\mathcal{C}(Y)$, de sorte que finalement, pour $f \in \mathcal{C}(X)$, $P_t 1_E f = 1_E R_t f$, m.p.partout.

Ce résultat s'étend par convergence monotone aux fonctions boréliennes sur \hat{E} .

Sous l'hypothèse de séparation pour $(P_t)_{t>0}$, on peut donc toujours considérer qu'on a affaire à un semi-groupe de Ray $(R_t)_{t>0}$, à condition de ne travailler que sur des propriétés vraies m.p.p.

Remarque. Un autre article de Kuznetsov [3] montre que l'hypothèse (L) est nécessaire et suffisante pour obtenir la représentation intégrale des fonctions excessives. La partie nouvelle de ce résultat concerne la nécessité, car la suffisance est "classique" : elle a été établie par l'auteur dès 1969, et figure par exemple dans [7], [5], [2]. Signalons que dans l'article [7], on munit le cône des fonctions excessives d'une topologie qui permet d'appliquer le théorème de représentation intégrale de Choquet.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CHOQUET G., Représentation intégrale dans les cônes convexes sans base compacte. *C.R. Acad. Sc. Paris*, t. 253, 1961, pp. 1901-1903.
- [2] DELLACHERIE C., MEYER P.A., *Probabilités et potentiel*. Hermann Paris, Ch. XII à XVI (N^{elle} édition).
- [3] KUZNETSOV S.E., *More on existence and uniqueness of decomposition of excessive functions into extremes*. Lect. Notes in Maths n° 1526 Springer.
- [4] KUZNETSOV S.E., *On the existence of a dual semi-group*. Séminaire de probabilités XXVI, Lecture Notes in Maths n° 1526, Springer.
- [5] MEYER P.A., *Représentation intégrale des fonctions excessives, résultats de Mokobodzki*, Séminaire de probabilités V, Lecture notes in Maths. n° 191, Springer.
- [6] MOKOBODZKI G., Représentation intégrale des fonctions surharmoniques au moyen des réduites. *Annales de l'Institut Fourier*, T. XIV. 1965.
- [7] MOKOBODZKI G., Dualité formelle et représentation intégrale des fonctions excessives, in *Actes Congrès Intern. Maths.* 1970, Tome 2, p. 531-535.
- [8] MOKOBODZKI G., *Densité relative de deux potentiels comparables*, Séminaire de probabilités IV, Lecture notes in Maths n° 124, Springer.
- [9] PHILLIPS R.S., On one parameter semi-groupes of linear transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.* 2, 234-237, (1951).

Gabriel MOKOBODZKI
Equipe d'Analyse
U.R.A. 754 - C.N.R.S.
Université Paris VI
Boîte 186
4, place Jussieu
75252 - PARIS CEDEX 05