JACQUES AZÉMA
THIERRY JEULIN
FRANK B. KNIGHT
MARC YOR

Le théorème d'arrêt en une fin d'ensemble prévisible

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 27 (1993), p. 133-158
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__133_0>

Le théorème d'arrêt en une fin d'ensemble prévisible

J. Azéma[1], *T. Jeulin*[2], *F. Knight*[3], *M. Yor*[1]

(1) *Laboratoire de Probabilités - Université Paris VI - 4, place Jussieu - Tour 56 - 3ème Etage - Couloir 56-66 - 75272 PARIS CEDEX 05*

(2) *Université Paris VII, CNRS URA 1321 - 4, place Jussieu Tour 45 - 5ème Etage - Couloir 45-55 - 75251 PARIS CEDEX 05*

(3) *University of Illinois - Department of Mathematics - 273 Altgeld Hall - 1409 West Green Street - Urbana, IL 61801 - U.S.A.*

1. Présentation de l'étude ; motivations.

(1.1) Rappels des définitions de certaines tribus.

Soit $(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ un espace de probabilité vérifiant les conditions habituelles. On définit $\mathcal{F}_{0-} = \mathcal{F}_0$. A toute variable aléatoire L positive, finie, on associe les trois tribus $\mathcal{F}_L^-$, $\mathcal{F}_L$ et $\mathcal{F}_L^+$, qui ont pour vocation respective de décrire mathématiquement le passé strict, le passé et le passé au sens large, relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)$, jusqu'à l'instant L ; de façon précise, on définit :

$$\mathcal{F}_L^- = \sigma\{z_L \ ; \ z \text{ processus } (\mathcal{F}_t) \text{ prévisible}\}$$

$$\mathcal{F}_L = \sigma\{z_L \ ; \ z \text{ processus } (\mathcal{F}_t) \text{ optionnel}\}$$

$$\mathcal{F}_L^+ = \sigma\{z_L \ ; \ z \text{ processus } (\mathcal{F}_t) \text{ progressivement mesurable}\}.$$

(voir, par exemple, [5], paragraphe 25, p. 141).

Dans le cas où toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale est continue, les tribus prévisible et optionnelle sont égales, et on a donc : $\mathcal{F}_L^- = \mathcal{F}_L$; cette égalité entre tribus a également lieu lorsque L évite les $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt, c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } T \ (\mathcal{F}_t) \text{ temps d'arrêt, on a : } P(L = T) = 0.$$

On note ces hypothèses respectivement (H_c) et (H_e) ; lorsque l'une d'elles est en vigueur, L est en fait une fin d'ensemble $(\mathcal{F}_t)$ prévisible.

Par contre, il se peut que, même lorsque ces hypothèses sont en vigueur, on ait néanmoins : $\mathcal{F}_L \subsetneq \mathcal{F}_L^+$;

c'est le cas lorsque $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration du mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ et $L = g_T \equiv \sup\{u < T : B_u = 0\}$, où T est un temps d'arrêt régulier pour (B_t), c'est-à-dire que : $(B_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est uniformément intégrable. En effet, dans ce cas, la variable $1_{(B_T>0)}$ est $\mathcal{F}_L^+$ mesurable, mais n'est pas $\mathcal{F}_L$-mesurable, et on a :

$$\mathcal{F}_L^+ = \mathcal{F}_L \vee \sigma(B_T > 0).$$

(voir, par exemple, [2], paragraphe 3.8).

(1.2) Une équivalence remarquable.

L désigne dorénavant une fin d'ensemble $(\mathcal{F}_t)$ optionnel finie ; on supposera, ce qui est raisonnablement général, que L évite les temps d'arrêt, c'est-à-dire que l'hypothèse (H_e) est en vigueur. On se propose en particulier dans ce travail de caractériser les variables $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$ telles que, si (X_t) désigne la $(\mathcal{F}_t)$ martingale admettant X pour variable terminale, on ait l'une des 3 propriétés suivantes :

(A) $X_L = E[X|\mathcal{F}_L]$; **(A_+)** $X_L = E[X|\mathcal{F}_L^+]$; **(B)** $E[X|\mathcal{F}_L^+] = E[X|\mathcal{F}_L]$.

Toutefois, c'est principalement le souci de comprendre profondément le contenu du Théorème 1 ci-dessous qui est à l'origine de ce travail.

Théorème 1 (cf. [2], Proposition 3.10.1 et également [3], Théorème 9.1, p.314)
Soit H un fermé $(\mathcal{F}_t)$ optionnel, de fin L p.s. finie ; on suppose que L évite les $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt, i.e : (H_e) est vérifiée ; $\tilde{H} = \{t : P(t \geq L|\mathcal{F}_t) = 0\}$ est l'ombre optionnelle[1] de L.
Soit (X_t) une $(\mathcal{F}_t)$ martingale uniformément intégrable.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $X_L = 0$ P-*p.s.* ; *2)* $E[X_\infty|\mathcal{F}_L] = 0$ *p.s.* ;
3) (X_t) *s'annule sur* H ; *4)* (X_t) *s'annule sur* $\tilde{H}$.

(1.3) Traduction du Théorème 1 en termes de grossissement.

Notons $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ la plus petite filtration[2] qui contienne $(\mathcal{F}_t)$, et fasse de L un temps d'arrêt. Sous l'hypothèse (H_e), toujours supposée en vigueur, L est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ temps d'arêt totalement inaccessible.
Pour traduire le Théorème 1 en termes de grossissement, nous avons besoin du

---

[1] Cette terminologie est empruntée à Dellacherie - Maisonneuve - Meyer ([5] paragraphe 15, p.135).

[2] De nombreuses filtrations apparaissent au cours de l'article. Pour faciliter la lecture, elles sont cataloguées dans l'appendice D.

Lemme : *A une variable* $Y \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$, *on associe d'une part la* $(\mathcal{F}_t)$ *martingale* (Y_t), *et d'autre part la* $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ *martingale* $(\hat{Y}_t)$, *qui ont toutes deux* Y *pour variable terminale. On a alors :*

a) pour tout $t \le \infty$, $\mathcal{F}^-_{t\wedge L} = \hat{\mathcal{F}}^-_{t\wedge L}$; *b)* $Y_L \underset{(i)}{=} Y_{L-} \underset{(ii)}{=} \hat{Y}_{L-}$ *p.s. ;*

Démonstration : a) D'après Jeulin ([6], Proposition 5.3, p.75), ou [5], (20.2) p.138), à tout processus $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ prévisible $(\hat{z}_t)$, on peut associer deux processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisibles $(z_t^{(-)})$ et $(z_t^{(+)})$ tels que :

$$\hat{z}_t = z_t^{(-)} 1_{(t\le L)} + z_t^{(+)} 1_{(L<t)}.$$

En particulier, on a : $\hat{z}_{t\wedge L} = z^{(-)}_{t\wedge L}$, ce qui prouve que : $\hat{\mathcal{F}}^-_{t\wedge L} \subseteq \mathcal{F}^-_{t\wedge L}$, l'inclusion inverse étant immédiate.

b) L'égalité p.s. de Y_L et Y_{L-} découle de l'hypothèse (H_e). En outre, les tribus $\hat{\mathcal{F}}_t$ et $\mathcal{F}_t$ ayant même trace sur $(t < L)$, on peut écrire :

$$\hat{Y}_t 1_{(t<L)} = \frac{E[Y 1_{(t<L)} | \mathcal{F}_t]}{P(t<L | \mathcal{F}_t)} 1_{(t<L)}.$$

On prend des versions continues à droite (y_t) et (Z_t) du numérateur et du dénominateur figurant dans le membre de droite. On déduit de l'hypothèse (H_e) que $Z_{L-} = Z_L = 1$, P-p.s. D'autre part, on a :

$$y_t = Y_t - E[Y 1_{(L\le t)} | \mathcal{F}_t] \equiv Y_t - y'_t ,$$

et, d'après le résultat précédent, on a : $y'_{L-} = 0$ lorsque Y est bornée, et, par convergence en probabilité (uniformément en t), pour toute variable Y de $L^1(\mathcal{F}_\infty)$. □

A la suite du Lemme, nous pouvons réécrire l'équivalence entre les assertions 1) et 2) du Théorème 1 de la façon suivante :

si $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$, alors : *1')* $X_{L-} = 0$ est équivalent à : *2')* $E[X | \hat{\mathcal{F}}^-_L] = 0$.

Lorsque L est une fin d'ensemble $(\mathcal{F}_t)$ prévisible, nous pouvons nous débarrasser de l'hypothèse (H_e), et montrer néanmoins que l'équivalence de 1') et 2') ci- dessus est conservée pour l'essentiel. On a en effet le

Théorème 1' : *Soit* L *la fin d'un ensemble prévisible, et* $X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t]$ *une martingale uniformément intégrable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $X_{L-} = 0$ *sur* $(L > 0)$; *(ii)* $E[X_\infty | \mathcal{F}^-_L] = 0$ *sur* $(L > 0)$;

(iii) le processus $(X_{t-} ; t \ge 0)$ *s'annule sur l'ombre prévisible de* L *i.e. sur* $\{t ; P(L \ge t | \mathcal{F}_{t-}) = 0\}$.

Démonstration : On recopie la démonstration du Théorème 9.1 de [3], p. 314, pour montrer que (ii) $\Longrightarrow$ (i), puis que (ii) $\Longrightarrow$ (iii) ; (iii) $\Longrightarrow$ (i) est évident ; pour montrer que (i) $\Longrightarrow$ (ii), on suit toujours [3] en appelant maintenant H le support gauche de la projection duale prévisible (A_t) de $1_{(0<L\le t)}$; $(X_{t-}\ ,\ t \ge 0)$ est nul sur H, et le théorème de balayage que nous démontrons dans l'appendice B nous indique que, pour tout processus (z_t) prévisible borné,

$$(z_{g_t} X_t) \quad \text{est une martingale uniformément intégrable.}$$

On a donc : $E[z_L\ X_\infty] = E[z_0\ X_0]$, ce qui s'écrit encore : $E[z_L\ X_\infty\ 1_{(L>0)}] = 0$, qui entraîne visiblement (ii). □

Si T est un temps d'arrêt fini, il peut être considéré comme la fin de l'ensemble prévisible $[0,T]$; on obtient ainsi le

Théorème 2 : *Considérons, dans une filtration* $(\mathcal{G}_t)$, *un* $(\mathcal{G}_t)$ *temps d'arrêt* T *et* (ξ_t) *une* $(\mathcal{G}_t)$ *martingale uniformément intégrable.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $\xi_{T-} = 0$ *sur* $(T > 0)$;

2) pour tout $t < T$, $\xi_t = 0$;

3) la martingale $(\xi_{t\wedge T},\ t \ge 0)$ *est de la forme :* $v\ 1_{(T\le t)}$, *avec* $v \in L^1(\mathcal{G}_T)$;

4) $E[\xi_\infty | \mathcal{G}_T^-] = 0$, *sur* $(T > 0)$.

Remarque 2.1 : L'implication : 3) $\Longrightarrow$ 4) est bien connue ; elle sert en particulier de point de départ à Le Jan [8] pour la décomposition des martingales de carré intégrable en somme directe de martingales strictes, et martingales de sauts.

Remarque 2.2 : Si L est la fin d'un ensemble prévisible, et si $\mathcal{F}_L = \mathcal{F}_L^-$, on peut rapprocher le Théorème 1' ci-dessus du Théorème 9 de [3], ce qui conduit à l'équivalence :

$$\{(X_L = 0) \ \text{sur}\ (L > 0)\} \Longleftrightarrow \{(X_{L-} = 0) \ \text{sur}\ (L > 0)\}$$

pour toute martingale uniformément intégrable.

On se trouve dans cette situation dans les deux cas suivants :

a) L est une variable honnête qui évite les temps d'arrêt ;

b) L est un temps d'arrêt T pour lequel : $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_T^-$, par exemple un temps de saut d'un processus de Poisson.

Remarquons enfin que, si l'on supprime l'hypothèse $\mathcal{F}_L = \mathcal{F}_L^-$, on a seulement l'implication : $\{X_L = 0 \ \text{sur}\ (L > 0)\} \Longrightarrow \{X_{L-} = 0 \ \text{sur}\ (L > 0)\}$ pour toute martingale uniformément intégrable, et toute fin de prévisible L.

2. Quelques résultats de représentation de martingales.

Nous allons, dans le paragraphe 3, résoudre les équations (A), (A_+) et (B), lorsque $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration du mouvement brownien réel $(B_t, t \ge 0)$, et L une fin d'ensemble $(\mathcal{F}_t)$ prévisible qui évite les temps d'arrêt. Nous nous plaçons dorénavant dans ce cadre. $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ désigne, comme en (1.3), la plus petite filtration qui contienne $(\mathcal{F}_t)$, et qui fasse de L un temps d'arrêt. Nous exprimerons, faute de mieux, nos résultats en termes de certaines propriétés des $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingales. Les résultats du paragraphe 3 découleront très simplement du Théorème 3 ci-dessous, lequel donne une décomposition importante des $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingales de carré intégrable.

Nous rappelons tout d'abord quelques résultats essentiels de la théorie du grossissement :

toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale (X_t) est une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ semimartingale dont la décomposition canonique peut s'écrire à l'aide de la $(\mathcal{F}_t)$ surmartingale :

$$Z_t = P(L > t \,|\, \mathcal{F}_t) = M_t - A_t \,,$$

où $(A_t)_{t\ge 0}$ désigne le processus croissant, continu, qui est la projection duale prévisible de $\{1_{(0<L\le t)} \,;\, t \ge 0\}$ dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$.

La décomposition canonique de (X_t), dans la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, est :

$$X_t = \tilde{X}_t + \int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle X,M\rangle_s}{Z_s} - 1_{(L\le t)} \int_L^t \frac{d\langle X,M\rangle_s}{1-Z_s} \,,$$

où $(\tilde{X}_t \,;\, t \ge 0)$ est une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale locale.

En particulier, si $X = B$, $(\tilde{B}_t, t \ge 0)$ est un $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ mouvement brownien.

Nous pouvons maintenant énoncer le :

Théorème 3 : *Toute $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale de carré intégrable $(\hat{X}_t)_{t\ge 0}$, nulle en 0, peut se décomposer de manière unique en la somme de quatre martingales de carré intégrable, orthogonales dans la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)$:*

$$\hat{X}_t = \hat{X}_t^{(1)} + \hat{X}_t^{(2)} + \hat{X}_t^{(3)} + \hat{X}_t^{(4)} \qquad (t \ge 0),$$

ces martingales s'écrivant sous les formes suivantes :

$$\text{(2.a)} \quad \begin{aligned} &\hat{X}_t^{(1)} = \int_0^{t\wedge L} J_s^{(1)}\, d\tilde{B}_s \quad ; \quad \hat{X}_t^{(2)} = 1_{(L\le t)} \int_L^t J_s^{(2)} d\tilde{B}_s \\ &\hat{X}_t^{(3)} = J_L^{(3)} 1_{(L\le t)} - \int_0^{t\wedge L} J_s^{(3)}\, dA_s \quad ; \quad \hat{X}_t^{(4)} = v\, 1_{(L\le t)} \end{aligned} \quad ;$$

où $J^{(i)}$, $i = 1,2,3$, sont trois processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisibles qui satisfont les conditions d'intégrabilité suivantes :

$$E\left[\int_0^\infty (J_s^{(1)})^2 Z_s \, ds\right] < \infty \; ; \; E\left[\int_0^\infty (J_s^{(2)})^2 (1 - Z_s) \, ds\right] < \infty \; ; \; E\left[\int_0^\infty (J_s^{(3)})^2 \, dA_s\right] < \infty$$

et $v \in L^2(\mathcal{F}_L^+)$ *satisfait :* $\quad E[v|\mathcal{F}_L] = 0.$

Démonstration : a) Rappelons d'abord le résultat général suivant de Barlow ([4] ; (a) et (b)) repris par Jeulin ([6], Théorème (5,12), p. 82) :
l'espace des martingales de carré intégrable dans $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ est engendré, au sens des espaces stables de Kunita-Watanabe par les 4 familles (orthogonales entre elles puisque L évite les $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt) suivantes :

$$X_{t\wedge L} - \int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle X,M\rangle_s}{Z_s} \quad ; \quad 1_{(L\le t)} \left(X'_t - X'_L + \int_L^t \frac{d\langle X',M\rangle_s}{1 - Z_s}\right)$$

(2.b)

$$J_L^{(3)} 1_{(L\le t)} - \int_0^{t\wedge L} J_s^{(3)} \, dA_s \quad ; \quad v \, 1_{(L\le t)},$$

où, d'une part, X et X' varient parmi les $(\mathcal{F}_t)$ martingales de carré intégrable, et, d'autre part, $J^{(3)}$ est un processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible tel que :

$E[(J_L^{(3)})^2] < \infty$; enfin, $\quad v \in L^2(\mathcal{F}_L^+)$ et satisfait : $E[v|\mathcal{F}_L] = 0$.

b) En utilisant la représentation des $(\mathcal{F}_t)$ martingales X et X' comme intégrales stochastiques par rapport au mouvement brownien B, on voit que les martingales de la première et de la seconde famille figurant en *(2.b)* s'écrivent sous la forme : $\quad \int_0^{t\wedge L} J_s \, d\tilde{B}_s \quad ; \; 1_{(L\le t)} \int_L^t J'_s \, d\tilde{B}_s$,

où J et J' sont deux processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisibles tels que :

$$E\left[\int_0^\infty J_s^2 \, ds\right] < \infty \quad \text{et} \quad E\left[\int_0^\infty (J'_s)^2 \, ds\right] < \infty .$$

(on pourra remarquer que ces conditions sont plus restrictives que celles, concernant $J^{(1)}$ et $J^{(2)}$, qui figurent dans l'énoncé du Théorème 3).

c) On déduit ensuite de la représentation des processus $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ prévisibles, rappelée dans la démonstration du Lemme ci-dessus, que l'ensemble *(2.b)* des 4 familles de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingales est total dans l'ensemble des $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingales de carré intégrable.

d) Pour obtenir finalement la représentation des $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingales de carré intégrable énoncée dans le Théorème, il nous suffit maintenant de considérer l'espace de Hilbert des quadruplets $\quad \vartheta = (J^{(1)},J^{(2)},J^{(3)},v)$ (avec les hypothèses de mesurabilité évidentes) pour le produit scalaire :

$$\langle\!\langle \vartheta,\tilde{\vartheta} \rangle\!\rangle = E\left[\int_0^\infty ds \; J_s^{(1)} \tilde{J}_s^{(1)} Z_s\right] + E\left[\int_0^\infty ds \; J_s^{(2)} \tilde{J}_s^{(2)} (1-Z_s)\right] + E\left[\int_0^\infty J_s^{(3)} \tilde{J}_s^{(3)} dA_s\right] + E[v\tilde{v}]$$

et de remarquer que l'application :

$$\vartheta \longrightarrow \hat{X}^{\vartheta} \equiv \hat{X}^{(1)} + \hat{X}^{(2)} + \hat{X}^{(3)} + \hat{X}^{(4)}$$

(avec les notations de l'énoncé du Théorème) respecte les structures d'espaces de Hilbert, entre d'une part les processus ϑ, et d'autre part, les $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingales de carré intégrable. □

En conservant les notations en vigueur dans le Lemme ci-dessus, nous associons à une variable $X \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ d'une part la $(\mathcal{F}_t)$ martingale $(X_t)_{t\geq 0}$, et d'autre part la $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale $(\hat{X}_t)_{t\geq 0}$, qui ont pour variable terminale commune X.

Grâce au Théorème 3, on peut exprimer les variables :

$$E[X|\mathcal{F}_L^+] \quad , \quad E[X|\mathcal{F}_L] \quad , \quad \hat{X}_{L-} \text{ et } X_L$$

à l'aide de la décomposition de $(\hat{X}_t, t \geq 0)$. On obtient ainsi le

Corollaire 3.1 : *Avec les notations et hypothèses du Théorème 3, on a :*

(2.c) $$E[X|\mathcal{F}_L^+] \underset{(i)}{=} \hat{X}_L \underset{(ii)}{=} \hat{X}_\infty^{(1)} + \hat{X}_\infty^{(3)} + \hat{X}_\infty^{(4)}$$

(2.d) $$E[X|\mathcal{F}_L] \underset{(i)}{=} E[\hat{X}_L|\mathcal{F}_L] \underset{(ii)}{=} \hat{X}_\infty^{(1)} + \hat{X}_\infty^{(3)}$$

(2.e) $$X_L \underset{(i)}{=} \hat{X}_{L-} \underset{(ii)}{=} \hat{X}_\infty^{(1)} + \hat{X}_{L-}^{(3)} .$$

Démonstration : a) L'égalité *(2.c.i)* découle de ce que : $\mathcal{F}_L^+ = \hat{\mathcal{F}}_L$; en conséquence, $\hat{X}_L = E[X|\hat{\mathcal{F}}_L]$ est donnée par la formule *(2.c.ii)*, car les variables : $\hat{X}_\infty^{(i)}$ $(i = 1,3,4)$ sont $\hat{\mathcal{F}}_L$ mesurables, et $E[\hat{X}_\infty^{(2)}|\hat{\mathcal{F}}_L] = \hat{X}_L^{(2)} = 0$.

b) L'égalité *(2.d.i)* découle de *(2.c.i)*, et l'égalité *(2.d.ii)* de *(2.c.ii)* et de la propriété : $\hat{X}_\infty^{(4)} = v$ est orthogonale à $L^2(\mathcal{F}_L)$.

c) L'égalité *(2.e.i)* a été montrée dans le Lemme, et *(2.e.ii)* découle de *(2.d.ii)*. □

3. Résolution des équations (A), (A_+) et (B).

Grâce au Corollaire du Théorème 3, ces problèmes sont maintenant aisément résolus, au moins de manière théorique.

Théorème 4 : *Soit* $X \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$. *Alors :*

1) X est solution de (A) si et seulement si :

$$X = \hat{X}_\infty^{(1)} + \hat{X}_\infty^{(2)} + \hat{X}_\infty^{(4)} \text{ , c'est-à-dire : } \hat{X}_\infty^{(3)} = 0.$$

2) X est solution de (A_+) *si, et seulement si :*

$$X = \hat{X}_\infty^{(1)} + \hat{X}_\infty^{(2)} \text{ , c'est-à-dire : } \hat{X}_\infty^{(3)} = \hat{X}_\infty^{(4)} = 0.$$

3) X *est solution de* (B) *si, et seulement si :*

$$X = \hat{X}^{(1)}_{\infty} + \hat{X}^{(2)}_{\infty} + \hat{X}^{(3)}_{\infty} \text{ , } \textit{c'est-à-dire :} \ \hat{X}^{(4)}_{\infty} = 0.$$

<u>**Commentaires**</u> : On a, de manière générale, avec les notations du Théorème 3 :

$$\hat{X}_L - \hat{X}_{L-} = J^{(3)}_L + v.$$

Ceci permet de présenter les assertions du Théorème 4 de la façon équivalente suivante :

1) X satisfait (A) ssi : $J^{(3)}_L = 0$, ou encore
ssi : le saut de $\hat{X}$ (en L) est orthogonal à $L^2(\mathcal{F}_L)$,

ou encore, ssi : $$E[X|\mathcal{F}_L] = \int_0^L J^{(1)}_s \, d\tilde{B}_s \ ;$$

2) X satisfait (A_+) ssi : $J^{(3)}_L = v = 0$, ou encore,

ssi : $(\hat{X}_t)$ est continue, ou encore, ssi : $E[X|\mathcal{F}^+_L] = \int_0^L J^{(1)}_s \, d\tilde{B}_s$.

3) X satisfait (B) ssi le saut de $\hat{X}$ (en L) est $\mathcal{F}_L$-mesurable.

Bien que satisfaisantes d'un point de vue théorique, ces différentes caractérisations des solutions de (A), (A_+) ou (B) peuvent être difficiles à utiliser "en pratique", comme nous le verrons dans les deux paragraphes suivants.

4. <u>Etude de certaines composantes de la filtration</u> $(\hat{\mathcal{F}}_t)$.

(4.1) A la suite du paragraphe 3, il semble naturel de chercher à caractériser, de façon aussi simple que possible, les variables X de $L^2(\mathcal{F}_\infty)$ qui peuvent s'écrire sous la forme :

(4.a) $$c + \int_0^L J^{(1)}_s \, d\tilde{B}_s \ .$$

Il est alors tentant de penser que toute variable mesurable par rapport à $\sigma\{B_{s\wedge L} \ ; \ s \geq 0\}$ puisse se représenter sous la forme *(4.a)*. Toutefois, un instant de réflexion montre que L est un temps d'arrêt totalement inaccessible de la filtration naturelle du processus $(B_{s\wedge L} \ , \ s \geq 0)$; il existe donc, dans cette filtration, des martingales purement discontinues. L'objet de ce paragraphe est d'étudier précisément cette filtration.

<u>**Théorème 5**</u> : *1) Pour tout* $t > 0$, *on a :*

(4.b) $$\mathcal{F}^-_{(t\wedge L)} = \hat{\mathcal{F}}^-_{(t\wedge L)} = \sigma\{B_{s\wedge L} \ ; \ s \leq t\}$$

(toutes les tribus sont $(\mathcal{F}_\infty, P)$ *complétées).*

2) En conséquence, la filtration naturelle de $\{B_{t\wedge L} \ ; \ t \geq 0\}$ *est*

$$\{\mathcal{H}_t \overset{\text{déf}}{=} \bigcap_{a>0} \mathcal{F}^-_{((t+a)\wedge L)} \ ; \ t \geq 0\}.$$

Cette filtration $(\mathcal{H}_t, t \geq 0)$ *est, en général, strictement contenue dans* $\{\mathcal{K}_t \overset{\text{déf}}{=} \hat{\mathcal{F}}_{(t\wedge L)}\ , t \geq 0\}$ *, car :*

(4.c) $\quad \mathcal{H}_\infty = \hat{\mathcal{F}}_L^- = \mathcal{F}_L$ *, et* $\qquad$ *(4.d)* $\quad \mathcal{K}_\infty = \hat{\mathcal{F}}_L = \mathcal{F}_L^+$.

Démonstration : a) L'égalité : $\mathcal{F}_{t\wedge L}^- = \hat{\mathcal{F}}_{t\wedge L}^-$ figurant en *(4.b)* n'est autre que le point a) du Lemme ci-dessus.

b) Il est évident que la tribu $\sigma\{B_{s\wedge L}\ ;\ s \leq t\}$ est contenue dans $\mathcal{F}_{t\wedge L}^-$. Inversement, pour montrer que $\mathcal{F}_{t\wedge L}^- = \sigma\{B_{s\wedge L}\ ;\ s \leq t\}$, il suffit de prouver que si $\Phi_t \equiv f(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_k})\ 1_{(t_k < t)}$, où $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, et f : $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, alors $\Phi_{t\wedge L}$ est mesurable par rapport à $\sigma\{B_{s\wedge L}\ ;\ s \leq t\}$. Or, on a : $\quad \Phi_{t\wedge L} \equiv f(B_{t_1\wedge L}, \ldots, B_{t_k\wedge L})\ 1_{(t_k < t\wedge L)}$

et il reste donc à montrer que $(t\wedge L)$ est mesurable par rapport à la tribu $\sigma(B_{s\wedge L}\ ;\ s \leq t)$. Ceci découle de ce que $(t\wedge L)_{t\geq 0}$ est la variation quadratique de la $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ semimartingale $(B_{t\wedge L})_{t\geq 0}$. □

Corollaire 5.1 : *La décomposition canonique de* $(B_{t\wedge L}\ ;\ t \geq 0)$ *dans la filtration* $(\hat{\mathcal{F}}_t)$, *soit :*

$$B_{t\wedge L} = \tilde{B}_{t\wedge L} + \int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle B, M\rangle_s}{Z_s}$$

est également la décomposition canonique de $(B_{t\wedge L}\ ;\ t \geq 0)$ *dans sa filtration naturelle* $(\mathcal{H}_t\ ;\ t \geq 0)$.

Démonstration : Il découle de *(4.b)* que, pour t fixé, la variable :

$\int_0^{t\wedge L} \frac{1}{Z_s}\, d\langle B,M\rangle_s$ est $\sigma(B_{s\wedge L}\ ;\ s \leq t)$ mesurable, et est donc $\mathcal{H}_t$-mesurable.

Ainsi, $(\tilde{B}_{t\wedge L}\ ;\ t \geq 0)$ est une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale, qui est $(\mathcal{H}_t)$ adaptée ; c'est donc une $(\mathcal{H}_t)$ martingale. □

Nous déduisons maintenant du Théorème 5 la structure des $(\mathcal{H}_t)$ martingales, resp : des $(\mathcal{K}_t)$-martingales, de carré intégrable.

Corollaire 5.2 : *1) Un processus* $(Y_t, t \geq 0)$ *est une* $(\mathcal{K}_t)$ *martingale de carré intégrable, resp : une* $(\mathcal{H}_t)$ *martingale de carré intégrable, nulle en 0, ssi c'est une* $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ *martingale de carré intégrable, nulle en 0, qui se représente (avec les notations du Théorème 3) sous la forme :*

(4.d) $$Y_t = \hat{X}_t^{(1)} + \hat{X}_t^{(3)} + \hat{X}_t^{(4)} \qquad (t \geq 0)$$

resp : sous la forme :

(4.e) $$Y_t = \hat{X}_t^{(1)} + \hat{X}_t^{(3)} \qquad (t \geq 0).$$

2) En conséquence, les deux filtrations $(\mathcal{H}_t)$ et $(\mathcal{K}_t)$ sont identiques ssi : $\mathcal{F}_L^+ = \mathcal{F}_L$.

Démonstration : a) On obtient la $(\mathcal{K}_t)$ martingale, resp : $(\mathcal{H}_t)$ martingale, de carré intégrable, nulle en 0, la plus générale, en projetant sur la filtration $(\mathcal{K}_t)$, resp : sur la filtration $(\mathcal{H}_t)$, la $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale générique, de carré intégrable, nulle en 0. Si $(\hat{X}_t)$ est une telle martingale, qui peut être représentée, d'après le Théorème 3, comme :

$$\hat{X}_t = \sum_{l=1}^{4} \hat{X}_t^{(l)},$$

on a :

(4.f) $$E[\hat{X}_t|\mathcal{K}_t] = \hat{X}_t^{(1)} + \hat{X}_t^{(3)} + \hat{X}_t^{(4)} \quad \text{et :} \quad E[\hat{X}_t|\mathcal{H}_t] = \hat{X}_t^{(1)} + \hat{X}_t^{(3)}.$$

En effet, on a, d'une part : $\mathcal{K}_t \subseteq \mathcal{K}_\infty = \mathcal{F}_L^+$, et $E[\hat{X}_t^{(2)}|\mathcal{F}_L^+] = 0$, et, d'autre part, pour terminer la démonstration de *(4.f)*, il nous suffit de démontrer que, pour t fixé :

(4.g.i) *les variables $\hat{X}_t^{(1)}$ et $\hat{X}_t^{(3)}$ sont $\mathcal{H}_t$ mesurables,*

et

(4.g.ii) *la variable $\hat{X}_t^{(4)}$ est $\mathcal{K}_t$ mesurable, et* $E[\hat{X}_t^{(4)}|\mathcal{H}_t] = 0$.

Pour démontrer *(4.g.i)*, nous utiliserons plusieurs fois la remarque suivante, qui découle immédiatement de la définition de la filtration $(\mathcal{H}_t)$:
si (U_t) est un processus $(\mathcal{F}_t)$ prévisible, $(U_{t\wedge L})_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{H}_t)$ prévisible.
En utilisant la représentation des variables $\hat{X}_t^{(1)}$ et $\hat{X}_t^{(3)}$ donnée dans le Théorème 3, il nous reste, pour démontrer *(4.g.i)* à prouver que la variable $J_L^{(3)} 1_{(L\leq t)}$ est $\mathcal{H}_t$ mesurable. Or, on a :

$$J_L^{(3)} 1_{(L\leq t)} = J_{t\wedge L}^{(3)} 1_{(L\leq t)}, \text{ et } t \longrightarrow t\wedge L \text{ est } (\mathcal{H}_t) \text{ prévisible,}$$

ce qui signifie que L est un $(\mathcal{H}_t)$ temps d'arrêt.

Nous prouvons maintenant *(4.g.ii)* en remarquant, d'une part, que :
$\hat{\mathcal{F}}_L = \mathcal{F}_L^+$, $\hat{\mathcal{F}}_{t\wedge L} = \hat{\mathcal{F}}_L \cap \hat{\mathcal{F}}_t$ si bien que $\hat{X}_t^{(4)} = v\, 1_{(L\leq t)}$ est $\mathcal{K}_t$ mesurable ;
d'autre part, comme $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{F}_L^-$, on a, pour toute variable H_t bornée et $\mathcal{H}_t$ mesurable : $$E[H_t\, v\, 1_{(L\leq t)}] = 0, \quad \text{car :} \quad E[v|\mathcal{F}_L^-] = 0 \;;$$
nous avons ainsi montré complètement *(4.g.ii)*.

(4.2) Dans l'esprit du paragraphe (4.1), il est également naturel d'étudier la richesse de la tribu engendrée par $(\tilde{B}_s)_{s\geq 0}$. Cette tribu n'est pas égale (même après adjonction d'ensembles négligeables) à $\mathcal{F}_\infty \equiv \sigma\{B_s, s \geq 0\}$. De façon générale, nous chercherons à décrire précisément la filtration naturelle

$(\mathcal{F}_t)$ de $(\tilde{B}_t)$, et surtout ce qu'il faut lui ajouter pour retrouver $(\hat{\mathcal{F}}_t)$; pour l'instant, nous montrons le

Théorème 6 : *1) La variable* A_∞ *est une variable exponentielle de paramètre* 1.

2) La tribu $\mathcal{F}_\infty$ *est indépendante de la variable* A_∞.

3) L *n'est pas mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_\infty$.

Démonstration : 1) La première assertion est dûe à Azéma [1] ; voir également ([5], paragraphe 89, p. 197) et ([6], Proposition (3,28), p. 58 et 59).

2) Pour être complets, nous donnons maintenant une démonstration simultanée des assertions 1) et 2).

Remarquons que, si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction borélienne bornée, et si l'on pose : $F(x) = \int_0^x dy\, f(y)$, alors, la variable :

$$(4.h) \qquad f(A_\infty) - F(A_\infty) = \int_0^\infty f(A_s)\, d\mu_s \quad \left(\text{on a posé : } \mu_t \overset{\text{déf}}{=} 1_{(L\le t)} - A_t\right)$$

est la variable terminale d'une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale de la troisième famille qui figure en *(2.a)* ; en conséquence, cette variable est orthogonale à n'importe quelle variable terminale d'une martingale de la première famille, ou de la seconde famille, figurant en *(2.a)*.

Or, toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale est une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale, et se décompose en la somme d'une martingale de la première famille et d'une martingale de la seconde famille. On a donc, finalement :

$$E[f(A_\infty) - F(A_\infty) | \mathcal{F}_\infty] = 0,$$

d'où l'on déduit que, conditionnellement à $\mathcal{F}_\infty$, la variable A_∞ suit la loi exponentielle de paramètre 1 ; en conséquence, elle est indépendante de $\mathcal{F}_\infty$.

3) Du fait que toute $(\mathcal{F}_t)$ martingale est une $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale, on déduit en particulier que : $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_\infty \cap \hat{\mathcal{F}}_t$.

En conséquence, si L était une variable $\mathcal{F}_\infty$ mesurable, on aurait pour tout t : $(L \le t) \in \mathcal{F}_t$; ainsi L serait un temps d'arrêt (et donc un temps d'arrêt prévisible) de $(\mathcal{F}_t)$, et donc de $(\hat{\mathcal{F}}_t)$; or, L est totalement inaccessible dans $(\hat{\mathcal{F}}_t)$. L n'est donc pas $\mathcal{F}_\infty$-mesurable. □

Les assertions du Théorème 6 suggèrent plusieurs questions, parmi lesquelles :

a) Posons : $\mathcal{F}_t^{(A_\infty)} \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_t \vee \sigma(A_\infty)$ $\quad (t \le \infty)$. A-t-on : $\mathcal{F}_\infty^{(A_\infty)} = \hat{\mathcal{F}}_\infty$?

b) Quelle est la loi de L conditionnellement à $\mathcal{F}_\infty$?

c) Désignons par $(\mathcal{F}^*_t)_{t\ge0}$ la plus petite filtration qui contienne $(\mathcal{F}_t)$, et qui fasse de L un temps d'arrêt. Cette filtration $(\mathcal{F}^*_t)$ est-elle égale à $(\hat{\mathcal{F}}_t)$?

Nous ne savons pas répondre à ces questions dans le cas général, mais nous y répondrons complètement dans les études d'exemples qui constituent la suite de notre article. Notons toutefois les résultats partiels suivants :

Proposition 1 : *Soit L une fin de prévisible évitant les temps d'arrêt.*

Soit f borélienne bornée ; on pose : $\bar{f}(x) = e^x \int_x^\infty f(t)\, e^{-t}\, dt$.

Pour tous $t \geq 0$ *et* $\alpha \geq 0$:

$$E(f(A_\infty)|\hat{\mathcal{F}}_t) = f(A_t)\, 1_{(L\leq t)} + 1_{(t<L)}\, \bar{f}(A_t) = \bar{f}(0) + \int_0^t (f - \bar{f})(A_s)\, d\mu_s \;;$$

$$P(A_\infty > \alpha|\mathcal{F}_t) = 1_{(A_t>\alpha)} + 1_{(A_t\leq\alpha)} Z_t \exp-(\alpha-A_t) = e^{-\alpha} + \int_0^t 1_{(A_s\leq\alpha)} \exp-(\alpha-A_s)\, dM_s$$

$$P(A_\infty > \alpha|\hat{\mathcal{F}}_t) = 1_{(A_\infty>\alpha)}\, 1_{(L\leq t)} + 1_{(t<L)} \exp-(\alpha-A_t)^+ .$$

Démonstration : Pour $x \geq 0$, $\int_0^x (f - \bar{f})(y)\, dy = \bar{f}(0) - \bar{f}(x)$ et

$$\int_0^t (f - \bar{f})(A_s)\, d\mu_s = (f - \bar{f})(A_\infty)\, 1_{(L\leq t)} - (\bar{f}(0) - \bar{f}(A_t))$$

$$= f(A_\infty)\, 1_{(L\leq t)} + 1_{(t<L)}\, \bar{f}(A_t) - \bar{f}(0) \;;$$

ainsi, $f(A_t)\, 1_{(L\leq t)} + 1_{(t<L)}\, \bar{f}(A_t)$ est la $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ martingale $E(f(A_\infty)|\hat{\mathcal{F}}_t)$;

par projection sur $(\mathcal{F}_t)$, on obtient :

$$E(f(A_\infty)|\mathcal{F}_t) = (1 - Z_t)\, f(A_t) + Z_t\, \bar{f}(A_t) = \bar{f}(0) - \int_0^t (f - \bar{f})(A_s)\, dM_s .$$

Pour $f = 1_{]\alpha,\infty[}$, $\bar{f}(x) = \exp-(\alpha - x)^+$ et $(f - \bar{f})(x) = 1_{(x\leq\alpha)} \exp-(\alpha - x)$ □

Proposition 2 : *Toute v.a.* $\Phi \in L^2(\hat{\mathcal{F}}_\infty^{(A_\infty)})$ *peut se représenter de manière unique*

sous la forme : $$\Phi = E(\Phi) + \int_0^\infty \varphi_s\, d\tilde{B}_s + \int_0^\infty \psi_s\, d\mu_s ,$$

avec (φ_s) *et* (ψ_s) *deux processus* $(\hat{\mathcal{F}}_s)$ *prévisibles tels que :*

$$E\left[\int_0^\infty \varphi_s^2\, ds\right] + E\left[\int_0^\infty \psi_s^2\, dA_s\right] < \infty.$$

En conséquence, si $\mathcal{F}^+_L \supsetneqq \mathcal{F}_L$, *alors* $\hat{\mathcal{F}}_\infty^{(A_\infty)}$ *est strictement contenue dans* $\mathcal{F}_\infty$.

Démonstration : i) Pour prouver le résultat de représentation annoncé, il nous suffit de considérer Φ de la forme : $\Phi = \left(\int_0^\infty \tilde{\varphi}_s\, d\tilde{B}_s\right) f(A_\infty)$,

où $(\tilde{\varphi}_t)$ est un processus $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ prévisible tel que : $E\left[\int_0^\infty \tilde{\varphi}_s^2\, ds\right] < \infty$, et

$f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe C^∞, bornée, telle que : $\bar{f}(0) = 0$.

D'après la proposition 1, on a : $f(A_\infty) = \int_0^\infty (f - \bar{f})(A_s)\, d\mu_s$;
le résultat de représentation annoncé découle alors de la formule d'Itô.

ii) D'après le Théorème 3, si $v \in L^2(\mathcal{F}_L^+)$ est orthogonale à $L^2(\mathcal{F}_L)$, elle est orthogonale à toute variable Φ considérée ci-dessus, et donc à $L^2(\hat{\mathcal{F}}_\infty^{(A_\infty)})$, ce qui prouve la fin de la Proposition 2. □

5. Etude de quelques exemples.

Dans ce paragraphe, nous étudions la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ avec encore plus de précision, dans le cadre de la filtration brownienne, pour certaines fins L d'ensembles prévisibles qui apparaissent naturellement dans l'étude du mouvement brownien, et pour lesquels la théorie du grossissement semble particulièrement bien adaptée (cf. Jeulin [6]).

Exemple 1 : $L = g \equiv \sup\{t < 1 : B_t = 0\}$. On a alors (cf, Jeulin [6], p. 124) :

$$Z_t = \Phi\left(\frac{|B_t|}{\sqrt{1-t}}\right) \quad \text{où} \quad \Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_x^\infty dy \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t dB_s \operatorname{sgn}(B_s) \frac{1}{\sqrt{1-s}} \exp\left(-\frac{B_s^2}{2(1-s)}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, dL_s$$

où $(L_t, t \geq 0)$ désigne le temps local en 0 de B .
On en déduit :

$$\frac{dM_s}{Z_s} = (dB_s) \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\operatorname{sgn}(B_s)}{\sqrt{1-s}} \quad \text{et} \quad \frac{-dM_s}{(1-Z_s)} = (dB_s) \left(\frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}}\right) \left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{\operatorname{sgn}(B_s)}{\sqrt{1-s}}$$

où l'on a posé : $\tilde{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x dy \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$.

La décomposition canonique de $(B_t, t \geq 0)$ dans la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ est donc :

$$(5.a)\quad B_t = \tilde{B}_t + \int_0^{t\wedge g} \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \operatorname{sgn}(B_s)\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right) + 1_{(g<t)}\operatorname{sgn}(B_1) \int_g^t \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \left(\frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}}\right)\left(\frac{|B_s|}{\sqrt{1-s}}\right)$$

Dans le but de compléter le Théorème 5, nous introduisons le processus $(X_t)_{t<1}$ défini comme l'unique solution de l'équation :

$$(5.b)\qquad X_t = \tilde{B}_t + \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s}}\, u\left(\frac{X_s}{\sqrt{1-s}}\right)$$

où l'on a posé : $u(x) = \operatorname{sgn}(x)\left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)(|x|) = -\operatorname{sgn}(x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \left(\int_{|x|}^\infty dy\, e^{-y^2/2}\right)^{-1}$

Définissons également $(L_t^X, t < 1)$ le temps local de X en 0, et le processus :

$$\alpha_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-u}} \, dL_u^X \qquad , \ t < 1.$$

On note, d'autre part, $A_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}} \, dL_s$ le processus croissant associé à la surmartingale $(Z_t)_{t\geq 0}$ (voir la forme explicite de la décomposition canonique de (Z_t) au début de ce paragraphe).

Nous pouvons maintenant répondre complètement, pour cet exemple, aux questions a), b), c) posées à la suite de la démonstration du Théorème 6.

<u>**Théorème 7**</u> : *1) La filtration naturelle de* $(\tilde{B}_t)$, *soit* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, *est également la filtration naturelle du processus* (X_t).

2) $(\mathcal{F}_t^*)$, *la plus petite filtration qui contienne* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, *et qui fasse de* g *un temps d'arrêt, est également la plus petite filtration qui contienne* $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$, *et qui rende le processus* (A_t) *adapté.*

3) La variable $\mathrm{sgn}(B_1)$ *est indépendante de* $\tilde{\mathcal{F}}_\infty^{(A_\infty)} \equiv \mathcal{F}_\infty^*$, *et on a :* $\mathcal{F}_\infty^* \vee \sigma(\mathrm{sgn}(B_1)) = \mathcal{F}_\infty$.

4) La loi conditionnelle de g, *sachant* $\tilde{\mathcal{F}}_\infty$, *est donnée par :*

$$\textit{(5.c)} \qquad P(g \leq t \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_\infty) = P(A_1 \leq \alpha_t \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_\infty) = 1 - \exp(-\alpha_t)$$

$$(= P(g \leq t \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t) = P(A_1 \leq \alpha_t \,|\, \tilde{\mathcal{F}}_t))$$

<u>Démonstration</u> : 1) Il n'est pas difficile de démontrer la première assertion en considérant l'équation stochastique *(5.b)* satisfaite par X ; la solution unique de cette équation est obtenue par la méthode des approximations successives.

2) Les processus (X_t) et (B_t) coïncident sur l'intervalle $[0,g]$; ainsi, $A_t \equiv \alpha_{t\wedge g}$ $(t \geq 0)$ est adapté pour la filtration $(\mathcal{F}_t^*)$. En conséquence, $(\mathcal{F}'_t)$, la plus petite filtration qui contienne $(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ et qui rende (A_t) adapté est une sous-filtration de $(\mathcal{F}_t^*)$.

Inversement, nous verrons plus loin que g est un point de croissance à droite de $(\alpha_t, t \geq 0)$, et on a donc : $g = \inf\{t : \alpha_t \neq A_t\}$, ce qui prouve que $(\mathcal{F}_t^*)$ est une sous-filtration de $(\mathcal{F}'_t)$; finalement, on a : $\mathcal{F}_t^* = \mathcal{F}'_t$, pour tout t.

3) D'après Proposition 2-ii), la variable $\mathrm{sgn}(B_1)$ est orthogonale à $L^2(\mathcal{F}_\infty^*)$, et donc indépendante de $\mathcal{F}_\infty^*$.

Soit w la fonction (de classe C^∞) définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$w(x) = \frac{\exp(-\frac{x}{2})}{\int_0^1 \exp(-\frac{x}{2}y^2) \, dy} \qquad \left(= \sqrt{|x|} \, \frac{\tilde{\Phi}'}{\tilde{\Phi}}(\sqrt{|x|}) \text{ si } x \neq 0\right)$$

Soient V^+ et V^- les uniques solutions des équations différentielles stochastiques :

$$V^+ \geq 0, \quad V_t^+ = 1_{(g \leq t)}\left(+2\int_g^t \sqrt{V_s^+}\, d\tilde{B}_s + \int_g^t w\left(\frac{V_s}{1-s}\right) ds\right) \quad (0 \leq t < 1)$$

$$V^- \geq 0, \quad V_t^- = 1_{(g \leq t)}\left(-2\int_g^t \sqrt{V_s^-}\, d\tilde{B}_s + \int_g^t w\left(\frac{V_s^-}{1-s}\right) ds\right) \quad (0 \leq t < 1) ;$$

X, V^+, V^- sont adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t^*)$; la décomposition *(5.a)* donne :

$B_t = X_{t\wedge g} + 1_{(B_1>0)} \sqrt{V_t^+} + 1_{(B_1<0)} \sqrt{V_t^-}$, ce qui établit : $\mathcal{F}_\infty^* \vee \sigma(\mathrm{sgn}(B_1)) = \mathcal{F}_\infty$.

4) On a : $(g \leq t) = (A_1 \leq \alpha_t)$; la deuxième égalité qui figure en *(5.c)* découle de l'indépendance de A_1 et $\mathcal{F}_\infty$, et de ce que A_1 est une variable de loi exponentielle de paramètre 1 ; les autres égalités sont immédiates □

Une variante de cet exemple a été étudiée comme illustration du processus de prédiction par F. Knight [7].

Le théorème suivant donne une première description intéressante de la loi du processus $(X_t)_{t<1}$. Pour énoncer ce théorème, nous noterons $(y_t)_{t<1}$ le processus des coordonnées sur l'espace canonique $C([0,1[;\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_t = \sigma\{y_s ; s \leq t\}$ $(t < 1)$.

Théorème 8 : *Notons* P^X *la loi du processus* $(X_t)_{t<1}$ *défini au moyen de l'équation différentielle stochastique (5.b), et* W *la mesure de Wiener considérée sur l'espace canonique* $C([0,1[\,;\mathbb{R})$. *On a alors :*

$$P^X_{|\mathcal{C}_t} = (Z_t \exp(A_t))\cdot W_{|\mathcal{C}_t} \qquad (t < 1),$$

où l'on a noté ici : $\quad Z_t = \Phi\left(\frac{|y_t|}{\sqrt{1-t}}\right), \quad$ *et* $\quad A_t = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, d\ell_s$,

$(\ell_t)_{t\leq 1}$ *désignant le temps local en* 0 *de* y.

Démonstration : D'après le théorème de Girsanov , à condition de prouver que le processus $(D_t^u)_{t<1}$ ci-dessous est une martingale (et pas seulement une martingale locale), on a, pour $t < 1$:

$$P^X_{|\mathcal{C}_t} = D_t^u \cdot W_{|\mathcal{C}_t} ,$$

$$\text{où :} \qquad D_t^u = \exp\left(\int_0^t u\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right)\frac{dy_s}{\sqrt{1-s}} - \frac{1}{2}\int_0^t u^2\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right)\frac{1}{1-s}\, ds\right) .$$

Posons : $U(x) = \int_0^x dy\, u(y)$. u étant dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et admettant des limites à droite et à gauche en 0, on a, d'après la formule d'Itô :

$$U\left(\frac{y_t}{\sqrt{1-t}}\right) = \int_0^t u\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right)\left(\frac{dy_s}{\sqrt{1-s}}\right) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s}\left\{u'\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right) + \left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right) u\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right)\right\} ds$$
$$+ \frac{1}{2}(u(0+) - u(0-))\ell'_t ,$$

où l'on a noté $(\ell'_t, t < 1)$ le temps local en 0 de $\left(\frac{y_t}{\sqrt{1-t}}, t < 1\right)$.

Il est aisé de montrer que l'on a : $\ell'_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}} d\ell_s$. On a donc obtenu :

$$D^u_t = \exp\left\{U\left(\frac{y_t}{\sqrt{1-t}}\right) - \frac{1}{2}(u(0+) - u(0-))\ell'_t - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1-s} V\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right) ds\right\},$$

où : $$V(x) = u'(x) + x\,u(x) + u^2(x).$$

Or, dans le cas particulier qui nous intéresse, il est facile de voir que l'on a : $V(x) = 0$; $-\frac{1}{2}(u(0+) - u(0-)) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $U(x) = \log \Phi(|x|)$,

de sorte que, finalement, on a bien : $D^u_t = Z_t \exp(A_t)$.

De plus, le processus $(D^u_t)_{t<1}$ est bien une martingale, car on a :

$$\sup_{s\le t} D^u_s \le \exp(A_t) \le \exp\left(\sqrt{\frac{2}{\pi(1-t)}}\,\ell_t\right),$$

et la variable qui figure dans le membre de droite possède des moments de tous ordres (rappelons que, pour t fixé, on a : $\ell_t \overset{(\text{loi})}{=} |B_t|$). □

En plus de la propriété d'absolue continuité présentée dans le Théorème 8, le processus $(X_t)_{t<1}$ possède une "propriété de régénération" tout à fait remarquable ; de façon précise, on a le

Théorème 9 : *On considère maintenant $(X_t)_{t<1}$ comme étant défini (trajectoriellement) à partir de l'équation (5.b), le mouvement brownien $(\tilde{B}_t)_{t<1}$ désignant la partie martingale de $(B_t)_{t<1}$ dans la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)$.*

On a alors : (i) $X_u = B_u$, $u \le g$;

(ii) *le processus* $\left(Y_u \equiv \frac{1}{\sqrt{1-g}} X_{g+u(1-g)} \,;\, u < 1\right)$

est indépendant de $\mathcal{F}^+_g$ $(= \hat{\mathcal{F}}_g)$ et a même loi que $(X_u)_{u<1}$.

Démonstration : La propriété (i) a été le point de départ de l'introduction et de l'étude de $(X_t)_{t<1}$. Pour démontrer (ii), rappelons tout d'abord que $(\tilde{B}_u)_{u<1}$ est un $(\hat{\mathcal{F}}_u)$ mouvement brownien ; en conséquence, $\left(\frac{1}{\sqrt{1-g}}(\tilde{B}_{g+u(1-g)} - \tilde{B}_g)\right)_{u\le 1}$ est encore un mouvement brownien (dans la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_{g+u(1-g)})_{u\le 1}$) ;

il reste maintenant à faire, dans l'équation *(5.b)*, le changement de variables $t = g+u(1-g)$, et à utiliser la propriété d'unicité trajectorielle de l'équation *(5.b)*. □

Les propriétés (i) et (ii) présentées dans le Théorème 9 permettent de construire un processus $(X^*_v)_{v<1}$ qui a même loi que $(X_v)_{v<1}$, à l'aide de la "juxtaposition" d'une suite de mouvements browniens indépendants $(B^{(n)}_u, u\le\gamma^{(n)})$ où $\gamma^{(n)} = \sup\{u < 1 : B^{(n)}_u = 0\}$.

En effet, on définit : $X^*_u = B^{(0)}_u$, $u \le \gamma^{(0)} \equiv g$, puis :

$$X^*_{g+u(1-g)} = \sqrt{1-g}\; B^{(1)}_u \ , \ u \le \gamma^{(1)} \ , \text{ puis : } \ g^{(1)} = g + \gamma^{(1)}(1 - g).$$

En continuant de cette façon, on définit X^* sur l'intervalle $(g^{(n-1)}, g^{(n)})$,

par :
$$X^*_{g^{(n-1)}+u(1-g^{(n-1)})} = \sqrt{1 - g^{(n-1)}}\; B^{(n)}_u \ , \ u \le \gamma^{(n)},$$

et :
$$g^{(n)} = g^{(n-1)} + \gamma^{(n)}(1 - g^{(n-1)}).$$

On déduit de cette dernière égalité que la suite $(g^{(n)},\ n \in \mathbb{N})$ croit P-p.s. vers 1 ; le processus $(X^*_u)_{u<1}$ est donc bien défini et a même loi que X.

<u>Exemple 2</u> : $L = \sigma \equiv \sup\{t < T_1 : B_t = 0\}$, avec $T_1 = \inf\{t : B_t = 1\}$.

Cet exemple, qui joue un rôle fondamental dans les décompositions trajectorielles du mouvement brownien, dûes à D. Williams, est étudié de façon approfondie par Jeulin ([6], p.97-110) (voir également [5], p.193-196).

D'autre part, des considérations tout à fait semblables à celles développées dans l'Exemple 1 ci-dessus, en particulier l'étude d'une équation stochastique "déduite" de la décomposition canonique de B avant L, dans la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ (i.e. le passage de *(5.a)* à *(5.b)*) viennent d'être faites très récemment par Mortimer - Williams ([9] ; voir en particulier la section "Clarification", p.916-917). L'article [9], consacré à la combinaison des formules de décomposition de Girsanov d'une part, et, d'autre part, de celles de la théorie du grossissement progressif, est également à rapprocher des paragraphes 81 à 87, p.191 à 196, de [5].

Entrons maintenant précisément dans la discussion de cet Exemple 2.

On a : $Z_t = 1 - B^+_{t\wedge T_1} = 1 - \int_0^{t\wedge T_1} 1_{(B_s>0)}\, dB_s - \frac{1}{2} L_{t\wedge T_1}$ de sorte que l'équation analogue à *(5.b)* est, pour cet Exemple 2 :

$$X_t = \tilde{B}_t - \int_0^t ds\, 1_{(X_s>0)} \frac{1}{1 - X_s} \,. \tag{5.d}$$

Le théorème analogue au Théorème 9 et à ses conséquences est maintenant le

<u>**Théorème 10**</u> : *Soit* $(B_t)_{t\ge0}$ *mouvement brownien réel issu de* 0, *et*

$$\sigma \equiv \sup\{t < T_1 : B_t = 0\}.$$

Soit $(Y_t)_{t\ge0}$ *une copie du processus* X *indépendante de* B ; *le processus :*

$$X_v^* = \begin{cases} B_v\ , & v \le \sigma \\ Y_{v-\sigma}, & \sigma \le v \end{cases} \qquad \textit{a même loi que } (X_v)_{v\ge 0}.$$

Ce théorème permet de construire X à partir d'une suite $(B^{(j)})_{j\ge 1}$ de mouvements browniens indépendants, encore plus facilement que dans l'Exemple 1.

On note : $\sigma^{(n)} = \sup\{t \le T_1^{(n)} : B_t^{(n)} = 0\}$, et $\Sigma^{(n)} = \sigma^{(1)} + \dots + \sigma^{(n)}$.

Alors, le processus $(X_t^*, t \ge 0)$ défini par :

$$(5.e) \qquad X_t^* = B^{(n+1)}_{t-\Sigma^{(n)}}\ , \quad \Sigma^{(n)} \le t \le \Sigma^{(n+1)}\ , \ n \in \mathbb{N},$$

a pour loi celle de $(X_t, t \ge 0)$, solution de *(5.d)*. La représentation *(5.e)* du processus $(X_t, t \ge 0)$ est très suggestive : ce processus essaie d'atteindre le niveau 1 en suivant la trajectoire $(B_u^{(1)}, u < T_1^{(1)})$ mais, immédiatement après la dernière fois où $(B_u^{(1)})$ retombe en 0 avant d'atteindre 1, X recommence son essai en suivant un nouveau mouvement brownien indépendant $B^{(2)}$, et ainsi de suite, indéfiniment.

Le Théorème 8, qui exprime une relation d'absolue continuité entre la loi du processus X de l'Exemple 1, et celle du mouvement brownien, admet la version suivante dans le cadre de l'Exemple 2.

Théorème 11 : *Notons P^X la loi du processus $(X_t)_{t\ge 0}$ défini par l'équation stochastique (5.d) et W la mesure de Wiener considérée sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$; on a alors, pour tout $t \ge 0$:*

$$(5.f) \qquad P^X_{|\mathcal{C}_t} = Z_t \exp(A_t)\cdot W_{|\mathcal{C}_t}\ ,$$

où l'on a noté ici : $T_1 = \inf\{t\ ;\ y_t = 1\}$, $Z_t = 1 - y^+_{t\wedge T_1}$, et $A_t = \frac{1}{2}\,\ell_{t\wedge T_1}$.

Remarques : a) Que $(Z_t \exp(A_t))_{t\ge 0}$ soit une martingale découle de ce que, pour tout $t \ge 0$, $E[\exp(A_t)] \le E[\exp(\frac{1}{2}\ell_t)] < \infty$.

b) Il découle également de *(5.f)* que l'on a : $P^X(T_1 = \infty) = 1$, ce qui, bien sûr, est en accord avec la description *(5.e)* du processus X. □

Appendice A : Généralisation des Exemples aux processus de Bessel de dimension n < 2.

Exemple 1' : On se propose maintenant d'étendre les résultats précédents aux processus de Bessel de dimension d, avec d < 2.

On munit l'espace canonique $C([0,1[, \mathbb{R}^n)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la mesure de Wiener ; le processus des coordonnées est $(y_t)_{t\in[0,1[}$; soit $U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2, $u = \nabla U$; on peut écrire :

$$D_t^u \overset{\text{déf}}{=} \exp\left\{\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-s}} \nabla U\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right)\cdot dy_s - \frac{1}{2}\int_0^t |\nabla U|^2 \left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right) \frac{1}{1-s}\, ds\right\}$$

$$= \exp\left\{U\left(\frac{y_t}{\sqrt{1-t}}\right) - \frac{1}{2}\int_0^t ds\, \frac{1}{1-s}\, V\left(\frac{y_s}{\sqrt{1-s}}\right)\right\},$$

où :
$$V(x) = \Delta U(x) + x\cdot\nabla U(x) + |\nabla U|^2(x)$$

$$= \frac{1}{H(x)}\,(\Delta H(x) + x\cdot\nabla H(x)) \qquad \text{si } H(x) = e^{U(x)}.$$

Il est intéressant de trouver les solutions U (ou H) de l'équation : $V = 0$, pour lesquelles $\left(H\left(\frac{y_t}{\sqrt{1-t}}\right)\right)_{t\in[0,1[}$ est une martingale (locale)[3] ;

Si l'on suppose de plus que H est une fonction radiale, i.e. : $H(x) = h(|x|)$, on a à résoudre l'équation :

$$h''(r) + h'(r)\left(\frac{n-1}{r} + r\right) = 0,$$

qui a pour solutions :

$$h(r) = a + c\int_r^\infty d\rho\, \rho^{1-n} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right).$$

(Remarquons que, pour tout $n \geq 2$, l'intégrale ci-dessus diverge au voisinage de 0, et il faudrait donc, en toute rigueur, reprendre la discussion au début de ce paragraphe en supposant, par exemple, que le mouvement brownien n'est pas issu de 0).

Nous arrêtons ici notre digression relative à $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, pour remarquer que, dans le cas $n = 1$, la fonction h ci-dessus, avec $a = 0$, et $c = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ n'est autre que la fonction Φ qui a joué un rôle essentiel dans l'étude de l'Exemple 1. Cette remarque suggère maintenant l'énoncé suivant.

__Théorème 12__ : *Soit* n *nombre réel satisfaisant :* $0 < n < 2$.
On note $(R_t, t \geq 0)$ *le processus de Bessel de dimension* n, *issu de* 0, *et* $g^{(n)} = \sup\{t < 1 : R_t = 0\}$. *Posons :* $Z_t^{(n)} = P(g^{(n)} > t \mid \mathcal{F}_t)$ $\quad (t < 1)$.
On a alors :

$$\text{(1)} \qquad Z_t^{(n)} = h_n\left(\frac{R_t}{\sqrt{1-t}}\right),$$

où : $h_n(r) = c_n \int_r^\infty d\rho\, \rho^{1-n}\exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right)$, *avec* $c_n = \dfrac{2^{n/2}}{\Gamma(1-\frac{n}{2})}$.

---

[3] On notera que $\left(e^{s/2}\, y_{1-\exp(-s)}\right)_{s\geq 0}$ est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, de générateur $\frac{1}{2}(\Delta f + x\cdot\nabla f)$.

Remarque : Il est intéressant, pour la suite, de noter que :

$$h_n(r) = P\left(H_{(\nu)} \geq \frac{r^2}{2}\right),$$

où $H_{(\nu)}$ désigne ici une variable gamma de paramètre ν, i.e :

$$P(H_{(\nu)} \in dh) = \frac{h^{\nu-1}\, e^{-h}}{\Gamma(\nu)}\, dh \ (h > 0), \qquad \text{où } n = 2(-\nu+1).$$

Démonstration : On a, à l'évidence : $\quad P(g^{(n)} > t \,|\, \mathcal{F}_t) = P^{(-\nu)}_{R_t}(T_0 < 1-t)$,

où $P^{(-\nu)}_r$ désigne la loi du processus de Bessel $(R_t)_{t\geq 0}$, issu de r, de dimension $n = 2(-\nu+1)$, et $T_0 \equiv T_0(R) = \inf\{t \,;\, R_t = 0\}$.

Or, on sait, à l'aide de résultats classiques de retournement, que :

$$T_0(R) \overset{(\text{loi})}{=} L_r(\hat{R}),$$

où $(\hat{R}_u)_{u\geq 0}$ est un processus de Bessel de dimension $n' = 2(\nu+1)$, issu de 0.

De plus, d'après Getoor [G] (voir également Pitman-Yor [PY], ou Yor [Y]), on a

$$L_r(\hat{R}) \overset{(\text{loi})}{=} \frac{r^2}{2H_{(\nu)}} .$$

En conséquence, on a :

$$Z^{(n)}_t \overset{\text{déf}}{=} P(g^{(n)} > t \,|\, \mathcal{F}_t) = P\left(\frac{r^2}{2H_{(\nu)}} \leq 1-t\right)\Bigg|_{r=R_t} = h_n\left(\frac{r^2}{2(1-t)}\right)\Bigg|_{r=R_t} ,$$

c'est-à-dire la formule *(1)*. □

Corollaire 12.1 (Dynkin [D]) : *Si l'on désigne par* $H_{(a,b)}$ *une variable de loi beta de paramètres* (a,b), *i.e. :*

$$P(H_{(a,b)} \in dt) = \frac{t^{a-1}(1-t)^{b-1}}{B(a,b)}\, dt , \qquad 0 < t < 1.$$

on a alors, avec les assertions précédentes :

$$g^{(n)} \overset{(\text{loi})}{=} H_{(\nu,1-\nu)} . \tag{2}$$

Démonstration : D'après la formule *(1)*, et la remarque ci-dessus, on a :

$$\gamma_n(t) \overset{\text{def}}{=} P(g^{(n)} \geq t) = P\left(H_{(\nu)} \geq \frac{R_t^2}{2(1-t)}\right),$$

où $(R_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Bessel, issu de 0, de dimension n, indépendant de $H_{(\nu)}$. Par scaling, on a : $R_t^2 \overset{(\text{loi})}{=} t\, R_1^2$, pour t fixé, et, d'autre part :

$$R_1^2 \overset{(\text{loi})}{=} 2H_{n/2}$$

On a donc :

$$\gamma_n(t) = P\left(\frac{H_{(\nu)}}{H_{(1-\nu)}} \geq \frac{t}{1-t}\right) = P\left(\frac{H_{(\nu)}}{H_{(\nu)} + H_{(1-\nu)}} \geq t\right),$$

où $H_{(\nu)}$ et $H_{(1-\nu)}$ sont deux variables de lois gamma indépendantes, de paramètres respectifs ν et $(1-\nu)$.

Il résulte des propriétés de l'algèbre des variables beta-gamma que l'on a :

$$\frac{H_{(\nu)}}{H_{(\nu)} + H_{(1-\nu)}} \overset{(\text{loi})}{=} H_{(\nu,1-\nu)} \text{ , ce qui entraîne } (2). \qquad \square$$

Références pour l'Appendice A :

[D] E.B. Dynkin : Some limit theorems for sums of independent random variables with infinite mathematical expectations. *I.M.S.-A.M.S Selected Trans. in Math. Stat. and Prob.* 1, *p. 171-189 (1961).*

[G] R.K. Getoor : The Brownian escape process. *Ann. Prob.* 7 *, 864-867 (1979).*

[PY] J.W. Pitman, M. Yor : Bessel processes and infinitely divisible laws. *In : Stochastic Integrals, ed. D. Williams, Lect. Notes in Maths. 851, Springer (1981).*

[Y] M. Yor : Sur certaines fonctionnelles exponentielles du mouvement brownien réel. *J. App. Prob.* 29*, p. 202-208 (1992).*

Appendice B : Une formule de balayage "gauche".

$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ est un espace de probabilité filtré satisfaisant aux conditions habituelles, H un ensemble aléatoire prévisible fermé à gauche, contenant $[0]$. On posera :

$$g_t = \sup\{s \le t,\ s \in H\} \qquad \text{et} \qquad d_t = \inf\{s > t\ ,\ s \in H\}.$$

$(d_t)_{t\ge 0}$ est un processus continu à droite, mais $(g_t)_{t\ge 0}$ n'est continu ni à droite ni à gauche ; on notera que

$$g_0 = 0\ ,\ \{t\ ;\ g_t = t\} = H \quad ,\ \{t\ ;\ d_t = t\} = H \setminus G$$

quand G désigne l'ensemble des extrémités gauches des intervalles contigus à $\overline{H}$

Soit (z_t) un processus prévisible borné ; montrons rapidement que (z_{g_t}) est prévisible ; il suffit de considérer le cas où (z_t) est l'indicateur d'un intervalle stochastique $[0,S]$; on vérifie aisément que :

$$\{(t,\omega)\ ;\ 0 \le g_t(\omega) \le S(\omega)\} = [0,d_S] - H^S$$

quand H^S désigne l'ensemble prévisible $]S,\infty[\ \cap H$.

Il nous sera utile de décrire cet ensemble de façon plus explicite

$$\{t\ ;\ g_t \le S\} = \begin{cases} [0,d_S[& \text{si } S < d_S \text{ et } d_S \in H \qquad (1) \\ [0,d_S] & \text{si } S < d_S \text{ et } d_S \notin H \qquad (2) \\ [0,d_S] & \text{si } S = d_S \qquad (3) \end{cases}$$

Proposition 3 : *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *une semimartingale continue à droite telle que* $(X_{t-})_{t\geq 0}$ *soit nul sur* H *; si* z *est un processus prévisible borné,* $(z_{g_t} X_t)_{t\geq 0}$ *est une semimartingale continue à droite et*

$$z_{g_t} X_t = z_0 X_0 + \int_0^t z_{g_s} dX_s \qquad (4)$$

(On conviendra comme d'habitude que $X_{0-} = 0$; l'hypothèse faite est donc équivalente à : $(X_{t-})_{t\geq 0}$ s'annule sur $H \cap]0,\infty[$).

Démonstration : Il suffit de vérifier la formule *(4)* quand $z = 1_{[0,S]}$, ce qui se fait aisément quand on a remarqué que $X_{d_S-} = 0$ dans le cas *(1)*, tandis que $X_{d_S} = 0$ dans les cas *(2)* et *(3)*. □

Appendice C : **Quelques propriétés du processus X de l'Exemple 1.**

En complément aux Théorèmes 8 et 9 qui présentent certaines propriétés du processus X, solution de :

$$(5.b) \qquad X_t = B_t + \int_0^t \frac{ds}{\sqrt{1-s}}\, u\left(\frac{X_s}{\sqrt{1-s}}\right), \qquad t < 1,$$

avec $u(x) = \mathrm{sgn}(x)\,(\frac{\Phi'}{\Phi})(|x|)$, et $\Phi(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_r^\infty dy\; e^{-y^2/2}$, il nous semble intéressant d'ajouter le théorème suivant, qui nous permettra en outre de comparer $(X_t)_{t<1}$ au pont brownien standard.

Théorème 13 : *1) Il existe un processus* $(Y_\ell, \ell \geq 0)$ *solution de :*

$$(1) \qquad Y_\ell = \hat{B}_\ell + \int_0^\ell ds\; \tilde{u}(Y_s)$$

où $(\hat{B}_\ell, \ell \geq 0)$ *est un mouvement brownien issu de* 0, *et*

$$(2) \qquad \tilde{u}(y) = u(y) + \frac{y}{2}$$

tels que X *et* Y *soient liés par la formule :*

$$(3) \qquad \frac{X_t}{\sqrt{1-t}} = Y_{\log(\frac{1}{1-t})}, \quad t < 1.$$

2) La diffusion $(Y_\ell\ ;\ \ell \geq 0)$, *dont le générateur infinitésimal* $\mathcal{L}$ *satisfait*

$$\mathcal{L}\varphi(y) = \frac{1}{2}\varphi''(y) + \tilde{u}(y)\,\varphi'(y) \qquad (\varphi \in C_b^2(\mathbb{R}))$$

admet une mesure invariante μ, *unique à un facteur multiplicatif près, donnée* *par la formule :*

$$(4) \qquad \mu(dy) = C\, e^{y^2/2} \left(\int_{|y|}^{\infty} dz\, e^{-z^2/2}\right)^2 dy\,.$$

Remarquons maintenant que le pont brownien standard $(X_t^o)_{t\le 1}$ satisfait l'équation *(5.b)*$_o$, obtenue en remplaçant dans l'équation *(5.b)* la fonction u par $u_o(y) \equiv -y$. De plus, l'énoncé du Théorème 13 et sa démonstration s'appliquent à X^o, à condition de remplacer $\tilde{u}$ par $\tilde{u}_o(y) = -\frac{y}{2}$ et μ par $\mu_o(dy) = C\, e^{-y^2/2}dy$.

Ainsi, $$\frac{X_t^o}{\sqrt{1-t}} = Y^o_{\log(\frac{1}{1-t})},$$

avec $(Y_\ell^o)_{\ell\ge 0}$ processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $(-\frac{1}{2})$.

Le théorème ergodique s'applique au processus $(Y_\ell)_{\ell\ge 0}$, resp. : $(Y_\ell^o)_{\ell\ge 0}$, sous la forme suivante :

$$(5) \qquad \frac{1}{\ell}\int_0^\ell ds\, f(Y_s) \xrightarrow[\ell\to\infty]{p.s.} \int \mu(dy)\, f(y) \qquad (f \in L^1(\mu))$$

$$(6) \qquad \frac{1}{\ell}\int_0^\ell ds\, f(Y_s^o) \xrightarrow[\ell\to\infty]{p.s.} \int \mu_o(dy)\, f(y) \qquad (f \in L^1(\mu_o))$$

Ceci nous permet enfin de compléter la description de la loi de $(X_t)_{t<1}$ de la façon suivante :

<u>**Corollaire 13.1**</u> : *1) On a* $\dfrac{X_t}{\sqrt{1-t}\,\log(\frac{1}{1-t})} \xrightarrow[t\uparrow 1]{p.s.} 0$. *En particulier,* $X_t \xrightarrow[t\uparrow 1]{p.s.} 0$.

2) Néanmoins, les lois des processus $(X_t)_{t<1}$ *et* $(X_t^o)_{t<1}$ *sont étrangères.*

<u>Démonstration</u> : a) La première assertion découle des relations *(1)* et *(3)*, et de : $\frac{1}{\ell}\, Y_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{p.s.} 0$. Ceci résulte, d'une part, de : $\frac{1}{\ell}\,\hat{B}_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{p.s.} 0$, et d'autre part, du théorème ergodique *(5)* appliqué à la fonction impaire μ-intégrable $f = \tilde{u}$, qui est d'intégrale nulle par rapport à la probabilité symétrique μ.

b) La seconde assertion découle immédiatement des propriétés ergodiques *(5)* et *(6)*. □

Pour terminer, nous allons étudier les processus solutions des équations *(5.b)* et *(5.d)* ; revenons à la situation générale : L est une fin d'ensemble prévisible, évitant les temps d'arrêt [prévisibles]. D'après le théorème 6, A, la projection duale $(\mathcal{F}_t)$ prévisible de $1_{(0 < L \le t)}$ $(t \ge 0)$ vérifie : A_∞ suit une loi exponentielle de paramètre 1 ; reprenons les notations de la proposition 1 que nous allons maintenant appliquer :

soit $a \geq 0$ et $V^{(a)}$ la $(\mathcal{F}_t)$ martingale

$$V_t^{(a)} = e^a P(A_\infty > a | \mathcal{F}_t) = 1 + \int_0^t 1_{(A_s \leq a)} \exp(A_s)\, dM_s \;;$$

Soit T un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt tel que :

$$(7) \qquad E\Big[A_T \exp(A_T)\Big] < \infty \;;$$

comme pour tous α, z, $\eta \geq 0$, $z\, e^\alpha \leq \frac{e}{\eta} (\alpha e^\alpha + e^{z\eta})$, on a :

$$E\Big[\Big(\int_{[0,T]} \exp(2A_s)\, |d\langle M,M\rangle_s|\Big)^{1/2}\Big]$$
$$\leq E\Big[\exp(A_T) \langle W,W\rangle_T^{1/2}\Big] \leq \frac{e}{\eta}\Big(E\Big[A_T \exp(A_T)\Big] + E\Big[\exp(\eta \langle W,W\rangle_T^{1/2})\Big]\Big)$$

et l'inégalité de John-Nirenberg, donne :

$$(8) \qquad E\Big[\Big(\int_{[0,T]} \exp(2A_s)\, |d\langle M,M\rangle_s|\Big)^{1/2}\Big] < \infty \;;$$

de : $Z_t \exp(A_t) = 1 + \int_0^t \exp(A_s)\, dM_s$, on déduit que $\Big(Z_{t\wedge T} \exp(A_{t\wedge T})\Big)_{t\geq 0}$ est une martingale et que : $\lim_{a\to\infty} E\Big[\sup_{t\leq T}\Big|V_t^{(a)} - Z_t \exp(A_t)\Big|\Big] = 0.$

Finalement, pour K_T variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable, bornée[4]

$$\lim_{a\to\infty} E[K_T |\; A_\infty > a] = \lim_{a\to\infty} E[K_T\, V_\infty^{(a)}] = E\Big[K_T\, Z_T \exp(A_T)\Big]$$

Il suffit d'appliquer les Théorèmes 8 et 11 pour obtenir :

__Proposition 4__ : *Soit* $r \in [0,\infty]$, $(y_t)_{t<r}$ *le processus des coordonnées sur l'espace* $C([0,r[;\ \mathbb{R})$ *(muni de la topologie de la convergence uniforme sur les intervalles compacts de* $[0,r[$), $\mathcal{C}_r = \sigma\{y_s\ ;\ s < r\}$ *et* $\mathbb{W}_r$ *la mesure de Wiener sur* $\mathcal{C}_r$ *;* $(\ell_t)_{t<r}$ *désigne le temps local en* 0 *de* y.

i) Soit $r = 1$ *et* $A_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, d\ell_s$. *Lorsque* $a \longrightarrow \infty$, *la famille de probabilités* $\mathbb{W}_1[\,.\ |\ A_1 > a]$ *converge étroitement vers* P^X, *la loi de la solution de l'équation différentielle stochastique (5.b) que l'on peut donc légitimement appeler : mouvement brownien conditionné par* $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s}}\, d\ell_s = \infty$.

ii) Soit $r = \infty$, $T_1 = \inf\{t |\ y_t = 1\}$. *Lorsque* $a \longrightarrow \infty$ *la famille de probabilités*

---

[4] La mesure de Föllmer associée à la surmartingale positive $(Z_t \exp(A_t))$ (lorsqu'elle existe ...) apparait (en un sens à préciser ...) comme la probabilité P conditionnée par $\{A_\infty = \infty\}$.

$W_\infty[\cdot \mid \ell_{T_1} > a]$ *converge étroitement vers la loi de la solution de l'équation différentielle stochastique (5.d).*

<u>*Remarque*</u> : La solution de l'équation différentielle stochastique *(5.d)* est une diffusion sur $]-\infty,1[$ dont le générateur $\mathcal{G}$ restreint à $C^2(]-\infty,1[)$ est :

$$(\mathcal{G}f)(x) = \frac{1}{2} f''(x) - 1_{(0<x<1)} \frac{1}{1-x} f'(x) ;$$

la formule d'Ito montre que sa loi $\mathbf{Q}$ est celle de $\left(\dfrac{B_{\eta(t)}}{1 + B^+_{\eta(t)}}\right)_{t\geq 0}$

où : $$\eta(t) = \inf\{s \mid \int_0^s (1 + B^+_r)^{-2}\, dr > t\}.$$

$\mathbf{Q}$ n'est pas la loi $\mathbf{Q}'$ du mouvement brownien conditionné à ne pas atteindre 1, cette dernière étant celle d'une diffusion sur $]-\infty,1[$ dont le générateur $\mathcal{G}_1$ restreint à $C^2(]-\infty,1[)$ est : $$(\mathcal{G}_1 f)(x) = \frac{1}{2} f''(x) - \frac{1}{1-x} f'(x) .$$

Néanmoins, sous $\mathbf{Q}'$, $(1 - y_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Bessel de dimension 3,

$\beta_t = y_t + \int_0^t \frac{1}{1-y_s}\, ds$ est un $(\mathcal{E}_t)$ mouvement brownien et si $\theta = \sup\{t \mid y_t = 0\}$,

$$\mathbf{Q}'[\theta > t \mid \mathcal{E}_t] = \inf\{1, \frac{1}{1-y_t}\} = 1 + \int_0^t 1_{(y_s<0)} \frac{1}{(1-y_s)^2}\, d\beta_s + \frac{1}{2}\ell_t ;$$

$(\hat{\mathcal{E}}_t)_{t\geq 0}$ étant la filtration engendrée par le processus $(y_t, \theta\wedge t)_{t\geq 0}$,

$$\hat{\beta}_t \equiv y_t + \int_0^{t\wedge\theta} 1_{(0<y_s<1)} \frac{1}{1-y_s}\, ds - 1_{(\theta\leq t)} \int_0^t \frac{1}{y_s}\, ds$$

définit un $(\hat{\mathcal{E}}_t)$ mouvement brownien ;

les considérations ayant amené à la proposition 4 montrent que $\mathbf{Q}'[\cdot \mid \ell_\infty > a]$ converge vers $\mathbf{Q}$ quand $a \longrightarrow \infty$.

<u>Appendice D</u> : Notations

A partir du paragraphe 2,

$(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$;

L est une fin d'ensemble $(\mathcal{F}_t)$ prévisible évitant les $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt ;

$Z_t = P(L > t \mid \mathcal{F}_t) = M_t - A_t$ (M $(\mathcal{F}_t)$ martingale, A $(\mathcal{F}_t)$ prévisible croissant) ;

$(\hat{\mathcal{F}}_t)$ est la plus petite filtration contenant $(\mathcal{F}_t)$ et faisant de L un temps d'arrêt : pour tout t, $\hat{\mathcal{F}}_t \equiv \bigcap_{a>0} \sigma\{\mathcal{F}_{t+a}, \{L<t+a\}\}$; ainsi,

$(\hat{\mathcal{F}}_t)$ est la filtration naturelle de $(B_t, t\wedge L)_{t\geq 0}$;

$(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ est le $(\hat{\mathcal{F}}_t)$ mouvement brownien :

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^{t\wedge L} \frac{d\langle B,M\rangle_s}{Z_s} + 1_{(L\leq t)} \int_L^t \frac{d\langle B,M\rangle_s}{1 - Z_s} ;$$

$(\tilde{\mathcal{F}}_t)$ est la filtration naturelle de $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$;

$(\mathcal{F}^*_t)$ est la filtration naturelle de $(\tilde{B}_t, t\wedge L)$, i.e. la plus petite filtration

contenant $(\mathcal{F}_t)$ et faisant de L un temps d'arrêt

$(\mathcal{F}'_t)$ est la filtration naturelle de $(\tilde{B}_t, A_t)$;

$(\tilde{\mathcal{F}}_t^{(A_\infty)})$ est filtration naturelle de $(\tilde{B}_t, A_\infty)$;

$\mathcal{H}_t = \bigcap_{a>0} \mathcal{F}^-_{((t+a)\wedge L)}$ $\qquad\qquad$ $\mathcal{K}_t = \hat{\mathcal{F}}_{t\wedge L}$.

Références

[1] J. Azéma : Quelques applications de la théorie générale des processus. *Invent. Math.* 18 , *1972, p. 293-336.*

[2] J. Azéma, M. Yor : Sur les zéros des martingales continues. *Sém. Probas. XXVI, Lect. Notes in Maths. 1526, Springer (1992), 248-306.*

[3] J. Azéma, P.A. Meyer, M. Yor : Martingales relatives. *Sém. Probas. XXVI, Lect. Notes in Maths. 1526, Springer (1992), 307-321.*

[4] M.T. Barlow : (a) Study of a filtration expanded to include an honest time. *Zeit. für Wahr.,* 44, *p. 307-323 (1978).*
(b) Decomposition of a Markov process at an honest time. *Manuscrit non publié.*

[5] C. Dellacherie, B. Maisonneuve, P.A. Meyer : Probabilités et Potentiel. Chapitres XVII à XXIV. Processus de Markov (fin). Complément de Calcul stochastique. *Hermann (1992).*

[6] T. Jeulin : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. *Lect. Notes in Maths. 833. Springer (1980).*

[7] F.B. Knight : Calculating the compensator : method and example. *Seminar on Stoch. Processes. Birkhaüser (1990), p.241-252.*

[8] Y. Le Jan : Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts. *Zeitschrift für Wahr, 44, p. 213-225 (1978).*

[9] T.M. Mortimer, D. Williams : Change of measure up to a random time : theory. *J. App. Prob.* 28 , *p.* 914-918 (1991).