Thierry de La Rue

Espaces de Lebesgue

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 15-21
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__15_0>

ESPACES DE LEBESGUE

Thierry DE LA RUE
Université de Rouen
UFR des Sciences – Mathématiques
URA CNRS 1378
F76821 Mont-Saint-Aignan Cedex
e-mail : delarue@univ-rouen.fr

Introduction

Le but de cet exposé est la présentation d'une certaine classe d'espaces probabilisés : les espaces de Lebesgue. Il existe deux raisons majeures à l'intérêt que l'on peut porter à ces espaces : d'une part, ils englobent la quasi-totalité des espaces probabilisés utilisés couramment (en particulier, tout espace polonais muni d'une mesure de probabilité est un espace de Lebesgue), d'autre part, ils possèdent de très bonnes propriétés que n'ont pas en général des espaces probabilisés abstraits.

Ce travail a été motivé par la lecture du magnifique article de V.A. ROKHLIN *[1], dans lequel est menée une étude très poussée des espaces de Lebesgue. Mais il m'a semblé que l'on pouvait présenter les choses de manière plus simple que ne l'a fait* ROKHLIN *; en particulier, le lien (très) étroit existant entre espaces de Lebesgue et mesures de Radon, entrevu par* J. HAEZENDONCK *[2], permet de montrer de manière élémentaire quelques propriétés essentielles des espaces de Lebesgue.*

1– Une définition des espaces de Lebesgue

Commençons par introduire quelques notations : tout triplet de la forme $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ désigne un espace probabilisé dont la tribu $\mathcal{A}$ est toujours supposée μ-complète. Si $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, on note $\sigma(\mathcal{B})$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{B}$, et $\sigma(\mathcal{B})_\mu$ la tribu complétée de $\sigma(\mathcal{B})$ pour μ. Enfin, si $A \in \mathcal{A}$, on note par convention : $A^1 = A$, et $A^0 = A^c = \Omega \setminus A$.

Définition 1-1 : L'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace de Lebesgue* s'il existe une topologie τ séparée à base dénombrable vérifiant :

- $\tau \subset \mathcal{A}$ et $\sigma(\tau)_\mu = \mathcal{A}$, (1)
- Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = \sup\limits_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compact de } \tau}} \mu(K).$ (2)

Une telle topologie τ sera dite *adaptée à* μ.

Remarque : Grâce à (1), il suffit bien sûr de vérifier (2) pour tout $A \in \sigma(\tau)$. De plus, si tout ouvert de τ est réunion dénombrable de fermés (ce qui est le cas si τ est métrisable), on peut remplacer (2) par :

$$1 = \sup_{K \text{ compact de } \tau} \mu(K). \qquad (2')$$

En effet, on a alors (2) pour tout A fermé, puis pour tout A ouvert, puis pour tout A dans l'algèbre engendrée par τ. Comme l'ensemble des A vérifiant (2) est une classe monotone, on a bien (2) pour tout $A \in \sigma(\tau)$.

2–Plongement d'un polonais dans l'espace de Cantor

On suppose ici que l'espace Ω est muni d'une topologie τ vérifiant (1) qui en fait un espace polonais*. Fixons d une distance complète induisant τ. Soit $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de la topologie de Ω. Puisque $\mathcal{B}$ sépare les points de Ω, on peut plonger Ω dans l'espace de Cantor $\mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, par l'injection

$$\phi_{\mathcal{B}} : \omega \longmapsto \Big(1_{B_n}(\omega)\Big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Rappelons ici quelques propriétés de l'espace $\mathcal{C}$: muni de sa topologie produit, notée $\tau_{\mathcal{C}}$, c'est un espace compact métrisable. Une base de cette topologie est constituée par les cylindres (*i.e.* les parties obtenues en fixant un nombre fini de coordonnées), qui sont à la fois ouverts et fermés.

$\phi_{\mathcal{B}}$ étant clairement mesurable, on peut définir sur $\sigma(\tau_{\mathcal{C}})$ la mesure image de μ, notée $\mu_{\mathcal{B}}$, puis la tribu $\mathcal{A}_{\mathcal{B}} = \sigma(\tau_{\mathcal{C}})_{\mu_{\mathcal{B}}}$. L'espace probabilisé $(\mathcal{C}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \mu_{\mathcal{B}})$ est alors un espace de Lebesgue : puisque $\mathcal{C}$ est compact, (2′) est trivialement vérifié. On a alors le résultat suivant :

Lemme 2-1 : *L'image de Ω par $\phi_{\mathcal{B}}$ est un borélien de $\mathcal{C}$.*

Preuve : Pour toute partie A de Ω, notons $\delta(A)$ le diamètre de A (relativement à la distance d).
Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$. Par un exercice amusant de topologie, on montre que y est l'image d'un point ω par $\phi_{\mathcal{B}}$ si et seulement si y vérifie les trois propriétés suivantes :

- il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(B_n) \leq 1$ et $y_n = 1$,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} B_k^{y_k} \neq \emptyset$ (car ω est dedans !),
- si $y_n = 1$, et si $\mathcal{I}(n) = \left\{ m \in \mathbb{N} \big/ \overline{B_m} \subset B_n \text{ et } \delta(B_m) \leq \dfrac{\delta(B_n)}{2} \right\}$, alors il existe $m \in \mathcal{I}(n)$ tel que $y_m = 1$.

Or, l'ensemble des y vérifiant ces trois propriétés est bien un borélien de $\mathcal{C}$: on peut facilement l'écrire à partir de cylindres en n'utilisant que des opérations d'union et d'intersection dénombrables. On a donc bien $\phi_{\mathcal{B}}(\Omega) \in \sigma(\tau_{\mathcal{C}})$. □

Voyons maintenant une conséquence importante du lemme 2-1 :

Lemme 2-2 : *Soit τ' la topologie engendrée par τ et une famille dénombrable $(F_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de fermés de τ. Alors τ' est une topologie adaptée à μ.*

Preuve : Clairement, τ' vérifie (1). Il suffit donc de montrer (2') pour τ'.

---

* métrique, complet, séparable.

Soit $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base d'ouverts de τ, telle que tous les F_p^c soient dans $\mathcal{B}$. Grâce à l'injection $\phi_{\mathcal{B}}$, on peut considérer Ω comme une partie mesurable de $\mathcal{C}$. Soit τ'' la topologie induite par $\tau_{\mathcal{C}}$ sur Ω. On a alors : $\tau \subset \tau' \subset \tau''$. De plus, comme $(\mathcal{C}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \mu_{\mathcal{B}})$ est un espace de Lebesgue :

$$1 = \mu(\Omega) = \sup_{\substack{K\subset\Omega \\ K \text{ compact de } \tau''}} \mu(K).$$

Mais τ'' étant plus fine que τ', tout compact de τ'' est aussi un compact de τ'. □

Le lemme 2-2 contient bien sûr le résultat suivant :

Théorème 2-3 : *Ω étant un espace polonais, et $\mathcal{A}$ la tribu des boréliens complétée pour la probabilité μ, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Lebesgue.*

3– Quelques bonnes propriétés des espaces de Lebesgue

Nous pouvons à présent entrer dans le vif du sujet, et démontrer certaines des jolies propriétés qui font le charme des espaces de Lebesgue. Elles découlent toutes du lemme qui suit :

Lemme 3-1 : *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue, et soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de parties mesurables. Alors il existe une topologie τ' sur Ω, adaptée à μ, et pour laquelle chaque B_n est ouvert.*

Preuve : Fixons une topologie τ adaptée à μ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe alors un K_σ (union dénombrable de compacts de τ), noté S_n, tel que

$$S_n \subset B_n \text{ et } \mu(B_n \setminus S_n) = 0.$$

Soit $\mathcal{K}$ la famille (dénombrable) de compacts utilisés pour construire les S_n, et soit τ' la topologie engendrée par τ, $\mathcal{K}$, et les B_n. τ' est bien une topologie séparée à base dénombrable vérifiant (1), et chaque B_n est ouvert pour τ'. Posons

$$\mathcal{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus S_n), \text{ et } \Omega_0 = \mathcal{N}^c.$$

On a $\mu(\Omega_0) = 1$, et la trace de B_n sur Ω_0 est la même que la trace de S_n. Soit maintenant $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$, et $\varepsilon \in \,]0, \mu(A)[$. Alors il existe K, compact de τ, tel que $K \subset A \cap \Omega_0$ et $\mu(K) \geq \mu(A) - \varepsilon$. K muni de la topologie trace $\tau \cap K$ est compact à base dénombrable, donc polonais. De plus, comme $K \subset \Omega_0$, l'autre topologie trace $\tau' \cap K$ est engendrée par $\tau \cap K$ et $\mathcal{K} \cap K$ (famille dénombrable de fermés de $\tau \cap K$). On peut alors appliquer le lemme 2-2, qui donne :

$$\mu(K) = \sup_{\substack{K'\subset K \\ K' \text{ compact de } \tau'\cap K}} \mu(K').$$

Mais comme tout compact de $\tau' \cap K$ est aussi compact pour τ', on trouve ainsi un compact K' pour τ' vérifiant

$$K' \subset A \text{ et } \mu(K') \geq \mu(A) - 2\varepsilon,$$

ce qui prouve que τ' est adaptée à μ. □

Théorème 3-2 : *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue, $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ un espace probabilisé, et $h : \Omega \longrightarrow \Omega'$ une application mesurable, telle que $h(\mu) = \mu'$.*
On suppose de plus qu'il existe une famille dénombrable $\mathcal{B}' = (B'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}'$, qui sépare les points de Ω'. Alors :

(a) $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ est un espace de Lebesgue,
(b) $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{B}')_{\mu'}$,
(c) $h(\Omega) \in \mathcal{A}'$.

Preuve : Quitte à rajouter les ${B'_n}^c$, on peut toujours supposer que la famille $\mathcal{B}'$ est stable par passage au complémentaire. Puisque $\mathcal{B}'$ sépare les points, on peut plonger Ω' dans l'espace de Cantor à l'aide de l'injection $\phi_{\mathcal{B}'}$, définie de la même façon qu'en 2. Munissons alors Ω' de la topologie induite par $\tau_{\mathcal{C}}$, notée τ', qui en fait un espace métrisable séparable. La famille $\mathcal{B}'_d$ des intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}'$ est alors une base dénombrable de cette topologie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n = h^{-1}(B'_n)$. Alors d'après le lemme 3-1, il existe une topologie τ sur Ω, adaptée à μ, et pour laquelle chaque B_n est ouvert, ce qui rend h continue. soit maintenant A' quelconque dans $\mathcal{A}'$, et $A = h^{-1}(A')$. Comme $h(\mu) = \mu'$, on a :

$$\mu'(A') = \mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ compact de } \tau}} \mu(K).$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, soit $K \subset A$ tel que $\mu(K) \geq \mu(A) - \varepsilon$. Alors $K' \stackrel{\text{déf}}{=} h(K)$ est un compact de τ' inclus dans A', et

$$\mu'(K') = \mu\big(h^{-1}(K')\big) \geq \mu(K) \geq \mu'(A') - \varepsilon.$$

On a donc bien :

$$\mu'(A') = \sup_{\substack{K' \subset A' \\ K' \text{ compact de } \tau'}} \mu'(K').$$

De plus, comme tout compact de τ' est dans $\sigma(\mathcal{B}')$, on en déduit : $\sigma(\mathcal{B}')_{\mu'} = \mathcal{A}'$.
Enfin, on peut facilement trouver un K_σ S dans Ω' tel que $\mu'(S) = 1$ et $S \subset h(\Omega) \subset \Omega'$, ce qui prouve que $h(\Omega) \in \mathcal{A}'$. □

Définition 3-3 : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue. On appelle *base* de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ toute famille dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ qui sépare les points de Ω.

Théorème 3-4 : *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace de Lebesgue, et $\mathcal{B} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Alors $\sigma(\mathcal{B})_\mu = \mathcal{A}$.*

Preuve : Il suffit bien sûr d'appliquer le (b) du théorème précédent, avec $\Omega' = \Omega$, et $h = \mathrm{Id}_\Omega$. □

Théorème 3-5 : *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ deux espaces de Lebesgue, et h une injection mesurable de Ω dans Ω', telle que $h(\mu) = \mu'$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, $h(A) \in \mathcal{A}'$.*

Preuve : Soit $\mathcal{B}' = (B'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$. Comme h est injective, la famille $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n = h^{-1}(B'_n)$ est une base de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Grâce au théorème 3-2, on sait que $h(\Omega) \in \mathcal{A}'$, et donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h(B_n) = B'_n \cap h(\Omega) \in \mathcal{A}'$. Puis, comme les B_n engendrent (aux négligeables près) la tribu $\mathcal{A}$, on obtient facilement $h(A) \in \mathcal{A}'$ pour tout $A \in \mathcal{A}$. □

Remarque : La conclusion du théorème reste valable si on remplace l'hypothèse : $\mu' = h(\mu)$ par : μ' est *équivalente* à $h(\mu)$.

4– Classification des espaces de Lebesgue

Définition 4-1 : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ deux espaces probabilisés. On dit qu'ils sont *isomorphes modulo zéro* si il existe $\Omega_0 \in \mathcal{A}$, $\Omega'_0 \in \mathcal{A}'$, $\mu(\Omega_0) = \mu'(\Omega'_0) = 1$, et h une bijection bimesurable entre Ω_0 et Ω'_0, telle que $h(\mu) = \mu'$.

Théorème 4-2 : Plongement d'un espace de Lebesgue dans l'espace de Cantor
Soit $\mathcal{B}$ une base de l'espace de Lebesgue $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Construisons $\phi_{\mathcal{B}}$, $\mu_{\mathcal{B}}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{B}}$ comme en 2. Alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est isomorphe modulo zéro à $(\mathcal{C}, \mathcal{A}_{\mathcal{B}}, \mu_{\mathcal{B}})$.

Preuve : $\phi_{\mathcal{B}}$ vérifie bien sûr les hypothèses du théorème 3-5, et donc $\phi_{\mathcal{B}}$ est une bijection bimesurable entre Ω et $\phi_{\mathcal{B}}(\Omega)$. De plus, $\mu_{\mathcal{B}} = \phi_{\mathcal{B}}(\mu)$ et $\mu_{\mathcal{B}}\big(\phi_{\mathcal{B}}(\Omega)\big) = \mu(\Omega) = 1$. □

Dans tout ce qui suit, on se fixe un espace de Lebesgue $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.
Pour tout $a > 0$, $\big\{\omega \in \Omega /\ \mu(\{\omega\}) > a\big\}$ est fini, car μ est une mesure de probabilité. L'ensemble des points de mesure non nulle est donc au plus dénombrable, et on peut numéroter ces points de telle sorte que $\mu(\{\omega_1\}) \geq \mu(\{\omega_2\}) \geq \cdots$
Posons pour $n \geq 1$: $m_n = \mu(\{\omega_n\})$ ($m_n = 0$ s'il y a moins de n points de mesure non nulle). On a clairement :

$$m_0 \overset{\text{déf}}{=} 1 - \sum_{n\geq 1} m_n \geq 0.$$

Les m_n sont appelés les *invariants* de l'espace de Lebesgue $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Théorème 4-3 : *Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Lebesgue d'invariants m_n, $n \in \mathbb{N}$, alors il est isomorphe modulo zéro à l'espace de Lebesgue $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ obtenu de la façon suivante :*

- $\tilde{\Omega} = [0, m_0] \cup \bigcup_{n\geq 1} \{x_n\}$, *où* $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$,
- $\tilde{\mu}$ *est la mesure de Lebesgue habituelle sur* $[0, m_0]$, *et* $\tilde{\mu}(x_n) = m_n$,
- $\tilde{\mathcal{A}}$ *est la tribu borélienne complétée.*

En conséquence : deux espaces de Lebesgue sont isomorphes modulo zéro si, et seulement si, ils ont les mêmes invariants.

Preuve : Grâce au théorème 4-2, il suffit de prouver le résultat lorsque $\Omega = \mathcal{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Commençons par étudier le cas où $m_0 = 1$, *i.e.* lorsque la mesure μ est diffuse.
Notons λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1[$, et $\mathcal{L}$ la tribu des boréliens, complétée pour λ.
Pour tout $z = (z_0, \ldots, z_p) \in \mathcal{C}_p \stackrel{\text{déf}}{=} \{0,1\}^{\{0,\ldots,p\}}$, on va construire un intervalle $J(z) = [\alpha(z), \beta(z)[$ de mesure :

$$\beta(z) - \alpha(z) = \mu(Y_0 = z_0, \ldots, Y_p = z_p),$$

où Y_n est la projection sur la $n^{\text{ème}}$ coordonnée. Posons :

$$J((0)) = [\,0, \mu(Y_0 = 0)\,[$$

$$J((1)) = [\,\mu(Y_0 = 0), 1\,[$$

Supposons qu'on ait construit $J(z)$ pour tout $z \in \mathcal{C}_k$, $k \leq p$. Soit $z = (z_0, \ldots, z_{p+1})$ un élément de $\mathcal{C}_{p+1}$, et posons $\tilde{z} = (z_0, \ldots, z_p)$.
- Si $z_{p+1} = 0$, on définit alors :

$$\begin{aligned}
&\alpha(z) = \alpha(\tilde{z}), \\
&\beta(z) = \alpha(\tilde{z}) + \mu(Y_0 = z_0, \ldots, Y_p = z_p, Y_{p+1} = 0),
\end{aligned}$$

- et si $z_{p+1} = 1$, on définit :

$$\begin{aligned}
&\alpha(z) = \alpha(\tilde{z}) + \mu(Y_0 = z_0, \ldots, Y_p = z_p, Y_{p+1} = 0), \\
&\beta(z) = \beta(\tilde{z}).
\end{aligned}$$

Puis, pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$B_n = \bigcup_{\tilde{z} \in \mathcal{C}_{n-1}} J(\tilde{z}, 1).$$

On vérifie aisément la relation :

$$J(z_0, \ldots, z_n) = B_0^{z_0} \cap \cdots B_n^{z_n}.$$

Puis, on montre que :

$$\sup_{z \in \mathcal{C}_n} \lambda\big(J(z)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

En effet, si ce n'est pas le cas, on peut construire par récurrence une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda\big(J(y_0, \ldots, y_n)\big) \geq \varepsilon$, où ε est une constante strictement positive. Mais alors :

$$\begin{aligned}
0 = \mu(\{y\}) &= \lim_{n\to\infty}\searrow\ \mu(Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\searrow\ \lambda\big(J(Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n)\big) \cdots
\end{aligned}$$

Cette propriété prouve que les $J(z)$ séparent les points de $[0,1[$, et donc la famille $\mathcal{B} = (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $([0,1[, \mathcal{L}, \lambda)$. On dispose donc de $\phi_{\mathcal{B}} : [0,1[\longrightarrow \mathcal{C}$, et on vérifie que μ est la mesure image de λ par $\phi_{\mathcal{B}}$. $\phi_{\mathcal{B}}$ est alors un isomorphisme modulo zéro entre $([0,1[,\mathcal{L},\lambda)$ et $(\Omega = \mathcal{C},\mathcal{A},\mu)$.

On a donc déjà montré : *Tout espace de Lebesgue dont la mesure μ est diffuse est isomorphe modulo zéro à* $([0,1[,\mathcal{L},\lambda)$.

Voyons maintenant le cas général, où la mesure μ n'est plus supposée diffuse. Posons $\Omega_0 = \Omega \setminus \bigcup_{n\geq 1}\{\omega_n\}$. Le cas où $m_0 = \mu(\Omega_0) = 0$ étant trivial, on suppose que $m_0 > 0$. Soit $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} / A \subset \Omega_0\}$, et $\mu_0 = \frac{1}{m_0}\mu_{|\mathcal{A}_0}$. On vérifie alors que $(\Omega_0,\mathcal{A}_0,\mu_0)$ est un espace de Lebesgue, dont la mesure μ_0 est diffuse : il est donc isomorphe modulo zéro à $([0,1[,\mathcal{L},\lambda)$. Il est clair que si on ne normalise pas $\mu_{|\mathcal{A}_0}$, on obtient un isomorphisme entre Ω_0 et $[0,m_0[$, et donc Ω est isomorphe modulo zéro à $\tilde{\Omega}$. □

Bibliographie :

[1] V.A. ROKHLIN, On the fundamental ideas of measure theory, *AMS Translations Series One* **10**, (1962), 2–53, (première publication en russe : 1949).

[2] J. HAEZENDONCK, Abstract Lebesgue-Rokhlin spaces, *Bull. soc. math. Belgique* **25**, (1973), 243–258.

[3] D.J.RUDOLPH, Fundamentals of Measurable Dynamics – Ergodic Theory on Lebesgue Spaces, *Clarendon Press, Oxford*, (1990), 9-26.