

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL WEBER

Opérateurs réguliers sur les espaces L^p

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 207-215

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__207_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

OPERATEURS REGULIERS SUR LES ESPACES L^p .

MICHEL WEBER

Résumé. — Nous étendons le critère d'entropie de J. Bourgain [1] au cas de suites d'opérateurs définis sur des espaces $L^p(\mu)$ avec $1 < p \leq 2$. Nous obtenons, à l'aide d'une technique de randomisation analogue à celle introduite par E. M. Stein dans l'étude du principe de continuité, et en utilisant les propriétés des fonctions aléatoires p -stables, un critère d'entropie similaire contrôlant le fait que pour un $0 < r < p$ et tout $f \in L^r(\mu)$, la suite $\{S_n(f), n \geq 1\}$ soit μ -p.s. bornée. .

1 Introduction-Enoncé.

Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace probabilisé. Dans [4], nous obtenions une extension du critère d'entropie de Bourgain [1] et en donnions une preuve simple et directe. Ce critère concerne la régularité de suites d'opérateurs définis sur les espaces $L^p(\mu)$ avec $2 \leq p < \infty$, et utilise la notion de *GB* ensemble. Rappelons à ce propos, qu'une partie K non vide d'un espace de Hilbert H est un *GB* (resp. *GC*) ensemble, si le processus isonormal Z sur H , c'est à dire le processus gaussien indexé sur H , dont la covariance est donnée par le produit scalaire, possède une version à trajectoires bornées sur K (resp. continues en norme sur K). Rappelons maintenant l'énoncé de ce critère.

THÉOREME 1.1. — Soit $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$, avec μ -continus, et commutant avec une suite d'isométries $\{T_j, j \geq 1\}$ positives, de $L^2(\mu)$, préservant 1, et vérifiant le théorème ergodique en moyenne dans $L^1(\mu)$:

$$(1.1) \quad \forall f \in L^1(\mu), \quad \lim_{J \rightarrow \infty} J^{-1} \sum_{j \leq J} T_j f = \int f d\mu, \text{ dans } L^1(\mu).$$

On suppose que

$$(1.2) \quad \text{pour tout } f \in L^p(\mu), \text{ la suite } \{S_n(f), n \geq 1\} \text{ est bornée presque sûrement.}$$

Alors les ensembles $C_f = \{S_n(f), n \geq 1\}$ sont des *GB* ensembles. En particulier, il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que pour tout $f \in L^p(\mu)$,

$$(1.3) \quad \sup\{\epsilon \sqrt{\log N_f^2(\epsilon)}, \epsilon > 0\} \leq C \|f\|_2$$

où $N_f^2(\delta)$ désigne le nombre minimal de boules hilbertiennes de rayon δ suffisant pour recouvrir C_f .

Dans [5], nous obtenions une extension dans $L^\infty(\mu)$ de ce critère et l'appliquons aux rotations sur le tore. Introduisons les éléments de Stein

$$F_{J,f}(\omega, x) = \frac{1}{\sqrt{J}} \sum_{j \leq J} g_j(\omega) T_j(f)(x)$$

où g_1, \dots, g_n est une suite isonormale définie sur un autre espace d'épreuves (Ω, \mathcal{B}, P) . Cette extension requerrait sur ces éléments un contrôle de leurs normes-sup. Supposons qu'en fait $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$ soit un espace métrique compact et que pour une distance continue d

(1.4) *il existe une probabilité de Radon π sur X , telle que :*

$$\sup_{x \in X} \int_0^{\text{diam}(X,d)} \sqrt{\log \frac{1}{\pi(y : d(x,y) \leq u)}} du < \infty.$$

Soit τ un endomorphisme ergodique sur $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \mu)$, et associons à tout $f \in L^\infty$, l'écart

$$\forall x, x' \in X, \quad D_f(x, x') = \sup_{J \geq 1} \sqrt{\frac{1}{J} \sum_{j \leq J} \{f \circ \tau^j(x) - f \circ \tau^j(x')\}^2}$$

THÉORÈME 1.2. — *Soit $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs linéaires μ -continus sur $L^2(\mu)$, et commutant avec τ . Supposons que*

(1.5) $\forall f \in L^\infty(\mu)$, *la suite $\{S_n(f), n \geq 1\}$ soit bornée μ -p.p.,*

alors pour tout f telle que

$$\forall x, x' \in X, \quad D_f(x, x') \leq d(x, x'),$$

les ensembles $C_f = \{S_n(f), n \geq 1\}$ sont des GB ensembles de $L^2(\mu)$. En particulier, si $\tau \in \text{Lip}(d)$, alors pour tout $f \in \text{Lip}(d)$, C_f est un GB ensemble de $L^2(\mu)$.

Comme application, nous obtenions le

COROLLAIRE 1.3. — *Soit $\Pi^d = [0, 1]^d$ le tore d -dimensionnel muni de la mesure de Haar λ_d et soit $\tau_\theta = (T_{\theta_1}, \dots, T_{\theta_d})$ une rotation telle que $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$ soit à coordonnées rationnellement indépendantes. Soit alors $\{S_n(f), n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs sur $L^2(\lambda_d)$ -continus et commutants avec τ_θ . Supposons que (1.5) soit réalisée. Alors pour tout $f \in \text{Lip}(d)$, C_f est GB ensemble de $L^2(\lambda_d)$.*

Considérons maintenant une suite d'opérateurs linéaires, μ -continus, $\{S_n, n \geq 1\}$ définis sur $L^p(\mu)$, $1 < p \leq 2$, et satisfaisant le condition de bornitude (3.1). Peut-on ici aussi, en déduire un contrôle sur l'entropie métrique des sous-ensembles C_f de $L^p(\mu)$? Nous y répondons de façon affirmative en démontrant le critère suivant :

THÉORÈME 1.4. — Soient $1 < p \leq 2$ et $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs linéaires de $L^p(\mu)$ dans $L^p(\mu)$, μ -continus. Supposons qu'il existe un endomorphisme ergodique τ sur (X, \mathcal{A}, μ) , commutant avec les $S_n, n \geq 1$. Si, pour un $0 < r < p$ on a :

$$(1.6) \quad \text{pour tout } f \in L^r(\mu), \text{ la suite } \{S_n(f), n \geq 1\} \text{ est } \mu - \text{p.s. bornée.}$$

Alors, pour tout $f \in L^p(\mu)$,

$$(1.7) \quad \sup\{\epsilon \{\log N_f^p(\epsilon)\}^{\frac{1}{q}}, \epsilon > 0\} \leq C(r, p) \|f\|_p,$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N_f^p(\epsilon)$ désigne le nombre minimal de L^p -boules de rayon ϵ suffisant pour recouvrir C_f , et $0 < C(r, p) < \infty$ est une constante ne dépendant que de r et p et de la suite d'opérateurs $\{S_n, n \geq 1\}$, et tendant vers l'infini quand r tend vers p .

2. Démonstration

Notons pour tout $j \geq 1$, par T_j l'opérateur normal associé à τ^j . Nous allons modifier les éléments de Stein. Soit $\{\theta_i; i \geq 1\}$ une suite de v.a.r. indépendantes, équidistribuées, p -stables, symétriques, de paramètre 1 et d'espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{A}, P) \otimes (\Omega', \mathcal{A}', P')$, (on note $\tilde{P} = P \otimes P'$ dans la suite). Pour tout $f \in L^p(\mu)$, tout $J \geq 1$, tout $x \in X$, on pose

$$(2.1) \quad F_{f,J}^p(\omega, \omega', x) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \theta_j(\omega, \omega') (T_j f)(x)$$

Alors $F_J^p = \{F_{f,J}^p(\omega, \omega', x), x \in X\}$ détermine une fonction aléatoire p -stable de mesure spectrale

$$m = \sum_{j \leq J} \delta_{T_j f}$$

On peut représenter F_J^p comme un mélange aléatoire de fonctions aléatoires gaussiennes; c'est une propriété classique. Plus exactement, suivant [3], remarque 1.8, p. 261, il existe une suite de v.a.r. gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes d'espace d'épreuves (Ω, \mathcal{A}, P) , et une suite de v.a.r. positives, i.i.d. $(\eta_j, j \geq 1)$, d'espace d'épreuves $(\Omega', \mathcal{A}', P')$ telles que la fonction aléatoire H_J^p définie par

$$H_{J,f}^p(\omega, \omega', x) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \eta_j(\omega) g_j(\omega') (T_j f)(x),$$

a même loi que F_J^p . Observons tout d'abord que pour tout $r < p$,

$$\mathbb{E}(|F_J^p|^r) = \mathbb{E}(|\theta_1|^r) \left(\frac{1}{J} \sum_{j \leq J} |T_j f|^p \right)^{\frac{r}{p}},$$

puisque

$$\frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \theta_j T_j f \stackrel{D}{=} \theta_1 \left(\frac{1}{J} \sum_{j \leq J} |T_j f|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit $f \in L^\infty(\mu)$. A l'aide du théorème de Birkhoff, et du théorème de convergence dominée on obtient :

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \int \left(\frac{1}{J} \sum_{j \leq J} |T_j f|^p \right)^{\frac{r}{p}} d\mu = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{r}{p}}.$$

D'où, pour tout J assez grand,

$$\int E(|F_J^p|^r) d\mu \leq 2^r E(|\theta_1|^r) \|f\|_p^r.$$

Ainsi, pour tout J assez grand, et $r < p$

$$\|F_J\|_{r, \mu \otimes \tilde{P}} \leq 2 \|\theta_1\|_r \|f\|_{p, \mu}.$$

En argumentant alors comme suivant les alinéas (2.2) à (2.4) de [4], on tire du principe de Banach et des hypothèses faites, que pour tout $\epsilon > 0$, tout J assez grand, il existe un ensemble mesurable $X_\epsilon^J \subset X$, tel que $\mu(X_\epsilon^J) \geq 1 - \sqrt{\epsilon}$, et un réel $0 < C(\epsilon) < \infty$, tels que

$$(2.2) \quad \forall x \in X_\epsilon^J, \quad \tilde{P}\left\{ \sup_{n \geq 1} |S_n(F_J, f)| \leq C(\epsilon) \|\theta_1\|_r \|f\|_{p, \mu} \right\} \geq 1 - 2\sqrt{\epsilon}.$$

D'où :

$$(2.3) P'\{\omega' : P\left\{ \sup_{n \geq 1} |S_n(F_J, f(\omega, \omega', x))| \leq C(\epsilon) \|\theta_1\|_r \|f\|_{p, \mu} \right\} \geq 1 - \sqrt{\epsilon}\} \geq 1 - 3\sqrt{\epsilon}.$$

En vertu de l'évaluation 2.3.3 de [2] sur les semi-normes gaussiennes, on a alors sur X_ϵ^J , pour tout $0 < \epsilon < \frac{1}{4}$, en notant $E_{(P)}$ le symbole d'intégration par rapport à P ,

$$(2.4) \quad 1 - \sqrt{\epsilon} \leq P'\{\omega' : E_{(P)}\{ \sup_{n \geq 1} |S_n(F_J, f(\cdot, \omega', x))| \} \leq \frac{4C(\epsilon)}{1 - \sqrt{\epsilon}} \|\theta_1\|_r \|f\|_{p, \mu}\},$$

Considérons la fonction aléatoire p -stable indexée sur les entiers et définie par :

$$S_n(F_J, f) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \theta_j S_n(T_j(f)), \quad n \geq 1,$$

égale aussi grâce à l'hypothèse de commutation à

$$S_n(F_{J,f}^p) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \theta_j T_j(S_n(f)), \quad n \geq 1,$$

Elle a donc même loi que la fonction aléatoire p -stable ci-dessous :

$$H_J^p(n) = \frac{1}{J^{\frac{1}{p}}} \sum_{j \leq J} \eta_j g_j T_j(S_n(f)), \quad n \geq 1,$$

Introduisons l'écart aléatoire gaussien sur \mathbf{N}

$$d_{J,\omega',x}(n,m) = \left[\frac{1}{2} E_{(P)} (H_J^p(n) - H_J^p(m))^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

ainsi que l'écart associé à H_J^p :

$$d_{J,x}(n,m) = \left(\frac{1}{2} \int |\beta(n) - \beta(m)|^p dm_{H_J^p}(\beta) \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $m_{H_J^p}$ désigne la mesure spectrale de H_J^p . Pour toute partie $A \subset \mathbf{N}$, tout écart d sur \mathbf{N} , tout $\epsilon > 0$, on notera $N(A, d, \epsilon)$ le cardinal minimal d'un recouvrement de A par des d -boules de rayon ϵ , centrées dans A . De même, $\sigma(A, d, n)$ est la fonction définie pour chaque entier n comme étant le plus petit nombre $\epsilon > 0$ tel que A puisse être recouvert par au plus n d -boules de rayon ϵ centrées dans A . En vertu de [4], lemme 2.1, p. 263, on peut assigner un ensemble mesurable Ω'_o tel que $P'\{\Omega'_o\} > \frac{1}{2}$; (en fait les mêmes calculs montrent que sa mesure peut être choisie arbitrairement proche de 1; et on supposera pour la seule commodité de l'exposé que $P'\{\Omega'_o\} > 1 - \sqrt{\epsilon}$), tel que :

$$(2.5) \quad \forall \omega' \in \Omega'_o, \forall n \geq 1, \sigma(\mathbf{N}, d_{J,\omega',x}, n) \geq \beta(p) \frac{\sigma(\mathbf{N}, d_{J,x}, n)}{(\log(n+1))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}},$$

On en déduit à l'aide de (2.4) et de la minoration de Sudakov, que pour tout $x \in X_\epsilon^J$, on a :

$$(2.6) \quad \frac{4C(\epsilon)}{1-\sqrt{\epsilon}} \|\theta_1\|_r \|f\|_{p,\mu} \geq \gamma(p) \sup_{\delta > 0} \delta \left(\log N(\mathbf{N}, d_{J,x}, \delta) \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $\gamma(p) > 0$. Soit \bar{N} une partie finie de \mathbf{N} . En vertu des hypothèses faites, on peut trouver un index partiel \mathcal{J} dépendant de \bar{N} tel que :

$$(2.7) \quad \mu\{\forall j \in \mathcal{J}, \forall n, m \in \bar{N}, d_{J,x}(n,m) \geq \delta(p) \|(S_n - S_m)(f)\|_{p,\mu}\} \geq 1 - \sqrt{\epsilon},$$

où $\delta(p) > 0$. En combinant (2.6) et (2.7), on obtient :

$$(2.8) \quad C(\epsilon) \|\theta_1\|_r \|f\|_{p,\mu} \geq \epsilon(p) \sup_{\delta > 0} \delta \left(\log N(\bar{N}, \|\cdot\|_{p,\mu}, \delta) \right)^{\frac{1}{p}},$$

où $\epsilon(p) > 0$. On conclut en faisant tendre \bar{N} vers \mathbf{N} . On en déduit le résultat annoncé pour tout élément g de $L^p(\mu)$ en procédant par approximation.

3. Cas des procédés de sommation.

Dans le cas où les opérateurs S_n sont définis à partir de procédés de sommation matricielles, on peut renforcer très nettement l'énoncé du théorème 1.4. Soit $A = \{a_{n,k}, n, k \geq 1\}$ une matrice infinie de réels. Soit $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace de LEBESGUE et notons T le groupe des automorphismes de $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$. Posons formellement

$$(3.1) \quad \forall T \in \mathcal{T}, \forall f \in L^p(\mu), \forall n \geq 1, S_n^T f = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} f \circ T^k.$$

Etant donnée une suite $\{b_n, n \geq 1\}$ de réels, l'écriture formelle

$$(3.2) \quad \forall f \in L^p(\mu), \sigma(f) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k f \circ T^k.$$

détermine en vertu du théorème de la borne uniforme un opérateur linéaire comme L^p -limite des opérateurs continus $\sigma_N(f) = \sum_{k=1}^N b_k f \circ T^k$, $N \geq 1$, si et seulement si $\sup_{N \geq 1} \|\sigma_N\| < \infty$; et alors σ lui-même est continu. Ici nous allons simplement supposer que $\mathcal{A} = \{a_n = \{a_{n,k}, k \geq 1\}, n \geq 1\}$ est borné dans l_1 ; et donc les opérateurs S_N^T sont toujours L^p -continus, $p \leq \infty$. Nous montrons

THÉORÈME 3.1. —

i) ($2 \leq p < \infty$) Si pour un automorphisme ergodique T

$$(3.3) \quad \forall f \in L^p(\mu), \{S_n^T(f), n \geq 1\} \text{ est borné p.s.},$$

alors nécessairement,

$$(3.4) \quad \sup_{S \in \mathcal{T}} \sup_{f \in L^p(\mu), \|f\|_2 \leq 1} E \left(\sup_{n \geq 1} |Z(S_n^S(f))| \right) < \infty,$$

où Z est le processus isonormal sur $L^2(\mu)$.

Si, plus particulièrement $(\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \mu)$ est un espace produit $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \nu)^{\otimes \mathbb{Z}}$, alors \mathcal{A} est un GB ensemble de l_2 .

ii) ($1 < p \leq 2$) Si pour un automorphisme ergodique T et pour un $0 < r < p$

$$(3.5) \quad \forall f \in L^r(\mu), \{S_n^T(f), n \geq 1\} \text{ est borné p.s.},$$

alors nécessairement,

$$(3.6) \quad \sup_{S \in \mathcal{T}} \sup_{f \in L^p(\mu), \|f\|_2 \leq 1} \sup \{ \epsilon \{\log N_{f,S}^p(\epsilon)\}^{\frac{1}{q}}, \epsilon > 0 \} \leq C(r, p),$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N_{f,S}^p(\epsilon)$ désigne le nombre minimal de L^p -boules de rayon ϵ suffisant pour recouvrir $\{S_n^S f, n \geq 1\}$, et $0 < C(r, p) < \infty$ est une constante ne dépendant que de r et p et tendant vers l'infini quand r tend vers p .

Note : les conditions (3.4), (3.6) sont fortes. En effet, du critère de BOURGAIN [1] on tire immédiatement par exemple (3.4) sans le passage au sup sur \mathcal{T} . Il suffit d'ailleurs ([4], théorème 3.1) que les S_n soient simplement continus en mesure. L'intérêt supplémentaire de (3.4) réside dans la contrôle uniforme sur \mathcal{T} de la propriété GB qu'elle indique. Donnons-en brièvement la preuve, l'autre inégalité se traitant de manière similaire.

Du principe de BANACH , on tire que pour un $K < \infty$ que

$$(3.5) \quad \sup_{f \in L^p(\mu), \|f\|_p \leq 1} \mu \left(\sup_{n \geq 1} |S_n^T(f)| > K \right) \leq \frac{1}{8}.$$

Soit maintenant T^* le sous-groupe distingué associé à T . Par le lemme de conjugaison , T^* est faiblement dense dans \mathcal{T} , si T est a périodique, donc *a fortiori* si T est ergodique. De plus

$$(3.6) \quad S_n^{R^{-1}TR}(f) = R^{-1} \left(S_n^T f \right) R.$$

Ceci montre comme dans [4], avec la même constante K que dans (3.5)

$$(3.7) \quad \sup_{S \in \mathcal{T}} \sup_{f \in L^p(\mu), \|f\|_p \leq 1} \mu \left(\sup_{n \geq 1} |S_n^S(f)| > K \right) \leq \frac{1}{8}.$$

A l'aide de l'estimation (2.8) dans [4], il est maintenant aisé de conclure à (3.4). Dans le cas des espaces produits, prenons

$$f \in \mathbf{1}_v^\perp, \|f\|_2 = 1, f \in L^p(\mu)$$

et observons que $\|(S_n^T - S_{n'}^T)\|_{2,\mu} = \|a_n - a_{n'}\|_2$, qui amène facilement par (3.4) la propriété pour \mathcal{A} .

Lorsque les procédés de sommation décrits au paragraphe précédents vérifient de plus

$$(3.8) \quad \forall n \geq 1, S_n(f) = \sum_{k=1}^{N_n} a_{n,k} f \circ T^k,$$

où les $N_n, n \geq 1$, sont des entiers positifs, la propriété (3.3) se traduit directement sur la suite $\mathcal{A} = \{a_n = \{a_{n,k}, 1 \leq k \leq N_n\}, n \geq 1\}$. On peut en effet démontrer l'énoncé suivant.

THÉORÈME 3.2. — *Soit $\{S_n, n \geq 1\}$ une suite d'opérateurs définis par (3.1) et satisfaisant la condition (3.8). Alors,*

i) $(2 \leq p < \infty)$ *Si pour un automorphisme ergodique T*

$$(3.3) \quad \forall f \in L^p(\mu), \{S_n^T(f), n \geq 1\} \text{ est borné p.s.,}$$

alors nécessairement,

$$(3.9) \quad \mathcal{A} \text{ est un GB - ensemble de } l_2.$$

ii) ($1 < p \leq 2$) Si pour un automorphisme ergodique T et pour un $0 < r < p$

$$(3.5) \quad \forall f \in L^r(\mu), \{S_n^T(f), n \geq 1\} \text{ est borné p.s.},$$

alors nécessairement,

$$(3.10) \quad \sup\{\epsilon \{\log N^p(\mathcal{A}, \epsilon)\}^{\frac{1}{p}}, \epsilon > 0\} < \infty$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N^p(\mathcal{A}, \epsilon)$ désigne le nombre minimal de L^p -boules de rayon ϵ suffisant pour recouvrir \mathcal{A} .

Démonstration : A l'aide du lemme de Rokhlin-Halmos-Kakutani, pour tout $\epsilon > 0$, tout $N \geq 0$, il existe A ensemble mesurable tel que $A, TA, \dots, T^{N-1}A$, soient deux à deux disjoints et $\frac{1}{N}\epsilon \leq \mu(A) \leq \frac{1}{N}$. On pose $f = 1_A$. Soient n, m tels que $N_n \leq N_m \leq N$. Alors :

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - S_m(f)\|_{2,\mu} &= \left\| \sum_{k=1}^{N_n} (a_{n,k} - a_{m,k})f \circ T^k + \sum_{k=N_n+1}^{N_m} a_{m,k}f \circ T^k \right\|_{2,\mu} \\ &= \left[\sum_{k=1}^{N_n} (a_{n,k} - a_{m,k})^2 + \sum_{k=N_n+1}^{N_m} a_{m,k}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \|a_n - a_m\|_2 \sqrt{\mu(A)}. \end{aligned}$$

Notons pour toute partie B de \mathbf{N} , tout écart d sur \mathbf{N} et tout $\epsilon > 0$, par $N(B, d, \epsilon)$, le cardinal minimal d'un recouvrement de B par des d -boules de rayon ϵ , centrées dans B . A l'aide de l'estimation (2.8) de [4], il existe un nombre K indépendant de A tel que :

$$K \sqrt{\mu(A)} \geq \sup_{\delta > 0} \delta \sqrt{\log N(C_f, \|\cdot\|_2, \delta)}.$$

Mais,

$$\begin{aligned} N(C_f, \|\cdot\|_{2,\mu}, \epsilon) &\geq N(\{S_m(f) : N_m < N\}, \|\cdot\|_{2,\mu}, \epsilon) \\ &= N(\{a_m : N_m < N\}, \sqrt{\mu(A)}\|\cdot\|_2, \epsilon). \end{aligned}$$

D'où,

$$K \sqrt{\mu(A)} \geq \sup_{\delta > 0} \delta \sqrt{\log N(\{a_m : N_m < N\}, \sqrt{\mu(A)}\|\cdot\|_2, \delta)}.$$

Si $\delta = \epsilon\sqrt{\mu(A)}$, on obtient,

$$K \geq \sup_{\epsilon > 0} \epsilon \sqrt{\log N(\{a_m : N_m < N\}, \|\cdot\|_2, \epsilon)},$$

le résultat (3.9) s'en suit en faisant tendre N vers l'infini. Enfin, (3.10) s'obtient en argumentant de façon similaire. \square

References

- [1] BOURGAIN, J. *Almost sure convergence and bounded entropy*. Israël J. Math. V. 63, no 63, p. 79-95, (1988).
- [2] FERNIQUE, X. *Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens*. Expo. Math. V. 8, p. 289-364 (1990).
- [3] MARCUS, M.B., PISIER, G. *Characterizations of almost surely p -stable random Fourier series and strongly stationary processes*. Acta mathematica, V. 152, p. 245-301, (1984).
- [4] SCHNEIDER, D., WEBER, M. *Une remarque sur un théorème de Bourgain*. preprint, (1991).
- [5] WEBER, M. *GC sets, Stein's elements and matrix summation methods*. preprint, (1992).

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Université Louis Pasteur,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cedex