Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Xavier Fernique

Convergence en loi de variables aléatoires et de fonctions aléatoires, propriétés de compacité des lois, II

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 216-232
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__216_0>

Convergence en loi de variables aléatoires et de fonctions aléatoires, propriétés de compacité des lois, II.

X. Fernique, Strasbourg.

0. Introduction.

Dans un travail précédent [6], j'ai étudié des propriétés de convergence en loi de fonctions aléatoires, continues ou cadlag, à valeurs dans les espaces lusiniens. J'ai montré en particulier que dans de nombreux cas ([6], théorème 3.2.1), ces convergences en loi étaient en fait associées à des topologies lusiniennes ; les résultats présentés utilisaient essentiellement les relations entre compacité relative et propriétés de tension pour les ensembles de mesures positives bornées. Dans le travail présenté ici, nous reprenons le même sujet sous le nouvel aspect suivant : améliorer les techniques pour le maniement des fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens (cf.[5]) pour pouvoir utiliser la convergence étroite de leurs lois même lorsqu'elles ne sont pas tendues.

Soient E un espace complètement régulier et $M_b^+(E)$ l'ensemble de ses mesures positives bornées ; soit A une partie de $M_b^+(E)$, on suppose qu'elle est bornée et tendue aux sens suivants :

(0.1) *Il existe un nombre* M *tel que* $\sup\{\mu(E), \mu\in A\} \leq M$,

(0.2) *Il existe une suite* $(K_n, n\in N)$ *de parties compactes de* E *telles que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\mu(E - K_n), \mu\in A\} = 0 ;$$

on sait alors que A est relativement compact pour la topologie de la convergence étroite. Inversement, on sait aussi que si A est relativement compact pour cette topologie et si A est polonais ([10]) ou si A appartient à certaines classes d'espaces lusiniens ([4]. Th. I.6.5) ou même à certaines classes d'espaces complètement réguliers plus généraux ([7]), alors A est nécessairement borné et tendu ; on sait par contre qu'il existe d'autres classes d'espaces lusiniens réguliers E dans lesquels A peut être relativement compact pour la convergence étroite sans être tendu ([9]) ; c'est par exemple le cas si E est le dual faible d'un espace de Hilbert séparable ([4], Exemple I.6.4).

Les problèmes de fluctuation associés à certaines équations de Boltzmann et donc à l'évolution des grands systèmes de particules introduisent naturellement à l'étude des propriétés de compacité relative de familles de mesures positives bornées sur des espaces de Hilbert séparables E pour la topologie de la convergence étroite des mesures associée à la topologie faible de E ; c'est donc la situation où les propriétés (0.1) et (0.2) fournissent des conditions suffisantes et non nécessaires de compacité relative. On se propose dans ce travail de présenter des conditions nécessaires et suffisantes de compacité relative applicables pour tout espace lusinien régulier E (§1), de caractériser la convergence étroite des suites de mesures positives bornées sur certains espaces lusiniens réguliers (§2), de mettre enfin en évidence des propriétés particulières aux suites tendues de mesures positives bornées sans être nécessairement vérifiées par les suites relativement compactes et non tendues (§3).

L'étude fournira dans un cadre assez général des critères de convergence en loi pour les fonctions aléatoires continues ou cadlag à valeurs dans les espaces lusiniens (théorème 2.3 et corollaire 2.4).

1. Compacité relative.

Dans ce paragraphe, on présente les résultats suivants :

Théorème 1.1 : *Soient* E *un espace lusinien régulier et* A *une partie de* $M_b^+(E)$ *; les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) A *est relativement compact pour la topologie de la convergence étroite,*

(ii) *Pour toute suite décroissante* $\{f_n, n \in N\}$ *de fonctions continues réelles bornées sur* E *convergeant simplement vers zéro, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{ \int f_n d\mu,\ \mu \in A\} = 0.$$

Corollaire 1.2 : *Soient* F *un espace de Fréchet séparable localement convexe et* E = F' *le dual topologique de* F *muni de sa topologie faible ; on note* $\{V_n, n \in N\}$ *une suite fondamentale décroissante de voisinages de l'origine dans* F *et* $\{B_n, n \in N\}$ *la suite croissante des polaires respectifs des* V_n *dans* E *; soit enfin* A *une partie de* $M_b^+(E)$. *Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes :*

(i) A *est relativement compact pour la topologie de la convergence étroite,*

(ii) A *est borné ; de plus pour toute suite croissante* $\{\Omega_n, n \in N\}$ *de voisinages ouverts respectifs des* B_n, *on a :*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\mu(E - \Omega_n),\ \mu \in A\} = 0.$$

Remarque 1.3 : Dans la situation du corollaire 1.2, toute partie compacte de E est contenue dans l'un des B_n ; dans ces conditions, une partie A de $M_b^+(E)$ est tendue et bornée si et seulement si :

(ii') A *est borné ; de plus on a :* $\lim_{n\to\infty} \sup\{\mu(E - B_n), \mu\in A\} = 0.$

Le corollaire 1.2 situe donc bien la différence entre les parties bornées et tendues et les parties relativement compactes.

1.4 Démonstration du théorème 1.1 : (a) l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est vérifiée dans le cadre plus général où E (non nécessairement lusinien) est complètement régulier et où A est un ensemble de mesures de Radon positives bornées sur E ; sous l'hypothèse (i), fixons en effet $\varepsilon > 0$, pour toute mesure $\mu \in \bar{A}$, il existe un entier $n = n(\mu)$ tel que $\int f_n\, d\mu < \varepsilon$; l'ensemble $\{m \in \bar{A} : \int f_{n(\mu)}\, dm < \varepsilon\}$ est alors une partie ouverte $U(\mu)$ de $\bar{A}$ contenant μ ; $\bar{A}$ étant compact, on peut donc former un recouvrement ouvert fini $\{U(\mu_k), 1\leq k\leq \ell\}$; on pose alors $n = \sup\{n(\mu_k), 1\leq k\leq \ell\}$ et on a pour tout élément μ de A, $\int f_n\, d\mu < \varepsilon$ de sorte que (ii) est vérifiée.

(b) Nous prouvons maintenant l'implication inverse en plusieurs étapes en supposant E lusinien régulier.

(b.1) Supposons pour commencer que E soit polonais et que A vérifie (ii) ; nous allons montrer que A est alors borné et tendu, il sera donc relativement compact.

(b.1.1) Pour montrer que A est borné, il suffit pour tout entier n, de noter f_n l'application de E dans **R** constante et égale à $1/n$; la suite $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ tend alors en décroissant vers zéro pour la convergence simple ; puisque A vérifie (ii), il existe un entier n_0 tel que $\sup\{\int f_{n_0}\, d\mu < \varepsilon, \mu \in A\} \leq 1$ et on a alors $\sup\{\mu(E), \mu\in A\} \leq 1/n_0$.

(b.1.2) Pour montrer que A est tendu, nous notons d une distance bornée continue et complète sur E, nous notons aussi $\{x_k, k\in \mathbf{N}\}$ une suite dense dans E . Pour tout entier k, nous définissons une application continue bornée f_k de E dans **R** en posant :

$$f_k(x) = \inf\{d(x_j, x), j \leq k\} ;$$

alors la suite $\{f_k, k\in \mathbf{N}\}$ tend en décroissant vers zéro pour la convergence simple et puisque A vérifie (ii), on peut construire une suite croissante $\{k_n , n\in \mathbf{N}\}$ d'entiers telle que :

$$\forall n\in \mathbf{N}, \forall \mu \in A, \int f_{k_n}\, d\mu \leq 4^{-n} ;$$

on pose alors $A_n = \{f_{k_n} > 2^{-n+1}\}$, $B_n = E - A_n$; on constate que :

$$\forall n\in \mathbf{N}, \forall\mu \in A, \mu(A_n) \leq 2^{n-1} \int f_{k_n}\, d\mu \leq 2^{-n-1} ;$$

dans ces conditions, l'ensemble $K_n = \bigcap_{m\geq n} B_m$ est fermé et totalement borné dans l'espace complet (E, d), il est donc compact et on a :

$$\forall\ \mu\in A, \mu(E - K_n) \leq \sum_{m\geq n} \mu(A_m) \leq 2^{-n},$$

de sorte que A est tendu ; l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est donc vérifiée si E est polonais et en particulier si E est l'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ muni de sa topologie produit.

(b.2) Nous supposons maintenant que E est lusinien métrisable ; on peut donc supposer ([3], Th. III.20) que E est une partie borélienne de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = P$.

(b.2.1) Si A est une partie de $M_b^+(E)$ vérifiant (ii) dans E, c'est *a fortiori* une partie de $M_b^+(P)$ vérifiant (ii) dans P et qui est donc en fonction de la preuve (b.1) relativement compacte dans $M_b^+(P)$; soit m adhérente à A dans $M_b^+(P)$, on va montrer que m appartient à $M_b^+(E)$; soit en effet F une partie fermée de P ne coupant pas E ; il existe donc une application continue f de P dans [0, 1] telle que $f^{-1}(1) = F$; la suite $\{f_n, n \in N\}$ des puissances entières f^n de f est alors une suite décroissante d'applications continues de P dans [0, 1] convergeant simplement vers zéro dans E. Pour tout $\varepsilon > 0$, la propriété (ii) implique donc qu'il existe un entier n tel que :

$$\forall \mu \in A, \int f^n \, d\mu < \varepsilon,$$

on a alors aussi :

$$m(F) \leq \int f^n \, dm \leq \sup\{ \int f^n \, d\mu, \mu \in A\} \leq \varepsilon , \quad m(F) = 0 ;$$

il en résulte :

$$m(P - E) = \sup\{m(F) : F \text{ fermé}, F \subset P - E\} = 0 ;$$

ceci montre que m appartient à $M_b^+(E)$ et donc que A est relativement compact dans $M_b^+(E)$ pour la topologie induite par celle de $M_b^+(P)$.

(b.2.2) Il reste à montrer que A est aussi relativement compact dans $M_b^+(E)$ pour la topologie étroite associée à la topologie de E et il suffit pour cela ([4], I.6.1, cor.3) de montrer que toute suite $\{\mu_n, n \in N\}$ d'éléments de A convergeant dans $M_b^+(P)$ vers un élément m de $M_b^+(E)$ converge aussi vers m dans $M_b^+(E)$; on peut pour cela, suivant la proposition III.2.1 de [11] ou le lemme 2.1 de [2], utiliser la définition alternative des topologies étroites sur $M_b^+(E)$ et sur $M_b^+(P)$ à partir des parties ouvertes et des parties fermées de E et de P ([4], Th.I.6.3 (d)) ; pour toute partie ouverte U de E, il existe en effet une partie ouverte V de P telle que $U = V \cap E$ et on a :

$$m(U) = m(V) \leq \liminf \mu_n(V) = \liminf \mu_n(U) ;$$

soient X une partie fermée de E et Y une partie fermée de P telle que $X = Y \cap E$, on a aussi :

$$m(X) = m(Y) \geq \limsup \mu_n(Y) = \limsup \mu_n(X),$$

le résultat s'ensuit ; on a donc établi dans ce cas aussi l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

(b.3) Nous étudions maintenant la situation générale. Soit A une partie de $M_b^+(E)$ vérifiant (ii) ; fixons une application continue injective $g = \{g_n, n \in \mathbf{N}\}$ de E dans $\mathbf{R}^\mathbf{N}$, l'image g(E) est alors ([4], prop.I.2.1) une partie borélienne de $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ et l'ensemble $\tilde{g}(A)$ des mesures images $\{\tilde{g}(\mu), \mu \in A\}$ des éléments de A par g est une partie de $M_b^+(g(E))$ qui vérifie (ii) dans g(E) ; la preuve (b.2) montre donc que $\tilde{g}(A)$ est relativement compact dans $M_b^+(g(E))$; on notera que, puisque g est injective, l'application : $\mu \to \tilde{g}(\mu)$ est aussi injective ; ceci implique que pour toute suite $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ d'éléments de A, on peut fixer une suite partielle $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}_0\}$ et une mesure unique $m = m(\mathbf{N}_0)$ sur E telles que $\{\tilde{g}(\mu_n), n \in \mathbf{N}_0\}$ converge vers $\tilde{g}(m)$.

Soit maintenant f une application continue bornée de E dans $\mathbf{R}$; alors l'application g' = (f, g) est encore une application continue injective de E dans $\mathbf{R}^\mathbf{N}$ de sorte que $\tilde{g}'(A)$ est encore relativement compact dans $M_b^+(g'(E))$. Soit $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ une suite d'éléments de A et $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}_0(g))\}$ la suite extraite à l'alinéa ci-dessus ; alors $\{\tilde{g}'(\mu_n), n \in \mathbf{N}_0(g))\}$ a le seul point adhérent $\tilde{g}'(m)$, elle converge donc vers $\tilde{g}'(m)$ et on a en particulier puisque f est continue bornée :

$$\lim\{ \int f\, d\mu_n, n \in \mathbf{N}_0(g)\} = \int f\, dm ;$$

ceci montre que la suite $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}_0(g))\}$ converge vers m dans $M_b^+(E)$ de sorte que A est relativement compact dans $M_b^+(E)$; le théorème est donc établi.

1.5 Démonstration du corollaire 1.2 : (a) Supposons la propriété (1.2 (i)) vérifiée ; notons $\{\Omega_n, n \in \mathbf{N}\}$ une suite croissante de voisinages ouverts respectifs des B_n ; alors la suite des $F_n = E - \Omega_n$ est une suite décroissante de fermés tels que :

$$\forall\, n \in \mathbf{N},\ F_n \cap B_n = \emptyset\ ,\ \bigcap_{n \in \mathbf{N}} F_n = \emptyset,\ \bigcup_{n \in \mathbf{N}} B_n = E\ ;$$

pour tout n, il existe alors une application continue g_n de E dans [0, 1] telle que $g_n^{-1}(0) = B_n$ et $g_n^{-1}(1) = F_n$; on pose :

$$\forall n \in \mathbf{N},\ f_n = \inf\{g_k,\ 1 \leq k \leq n\},$$

alors la suite $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ est une suite décroissante d'applications continues de E dans [0, 1] et chaque f_n est nulle sur B_n de sorte que la suite $\{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ converge simplement vers zéro. Puisque (1.2 (i)) est vérifiée, le théorème 1.1 montre donc que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que :

$$\forall\ \mu \in A,\ \mu\,(E - \Omega_n) = \mu(F_n) \leq \int f_n\, d\mu < \varepsilon,$$

de sorte que (1.2 (ii)) est aussi vérifiée.

(b) Supposons maintenant que A vérifie la propriété (1.2 (ii)) ; pour montrer que A vérifie alors (1.2 (i)), il suffit de montrer qu'il vérifie (1.1 (i)). Soit $\{f_k, k \in \mathbf{N}\}$ une suite décroissante de fonctions continues réelles bornées par 1 sur E convergeant simplement vers zéro. Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $M = \sup\{\mu(E), \mu \in A\} < \infty$; puisque chaque B_n est compact dans E, la suite $(f_k, k \in \mathbf{N})$ converge uniformément vers zéro sur chaque B_n et on peut donc construire une suite croissante d'entiers $\{k_n, n \in \mathbf{N}\}$ telle que :

$$\forall\ n \in \mathbf{N},\ \forall\ x \in B_n,\ f_{k_n}(x) < \varepsilon/2.$$

L'ensemble $\Omega_n = \{x \in E : \ f_{k_n}(x) < \varepsilon/2\}$ est alors un voisinage ouvert de B_n et la suite $(\Omega_n, n \in \mathbf{N})$ est croissante ; la propriété (1.2 (ii)) montre donc qu'il existe un entier n tel que :

$$\forall\ \mu \in A,\ \mu(E - \Omega_n) < \varepsilon/2\ ;$$

on aura alors aussi :

$$\forall\ \mu \in A,\ \int f_{k_n}\, d\mu \leq \int_{E-\Omega_n} f_{k_n}\, d\mu + \int_{\Omega_n} f_{k_n}\, d\mu \leq (\varepsilon/2) \sup|f| + (\varepsilon/2)\, \mu(E)/M) \leq \varepsilon\ ;$$

ceci implique que A vérifie la propriété (1.1 (ii)) et le théorème 1.1 montre qu'il vérifie aussi (1.2 (i)). Le corollaire est donc établi.

2. Convergence étroite de mesures positives bornées sur certains espaces lusiniens réguliers.

2.0 Les problèmes de convergence en loi associés à des équations différentielles stochastiques peuvent conduire à la situation suivante (cf. par exemple [12], chapitre 2) :

E est un espace lusinien régulier ; F est un espace vectoriel d'applications continues de E dans **R** engendrant sa topologie ; $\{\mu_n, n \in \overline{\mathbf{N}}\}$ est une suite de mesures positives bornées sur E vérifiant la propriété suivante :

2.0.1 $\forall f \in F$, la suite $\{\tilde{f}(\mu_n), n \in N\}$ des images des μ_n par f est une suite de mesures positives bornées sur **R** convergeant étroitement vers l'image $\tilde{f}(\mu)$ de $\mu = \mu_\infty$ par f.

2.1 Ce schéma se rencontre par exemple dans l'étude des suites de mesures positives bornées sur un espace vectoriel topologique E lusinien pour une topologie de dualité avec un espace vectoriel topologique F ; en effet les applications : $x \to y(x) = \langle x, y\rangle$, $y \in F$, forment alors un espace vectoriel d'applications continues de E dans **R** engendrant sa topologie. On sait alors ([11] prop. III.5.1 ; [8], exemple 8.10) que *dans cette situation, pour qu'un filtre* Ξ *de vecteurs aléatoires à valeurs dans* E *converge en loi vers un vecteur aléatoire* X *à valeurs dans* E, *il faut et il suffit que pour tout* $y \in F$, *le filtre* $\langle y, \Xi\rangle$ *des images des ensembles de* Ξ *par* y *converge étroitement (sur* **R**) *vers* $\langle y, X\rangle$.

Pour étendre le résultat 2.1, le problème est de comparer dans le cadre général 2.0 la topologie $\mathbb{E}$ de la convergence étroite des mesures à la topologie $\mathbb{E}'$ apparemment moins fine définie par les convergences étroites des mesures images $\tilde{f}(\mu)$, $f \in F$ et donc par le système des entourages

$$\{(\mu, \nu) \subset M_b^+(E) : |\int g(x)\ [\tilde{f}(\mu)](dx) - \int g(x)\ [\tilde{f}(\nu)](dx)\ | < 1\}$$

où f parcourt F et g parcourt l'ensemble des fonctions continues réelles bornées sur **R**.

Théorème 2.2: *Les deux topologies* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{E}'$ *définies ci-dessus sont identiques.*

Démonstration : L'injection canonique de $(M_b^+(E), \mathbb{E})$ dans $(M_b^+(E), \mathbb{E}')$ est continue de sorte qu'il suffit de montrer que tout filtre Φ sur $M_b^+(E)$ convergeant vers un élément m de $M_b^+(E)$ pour la topologie $\mathbb{E}'$ converge aussi pour $\mathbb{E}$; nous opérons en deux étapes.

(a) Si $E = \mathbf{R}^p$ et si F est l'ensemble des applications $t : x \to \sum_{i=1}^{p} t_i x_i$, $t \in \mathbf{R}^p$, la proposition III.5.1 de [11] s'applique et fournit le résultat.

(b.1) Dans le cas général, si le filtre Φ converge vers m pour $\mathbb{E}'$, la preuve (a) montre que pour tout entier p et toute partie finie $f = (f_1,\ldots,f_p)$ de F, le filtre $\tilde{f}(\Phi)$ converge étroitement vers $\tilde{f}(m)$ dans $M_b^+(\mathbf{R}^p)$; ceci implique que pour tout entier p, tout élément $f = (f_1,\ldots,f_p)$ de F^p et toute partie ouverte U de $\mathbf{R}^p$, on a :

$$\liminf_{\mu \in \Phi} \mu\{f^{-1}(U)\} \geq m\{f^{-1}(U)\},$$

$$\lim \mu_{\mu \in \Phi}(E) = \lim_{\mu \in \Phi} \mu\{f^{-1}(\mathbf{R}^p)\} = m\{f^{-1}(\mathbf{R}^p)\} = m(E).$$

(b.2) On note $\mathbb{C}$ la classe des parties de E définie par $\mathbb{C} = \{f^{-1}(U),\ U$ ouvert dans $\mathbf{R}^p$, $f \in F^p,\ p \in \mathbf{N}\}$. Soit V une partie ouverte de E ; puisque F engendre la topologie de E, pour tout $x \in V$, il existe un entier p, un élément f de F^p et un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ tel que x appartienne à $W(x) = f^{-1}(U)$ lui-même contenu dans V ; on forme ainsi un recouvrement ouvert de V et les propriétés particulières ([5], Th.1.9 (a)) de la topologie de V permettent d'en extraire un recouvrement dénombrable par des ouverts de la forme $W(x_k)$, $k \in \mathbf{N}$, appartenant tous à la classe $\mathbb{C}$ et contenus dans V. Fixons $\varepsilon > 0$, il existe alors un entier k et une famille $(x_1, \ldots x_k)$ contenue dans V telle que :

$$\bigcup\{W(x_j),\ j \in [1, k]\} \subset V, \quad m(V) \leq m\left\{\bigcup\{W(x_j),\ j \in [1, k]\}\right\} + \varepsilon\ .$$

On remarque maintenant que le calcul usuel des parties cylindriques montre que la classe $\mathbb{C}$ est stable par réunions et intersections finies ; il existe donc un entier p, un élément f de $\mathbf{R}^p$ et un ouvert U de $\mathbf{R}^p$ tels que $\bigcup\{W(x_j),\ j \in [1, k]\} = f^{-1}(U)$; le résultat (b.1) fournit alors :

$$m(V) \leq m\{f^{-1}(U)\} + \varepsilon \leq \lim\inf_{\mu \in \Phi} \mu\{f^{-1}(U)\} + \varepsilon \leq \lim\inf_{\mu \in \Phi} \mu(V) + \varepsilon,$$

de sorte que pour toute partie ouverte V de E, on a :

$$\lim\inf_{\mu \in \Phi} \mu(V) \geq m(V)\,,\ \lim_{\mu \in \Phi} \mu(E) = m(E)\ ;$$

le filtre Φ converge donc vers m pour la topologie $\mathbf{E}$, le théorème est établi.

2.3 Une version fonctionnelle du théorème 2.2 :

On note T un espace métrique compact (resp. on pose T = [0, 1]) ; soit de plus E un espace lusinien régulier ; on suppose (cf.[6], théorème 3.2.1) que $\mathbb{C} = \mathbb{C}(T, E)$ est un espace lusinien pour sa topologie uniforme (resp. que $\mathbf{D} = \mathbf{D}(T, E)$ est un espace lusinien pour sa topologie de Skorohod) ; on note F un espace vectoriel d'applications continues de E dans $\mathbf{R}$ engendrant sa topologie ; pour tout élément f de F et tout $\mu \in M_b^+(\mathbb{C})$ (resp.tout $\mu \in M_b^+(\mathbf{D})$, on note $\tilde{f}(\mu)$ l'image de μ par l'application : $x \to f \circ x$ de E dans $\mathbf{R}$. Dans ces conditions, on se propose de comparer sur $M_b^+(\mathbb{C})$ (resp. sur $M_b^+(\mathbf{D})$) la topologie $\mathbf{E}$ de la convergence étroite à la topologie apparemment moins fine $\mathbf{E}'$ définie par la convergence étroite des mesures images $\tilde{f}(\mu)$, $f \in F$.

Théorème 2.3 : *Les topologies* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{E}'$ *définies ci-dessus sont identiques.*

Démonstration : La preuve suit de près celle du théorème 2.2 ; nous la détaillons partiellement dans le seul cas de $\mathbf{D}$. L'injection canonique de $(M_b^+(\mathbf{D}), \mathbf{E})$ dans $(M_b^+(\mathbf{D}), \mathbf{E}')$ est continue de sorte qu'il suffit de montrer que tout filtre Φ sur $M_b^+(\mathbf{D})$ convergeant vers un élément m de $M_b^+(\mathbb{D})$ pour la topologie $\mathbb{E}'$ converge aussi pour $\mathbb{E}$; nous opérons en deux étapes.

(a) Supposons que $E = \mathbf{R}^p$ et que F est l'ensemble des applications $y : x \to \sum_{i=1}^{p} y_i\, x_i$, $y \in \mathbf{R}^p$; dans ce cas, nous introduisons la topologie $\mathbb{E}''$ séparée définie par la convergence étroite des seules $\tilde{y}(\mu)$, $y \in \mathbf{Q}^p$; elle est moins fine que $\mathbb{E}'$ et il suffit donc de montrer qu'elle est plus fine que $\mathbb{E}$; la topologie $\mathbb{E}''$ est définie par une famille dénombrable d'écarts, donc métrisable et il suffit de montrer que toute suite $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ convergeant pour $\mathbb{E}''$ converge aussi pour $\mathbb{E}$; si $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ converge pour $\mathbb{E}''$, en particulier les images de la suite par les applications coordonnées sont tendues ainsi que leurs sommes ; le théorème 4.4 de [6] montre alors que la suite est relativement compacte pour la topologie $\mathbb{E}$; puisque l'application canonique de $(M_b^+(\mathbb{D}), \mathbb{E})$ dans $(M_b^+(\mathbb{D}), \mathbb{E}'')$ est continue bijective et que la suite converge pour $\mathbb{E}''$, elle converge alors aussi pour $\mathbb{E}$, c'est le résultat dans ce cas.

(b) La deuxième étape de la preuve copie celle du théorème 2.1 sans modification notable : l'argument essentiel utilise le théorème 2.2.4 de [6] qui montre que sous les hypothèses du théorème, l'ensemble $\hat{f} : x \to f \circ x$ de $\mathbb{D}(T, E)$ dans $\mathbb{D}(T, \mathbf{R})$ où f parcourt F engendre la topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, E)$ de sorte que la classe $\mathbb{C} = \{\hat{f}^{-1}(U)$, U ouvert dans $\mathbb{D}(T, \mathbf{R}^p)$, $f \in F^p$, $p \in \mathbf{N}\}$ est une base de la même topologie.

Corollaire 2.4 : *Soit* F *un espace de Fréchet localement convexe séparable et* $E = F'$ *son dual topologique muni de la topologie* $\sigma(E, F)$ *; soit de plus* T *un espace métrique compact (resp. soit* $T = [0, 1]$*) ; on note* $\{\mu_n, n \in \bar{\mathbf{N}}\}$ *une suite de mesures positives bornées sur* $\mathbb{C} = \mathbb{C}(T, E)$ *(resp. sur* $\mathbb{D} = \mathbb{D}(T, E)$*), alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *La suite* $\{\mu_n, n \in \mathbf{N}\}$ *converge vers* $\mu_\infty = \mu$ *dans* $M_b^+(\mathbb{C})$ *(resp. dans* $M_b^+(\mathbb{D})$*),*

(ii) *Pour tout* $x \in F$, *la suite* $\{\tilde{x}(\mu_n), n \in \mathbf{N}\}$ *converge vers* $\tilde{x}(\mu)$ *dans* $M_b^+(\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$ *(resp. dans* $M_b^+(\mathbb{D}(T, \mathbf{R})))$

3. Tension et compacité.

Soient E un espace lusinien régulier et $M_b^+(E)$ l'ensemble de ses mesures positives bornées, on se propose dans ce paragraphe, de distinguer dans $M_b^+(E)$ les suites tendues et les suites relativement compactes ou convergentes sans être tendues quand il en existe. On dit que *E possède la propriété de Prohorov* si toute suite relativement compacte dans $M_b^+(E)$ est tendue. Pour commencer, on donne des exemples d'espaces ne possédant pas la propriété de Prohorov :

Lemme 3.1 : *Soient* F *un espace de Fréchet localement convexe séparable et* E = F' *son dual topologique muni de la topologie* $\sigma(E, F)$ *; on suppose que* E *possède la propriété de Prohorov.*

(a) *Soit de plus* A *un ensemble de mesures de probabilité sur* E *tel que pour tout élément* x *de* F, *l'ensemble* $\tilde{x}(A)$ *des images des éléments de* A *par* x *soit tendu dans* **R** *; alors* A *est tendu dans* E.

(b) *Pour qu'une suite* $\{\mu_n, n\in N\}$ *de mesures de probabilité sur* E *converge étroitement, il faut et il suffit que pour tout élément* x *de* F, *la suite* $\{\tilde{x}(\mu_n), n\in N\}$ *converge étroitement.*

(c) *En particulier, soient* $\{g_n, n\in N)$ *une suite gaussienne normale et* $\{y_n, n\in N\}$ *une suite d'éléments de* E *telle que la série* : $x \to \sum \langle y_n, x\rangle^2$ *converge simplement sur* F *; la série* $\sum g_n y_n$ *converge alors p.s. dans* E *vers un vecteur gaussien à valeurs dans* E.

Démonstration : (a) Supposons sous les hypothèses (a) que A ne soit pas tendu et notons $\{V_k, k\in N\}$ une suite fondamentale décroissante de voisinages de l'origine dans F ; il existe donc un nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout entier k, il existe un élément μ_k de A tel que :

3.1.1 $$\mu_k\{\sup_{x\in V_k} |\langle y, x\rangle| > 2^k\} > \varepsilon \; ;$$

pour tout entier k, nous notons alors Y_k une variable aléatoire de loi respective μ_k et aussi π_k la loi de $Z_k = Y_k/2^k$. Dans ces conditions, pour tout $x\in E$, la définition de A montre que la suite $\{\langle Y_k, x\rangle, k\in N\} = \{\langle Z_k, x\rangle\, 2^k, k\in N\}$ est tendue dans **R** ; dans ces conditions, $\{\langle Z_k, x\rangle, k\in N\}$ converge en loi (dans **R**) vers zéro ; le rappel 2.1 ou le théorème 2.2 impliquent donc que la suite vectorielle $\{Z_k, k\in N\}$ converge en loi (dans E) vers zéro ; puisque E possède la propriété de Prohorov, la même suite est tendue et la nature des parties compactes de E montre qu'il existe un entier m tel que :

$$\forall k \in N,\ \pi_k\{\sup_{x\in V_m} |\langle y, x\rangle| > 1\} \leq \varepsilon,\ \mu_k\{\sup_{x\in V_m} |\langle y, x\rangle| > 2^k\} \leq \varepsilon \; ;$$

en particulier :

3.1.2 $$\mu_m\{\sup_{x\in V_m} |\langle y, x\rangle| > 2^m\} \leq \varepsilon \; ;$$

ceci est contradictoire avec la construction de μ_m (cf. 3.1.1) ; nécessairement A est tendu.

(b) La condition indiquée est nécessaire, nous prouvons qu'elle est suffisante. Supposons qu'elle soit vérifiée ; alors pour tout élément x de F, la suite étroitement convergente $\{\tilde{x}(\mu_n), n\in N\}$ est tendue et la preuve (a) montre que la suite $\{\mu_n, n\in N\}$

l'est aussi ; comme l'hypothèse montre qu'elle n'a qu'un point adhérent, elle converge ; c'est le résultat.

(c) Sous l'hypothèse 3.1.(c), la suite $\{\mu_n, n \in N\}$ des sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} g_k y_k$ vérifie la condition 3.1.(b) ; la preuve (b) montre donc qu'il existe un voisinage V de l'origine dans F tel que :

3.1.3 $$\forall n \in N,\ P\{\sup_{x \in V} |\sum_{k=1}^{n} g_k \langle y_k, x\rangle| > 1\} \leq 1/4 ;$$

nous notons K le polaire compact de V dans E et N_K la jauge de K ; les inégalités de Lévy et la relation 3.1.3 impliquent que :

3.1.4 $$P\{\forall n \in N,\ \sum_{k=1}^{n} g_k y_k \in K\} > 1/2 ;$$

les évaluations gaussiennes ([5], 2.3) fournissent alors à partir de 3.1.4 :

3.1.5 $$E\{\sup_{n \in N} N_K[\sum_{k=1}^{n} g_k y_k]\} \leq 5/2 ;$$

par ailleurs, l'hypothèse 3.1.(b) montre que pour tout $x \in F$, la série $\sum g_k \langle y_k, x\rangle$ converge p.s. ; le théorème 3.4.1 de [5] implique alors la conclusion (b) du lemme.

Application 3.2 : L'utilisation du lemme précédent suffit à montrer que de nombreux duaux faibles E d'espaces de Fréchet localement convexes séparables ne possèdent pas la propriété de Prohorov :

(a) C'est le cas si E est un espace de Hilbert séparable pour sa topologie faible, c'est aussi le cas si E est l'un des espaces ℓ_q, $q \in]1, \infty]$ muni de la topologie $\sigma(\ell_q, \ell_p)$ ou si E est l'espace ℓ_1 muni de la topologie $\sigma(\ell_1, c_0)$; dans toutes ces situations, utilisant les notations du lemme, on identifie E et F à des sous-espaces de $\mathbf{R}^N$ dont on note $\{e_n, n \in N\}$ la base canonique et $x = \{x^n, n \in N\} = \sum x^n e_n$ l'élément scalène ; on introduit une suite numérique $\alpha = \{\alpha^n, n \in N\}$ et on applique le lemme 3.1 (c) à la suite $\{y_n, n \in N\}$ définie par $y_n = \alpha^n e_n$; on constate alors que la série : $x \to \sum \langle y_n, x\rangle^2$ converge simplement sur F si et seulement si $\alpha \in \ell_r$ où $r = \infty$ si $q \in]1, 2]$, $r = 2q/(q-2)$ si $q \in [2, \infty[$, $r = 2$ si $q = \infty$, alors que la série $\sum g_n y_n$ ne converge p.s. dans E vers un vecteur gaussien à valeurs dans E que si $\alpha \in l_q$. La conclusion résulte donc de l'inégalité $q < r$.

(b) C'est aussi le cas si F est l'espace de Banach séparable des fonctions continues sur un espace compact métrisable T non fini et si E est l'ensemble des mesures signées et bornées sur T muni de la topologie de la dualité ; ce dernier cas peut aussi être illustré par l'exemple suivant :

Exemple 3.3 : Soient T un espace métrique compact non fini, $\{t_n, n\in \mathbb{N}\}$ une suite d'éléments distincts de T convergeant vers un élément t de T ,$\{g_n, n\in \mathbb{N}\}$ une suite gaussienne normale ; pour tout n, on pose $\mu_n = n^{-1/2} \sum_{k=n+1}^{2n} g_k\, \delta_{t_k}$; alors la suite $\{\mu_n, n\in \mathbb{N}\}$ est une suite aléatoire (de mesures signées bornées) qui est p.s. non bornée dans le dual E de $\mathbb{C}(K)$ puisque $n^{-1/2}\, \|\mu_n\| = n^{-1} \sum_{k=n+1}^{2n} |g_k|$ tend p.s. vers 1 ; la suite des lois des μ_n n'est donc pas tendue dans $M_b^+(E)$; par contre pour toute application continue f de T dans $\mathbf{R}$ et pour tout entier n, la mesure image de μ_n par f s'écrit :

$$\tilde{f}(\mu_n) = n^{-1/2} \sum_{k=n+1}^{2n} g_k\, \delta_{f(t)} + n^{-1/2} \sum_{k=n+1}^{2n} g_k\, [\delta_{f(t_k)} - \delta_{f(t)}]\ ;$$

le premier terme a une loi indépendante de n alors que le second terme tend en loi vers zéro ; il en résulte que la suite $\{\tilde{f}(\mu_n), n\in \mathbb{N}\}$ converge en loi vers la loi de $g_0\, \delta_{f(t)}$. le théorème 2.1 montre alors que la suite des lois des μ_n converge dans $M_b^+(E)$ vers la loi de $g_0\, \delta_t$.

Théorème 3.4 : *Soient* E *un espace lusinien régulier et* A *une partie bornée de* $M_b^+(E)$.

(a) *On suppose que* A *est tendu ; alors pour toute suite bornée* $\{f_n, n\in \mathbb{N}\}$ *de fonctions réelles continues sur* E *convergeant vers zéro uniformément sur tout compact, on a:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\mu\in A} \int f_n\, d\mu = 0.$$

(b) *On suppose que* E *est le dual faible d'un espace de Fréchet localement convexe séparable* F *et que* A *n'est pas tendu ; il existe alors une suite* $\{f_n, n\in \mathbb{N}\}$ *de fonctions réelles continues bornées sur* E *convergeant vers zéro uniformément sur tout compact telle que :*

$$\lim\sup_{n\to\infty} \sup_{\mu\in A} \int f_n\, d\mu \neq 0.$$

Démonstration : (a) On pose $M_1 = \sup_{n\in \mathbb{N}} \| f_n \|$, $M_2 = \sup_{\mu\in A} \mu(E)$; fixons $\varepsilon>0$, on peut lui associer une partie compacte K de E telle que

$$\forall \mu\in A,\ \mu(E-K) < \varepsilon/(2M_2),$$

il existe alors un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0,\ \forall x\in K,\ | f_n(x) | < \varepsilon/(2M_1)\ ;$$

on aura alors :

$$\forall n > n_0,\ \forall \mu\in A,\ \left| \int f_n\, d\mu \right| \leq \left| \int_K f_n\, d\mu \right| + \| f_n \|\ \mu(E-K) \leq \varepsilon,$$ c'est le résultat (a).

(b) Sous les hypothèses 3.4 (b), nous notons $\{K_n, n\in \mathbb{N}\}$ la suite des polaires d'une suite fondamentale décroissante de voisinages de l'origine dans F de sorte que $\{K_n,$

$n \in N\}$ est une suite fondamentale croissante de parties compactes de E ; si A n'est pas tendu, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et pour tout entier n, un élément μ_n de A et une partie fermée F_n ne coupant pas K_n tels que :

$$\forall n \in N, \ \mu_n (F_n) > \varepsilon \ ;$$

l'espace E étant parfaitement normal ([1], I.6.1), il existe aussi pour tout entier n une application continue de E dans [0, 1] égale à zéro dans K_n et à un dans F_n. Dans ces conditions, la suite $\{f_n, n \in N\}$ converge vers zéro uniformément sur tout compact et on a :

$$\forall n \in N, \ \sup_{\mu \in A} \int f_n \, d\mu \ \geq \int f_n \, d\mu_n > \varepsilon, \text{ c'est le résultat (b).}$$

3.5 Soient $\{X_n, n \in N\}$ une suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi et $\{Y_n, n \in N\}$ une autre suite de variables aléatoires réelles convergeant en loi vers zéro ; on constate immédiatement que la suite des $X_n Y_n$, $n \in N$, converge alors aussi en loi vers zéro ; l'énoncé suivant étudie une extension de cette propriété dans certains espaces lusiniens.

Théorème 3.5 : *Soient* F *un espace vectoriel topologique localement convexe et* E *son dual topologique muni de la topologie* $\sigma(E, F)$ *; on suppose que* E *et* F *sont lusiniens ; soit de plus* $\{X_n, n \in N\}$ *une suite de variables aléatoires à valeurs dans* E. *Dans ces conditions,*

(a) *Si* F *est tonnelé et si la suite des lois des* X_n, $n \in N$, *est tendue, alors pour toute suite* $\{Y_n, n \in N\}$ *de variables aléatoires à valeurs dans* F *convergeant en loi vers zéro, la suite des variables aléatoires réelles* $\langle X_n, Y_n \rangle$, $n \in N$, *converge aussi en loi vers zéro.*

(b) *On suppose que* F *est un espace de Fréchet séparable localement convexe et que* E *est son dual topologique muni de la topologie faible ; on suppose aussi que la suite des lois des* X_n, $n \in N$, *n'est pas tendue, alors il existe une suite* $\{Y_n, n \in N\}$ *de variables aléatoires à valeurs dans* F *convergeant en loi vers zéro telle que la suite des variables aléatoires réelles* $\langle X_n, Y_n \rangle$, $n \in N$, *ne converge pas en loi vers zéro.*

Démonstration : (a) Fixons $\varepsilon > 0$, il existe alors une partie compacte K de E telle que :

$$\forall n \in N, \ P\{X_n \notin K\} < \varepsilon/2;$$

puisque F est tonnelé, le polaire V de K dans F est un voisinage de l'origine dans F ; il existe donc un entier n_0 tel que :

$$\forall n > n_0, \ P\{Y_n \notin \varepsilon V\} < \varepsilon/2;$$

on en déduit :

$$\forall n > n_0, \ P\{|\langle X_n , Y_n \rangle| > \varepsilon\} < \varepsilon,$$

c'est le résultat (a).

(b) Notons $\{V_j, j\in \mathbf{N}\}$ une suite fondamentale décroissante de voisinages de l'origine dans F et $\{K_j, j\in \mathbf{N}\}$ la suite de leurs polaires dans E ; c'est une suite de compacts de E et puisque la suite des lois des X_n n'est pas tendue, il existe un nombre $\varepsilon > 0$ et une suite d'entiers $\{n(j), j\in \mathbf{N}\}$ strictement croissante tels que :

$$\forall j\in \mathbf{N},\ \mathbf{P}\{\sup_{y\in V_j} |\langle y, X_{n(j)}\rangle| > 1\} = \mathbf{P}\{X_{n(j)}\notin K_j\} > \varepsilon\ ;$$

il existe donc aussi (lemme 3.5.1 ci dessous) une suite $\{Z_j, j\in \mathbf{N}\}$ d'applications mesurables de l'espace d'épreuves dans F telle que :

$$\forall j \in \mathbf{N},\ \mathbf{P}\{Z_j\in V_j\} = 1, \mathbf{P}\{\ |\langle Z_j, X_{n(j)}\rangle| > 1\} > \varepsilon;$$

on conclut alors au résultat (b) en posant $Y_n = Z_j$ pour tout $n \in]n(j-1), n(j)]$.

Lemme 3.5.1 : *Soient* E *un espace lusinien régulier et* F *un sous-espace lusinien de* $\mathbb{C}(E, \mathbf{R})$ *muni de la topologie de la convergence simple ; soient de plus* $\varepsilon > 0$ *et* μ *une probabilité sur* E *tels que :*

$$\mu\{\sup_{f\in F} f(x) > 1\} > \varepsilon\ ;$$

dans ces conditions, il existe une application mesurable $\varphi : x \rightarrow \varphi_x$ *de* E *dans* F *telle que :*

$$\mu\{\varphi_x(x) > 1\} > \varepsilon.$$

Démonstration : Puisque F est lusinien, il existe une suite $\{f_n, n\in \mathbf{N}\}$ dense dans F et pour tout $x \in E$, $\sup_{f\in F} f(x)$ est égal à $\sup_N f_n (x)$; ceci montre que l'application : $x \rightarrow \sup_{f\in F} f(x)$ est mesurable sur E et que sous les hypothèses du lemme, $\mu\{\exists n\in \mathbf{N} : f_n(x) > 1\ \} > \varepsilon$. On choisit alors un élément arbitraire g de F (qui n'est pas vide) ; pour tout élément x de E, on note n_x la borne inférieure de l'ensemble $\{n : f_n(x) > 1\}$ et on pose $\varphi_x = g$ si n_x est infini , $\varphi_x= f_{n_x}$ sinon.

3.6 On se propose ici de montrer qu'au moins dans un cadre particulier, les relations entre suites de mesures bornées tendues et suites de mesures convergeant étroitement dans $M_b^+(E)$ peuvent être associées en fait à des topologies lusiniennes différentes sur le même ensemble E.

3.6.0 Nous construisons dans cet alinéa sur un espace lusinien E une autre topologie lusinienne, éventuellement différente et associée aux fonctions continues sur toute partie compacte de E :

Soit E un espace lusinien régulier ; on note $\mathcal{L}$ sa topologie lusinienne, F est l'ensemble des applications de E dans **R** dont la restriction à toute partie compacte de E soit continue, $\mathcal{T}$ est la topologie sur E engendrée par F, c'est-à-dire la topologie la moins fine pour laquelle les éléments de F soient continus ; $\mathcal{T}$ est donc liée aux entourages $V(f) = \{x,y \in E: \sup_{1\leq i\leq n} | f_i (x) - f_i (y) |\leq 1\}$, $f = \{f_1, \ldots f_n\}\in F^n$, $n\in \mathbf{N}$; en particulier l'application canonique de (E, $\mathcal{T}$) dans (E, $\mathcal{L}$) est continue. Pour toute partie compacte K de (E, $\mathcal{L}$) et tout élément f de F, la restriction de f à K peut, puisque (E, $\mathcal{L}$) est normal, être prolongée en une fonction continue f' sur (E, $\mathcal{L}$) ; ceci montre que les restrictions de $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{T}$ à K coincident de sorte que K est aussi compact pour la topologie plus fine $\mathcal{T}$: les deux topologies ont les mêmes parties compactes et toute suite d'éléments de E convergeant pour $\mathcal{L}$ converge aussi pour $\mathcal{T}$.

Puisque (E, $\mathcal{L}$) est lusinien, il existe un espace polonais P et une application continue bijective φ de P sur (E, $\mathcal{L}$) ; cette application est aussi une application bijective de P sur l'espace séparé (E, $\mathcal{T}$) qui transforme toute suite $\{x_n, n \in N\}$ d'éléments de P convergeant vers un élément x de P en une suite $\{\varphi(x_n), n \in N\}$ d'éléments de E convergeant vers $\varphi(x)$ dans (E, $\mathcal{L}$), donc aussi dans (E, $\mathcal{T}$) : ceci montre puisque P est métrisable, que φ est aussi une application continue de P dans (E, $\mathcal{T}$) : (E, $\mathcal{T}$) est donc encore un espace lusinien régulier ; il a les mêmes parties compactes que (E, $\mathcal{L}$) et une topologie plus fine ; il a la même tribu borélienne, les mêmes mesures positives bornées. En particulier si (E, $\mathcal{L}$) est métrisable, alors $\mathcal{T} = \mathcal{L}$ puisque ces deux topologies ont les mêmes suites convergentes.

Sur l'ensemble $M_b^+(E)$ on peut définir deux topologies, la topologie $\mathcal{T}$-étroite notée $E_{\mathcal{T}}$ et le topologie $\mathcal{L}$-étroite notée $E_{\mathcal{L}}$. L'injection canonique de $(M_b^+(E), E_{\mathcal{T}})$ dans $(M_b^+(E), E_{\mathcal{L}})$ est continue ; soit A une partie de $M_b^+(E)$; si A est relativement compacte pour la topologie $E_{\mathcal{T}}$, elle est aussi relativement compacte pour la topologie $E_{\mathcal{L}}$; en fait si A est tendue et bornée, alors A est relativement compacte pour les deux topologies. Si (E, $\mathcal{L}$) possède la propriété de Prohorov, alors (E, $\mathcal{T}$) la possède aussi et les parties relativement compactes sont les mêmes pour les deux topologies. Au moins dans certains cas, l'introduction de la topologie $\mathcal{T}$ permet de mieux comprendre la nature des parties de $M_b^+(E)$ relativement compactes sans être tendues :

Théorème 3.6.1 : *On suppose que* (E, $\mathcal{L}$) *est le dual faible d'un espace de Fréchet séparable et localement convexe ; alors* (E, $\mathcal{T}$) *possède la propriété de Prohorov même si* (E, $\mathcal{L}$) *ne la possède pas.*

Le théorème identifie avec précision dans les hypothèses indiquées quelles sont les parties A tendues et bornées de $M_b^+(E)$: ce sont les parties relativement compactes pour la topologie $\mathcal{T}$- étroite.

Démonstration : Supposons que (E, $\mathcal{T}$) ne possède pas la propriété de Prohorov ; en suivant la démonstration du théorème 3.4, nous construisons donc un nombre $\varepsilon > 0$, une suite croissante $\{K_n, n \in N\}$ de parties compactes de E et aussi une suite $\{\mu_n, n \in N\}$ de mesures positives bornées sur E convergeant pour la topologie $\mathcal{T}$- étroite vers une mesure μ vérifiant :

Toute autre partie compacte C de E est contenue dans l'un des K_n ; de plus pour tout entier n, il existe une partie compacte H_n de $K_{n+1} - K_n$ telle que $\mu_n(H_n)$ soit supérieur à ε.

Pour tout entier n, nous notons alors f_n une fonction sur E à valeurs dans [0, 1] nulle dans K_n et égale à 1 dans H_n ; pour tout entier n, la série $\sum_{k \geq n} f_k$ converge donc uniformément sur tout compact de E vers une somme g_n bornée, continue sur (E, $\mathcal{T}$) et on a du fait de la convergence $\mathcal{T}$- étroite :

$$\forall n \in N, \int g_n \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_n \, d\mu_k \geq \lim \sup_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu_k \geq \varepsilon \, ;$$

mais la suite $\{g_n, n \in N\}$ est positive ou nulle et majorée par un sur E ; de plus elle converge uniformément sur tout compact vers zéro ; le théorème de convergence dominée implique donc que la suite des intégrales $\int g_n \, d\mu$ converge vers zéro ; il y a contradiction à supposer que (E, $\mathcal{T}$) ne possède pas la propriété de Prohorov : le théorème est démontré.

Remarque 3.6.2 : On notera que puisqu'il existe ([9]) des espaces lusiniens métrisables E ne possédant pas la propriété de Prohorov, *il existe aussi des espaces lusiniens* (E, $\mathcal{L}$) *pour lesquels* (E, $\mathcal{T}$) *ne possède pas la propriété de Prohorov.*

3.7 Conclusion : Dans des conditions assez générales, les théorèmes 2.1 et 2.3, le corollaire 2.2 permettent d'étudier des variables aléatoires et des fonctions aléatoires convergeant en loi sans que leurs lois soient tendues ; les critères correspondants sont simples à vérifier. Pourtant les théorèmes 3.4 et 3.5 montrent que ce type de convergence a peu de propriétés : la bonne convergence en loi est celle des suites dont les lois sont tendues ; la bonne convergence étroite ne serait-elle pas celle qui est définie par les fonctions bornées et continues sur tout compact plutôt que par les seules fonctions bornées et continues ?

4. Références

[1] Billingsley P. Convergence of probability measures, J. Wiley, New-York, 1968.

[2] Boulicaut P. Convergence cylindrique et convergence étroite d'une suite de probabilités de Radon, Z. Wahrscheinliichkeitstheorie verw.Geb., 28, 1973, 43-52.

[3] Dellacherie C., Meyer P.A. Probabilités et Potentiel, Chapitres I à IV, Hermann, Paris, 1975.

[4] Fernique X. Processus linéaires, processus généralisés, Ann.Inst. Fourier Grenoble, 17, 1967, 1-92.

[5] Fernique X. Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens, Expo. Math.,8, 1990, 289-364.

[6] Fernique X. Convergence en loi de fonctions aléatoires continues ou cadlag, propriétés de compacité des lois, Séminaire de Probabilités XXV, Lecture Notes in Math. 1485, 178-195, Springer Verlag Berlin Heidelberg New-York, 1991.

[7] Hoffmann-Jorgensen J. Weak compactness and tightness of subsets of M(X), Math.Scand., 31, 1972, 127-150.

[8] Hoffmann-Jorgensen J. Stochastic Processes in Polish Spaces, Various publications Series, 39, Aarhus Universitet, Matematisk Institut, 1991.

[9] Preiss D. Metric spaces in which Prohorov's theorem is not valid, Z. Wahrscheinlich-keitstheorie verw. Geb., 27, 1973, 109-116.

[10] Prohorov Yu.V. Convergence of random processes and limit theorems, Th. Prob. Appl., 1, 1956, 157-214.

[11] Schwartz L. Applications radonifiantes, Séminaire d'Analyse de l'Ecole Polytechnique de Paris, 1969-1970.

[12] Skorohod A.V. Stochastic Equations for Complex Systems, Mathematics and Its Applications, D. Reidel Publishing Company, East European Series, Dordrecht, 1988.

Xavier Fernique, Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.,
7 Rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex.