PAUL-ANDRÉ MEYER

# Les systèmes-produits et l'espace de Fock, d'après W. Arveson

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 27 (1993), p. 106-113
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1993__27__106_0>

# LES SYSTÈMES–PRODUITS ET L'ESPACE DE FOCK

**exposé de P.A. Meyer, d'après W. Arveson**

Cet exposé présente un extrait du grand travail d'Arveson [1]. Il fait suite à une introduction à cet article par Patrick Ion en Juin 1992, qui nous a tous persuadés de son intérêt. L'exposé essaye d'expliquer par quel chemin, en partant d'un objet de nature très générale (un semi–groupe d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$), on aboutit naturellement à un espace de Fock du type utilisé en calcul stochastique non commutatif. Nous donnons les grandes lignes des démonstrations, en renvoyant à l'original pour certains détails.

**1. Endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.** Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Par endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ nous entendons toujours un $^*$–endomorphisme *normal,* c'est à dire continu pour la topologie faible de dualité avec les opérateurs à trace. Nous supposerons aussi qu'un tel endomorphisme préserve l'identité.

La structure des endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est donnée par l'énoncé suivant. Voir Parthasarathy [2], Prop. 29.5 p. 253, qui utilise de manière étonnante le théorème de Stone-von Neumann.

THÉORÈME. *Soit $\Theta$ un endomorphisme non nul de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il existe une famille (finie ou) dénombrable d'isométries orthogonales $V_n$ (i.e. $V_m^* V_n = \delta_{mn}$) telle que*

$$\Theta(A) = \sum\nolimits_n V_n A V_n^* \quad \textit{pour tout } A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \quad . \tag{1.1}$$

Trois remarques : 1) $\Theta(I) = I \Longrightarrow \sum_n V_n V_n^* = I$. 2) $\Theta$ est toujours injectif. 3) $\Theta$ est surjectif si et seulement si $\Theta(A) = UAU^*$ avec $U$ unitaire.

La remarque 1) est évidente. La remarque 2) vient du fait que $A = V_1^* \Theta(A) V_1$. Quant à 3), si $V_1$ est dans l'image de $\Theta$, soit $V_1 = \sum_n V_n A V_n^*$, on a $I = V_1^* V_1 = A V_1^*$, donc $V_1^*$ est injectif; comme son noyau est l'orthogonal de l'image (fermée) de $V_1$, $V_1$ est unitaire et il n'y a plus de place pour les autres.

*Désormais, nous excluons le cas où $\Theta$ est surjectif.*

**2. Espace hilbertien d'opérateurs associé à un endomorphisme.** Soit $\Theta$ un endomorphisme. On lui associe un espace d'opérateurs

$$\Phi(\Theta) = \{T : \forall A \ \ \Theta(A) T = TA\} \ . \tag{2.1}$$

Noter que les éléments de $\Phi^*$ sont caractérisés par la propriété $T\Theta(A) = AT$. Alors

THÉORÈME. *1) Si $S, T$ appartiennent à $\Phi(\Theta)$, $S^* T$ est un multiple de l'identité, que nous noterons $< S, T > I$.*

*2) L'application bilinéaire ainsi définie est un produit scalaire hilbertien sur $\Phi(\Theta)$.*

*3) Les isométries $V_n$ de (1.1) constituent une base orthonormale de $\Phi(\Theta)$.*

DÉMONSTRATION. 1) Soit $A$ arbitraire. Alors $(S^*T)A = S^*(TA) = S^*(\Theta(A)T) = (S^*\Theta(A))T = (AS^*)T = A(S^*T)$, donc $S^*T$ commute à tout opérateur, c'est un multiple de l'identité.

2) Il est clair que $< S,T >$ est une forme hermitienne, et comme $T^*T$ est positif, nul si et seulement si $T=0$, il est clair que $\Phi(\Theta)$ est préhilbertien séparé. Noter que tout élément de $\Phi$ de norme 1 est une isométrie. Ensuite, soit $(X_n)$ une suite de Cauchy ; les normes convergent, donc restent bornées, et il existe une suite extraite qui converge vers un opérateur $X$ pour la topologie faible des opérateurs ; on vérifie immédiatement que $X \in \Phi$. D'autre part, pour $S,T \in \Phi$ et $x,y \in \mathcal{H}$ on a $< Sx,Ty >=< S,T >< x,y >$, donc supposant $< x,y >\neq 0$ on voit que $< S,X_n >\to< S,X >$ pour tout $S \in \Phi$, et enfin la limite des $X_n$ dans le complété de $\Phi$ ne peut être que $X \in \Phi$. Par conséquent, $\Phi$ est complet.

3) Que les $V_n$ appartiennent à $\Phi(\Theta)$ est évident, et ils y sont orthogonaux. Si $W \in \Phi$ est orthogonal à tous les $V_n$, soit $V_n^*W = 0$ pour tout $n$, on a aussi $V_nV_n^*W = 0$, et $W = 0$ en sommant sur $n$. Inversement, on peut montrer que toute base orthonormale de $\Phi$ donne lieu à une représentation (1.1).

Si l'on remplace $\Theta(A)$ par $U\Theta(A)U^*$, $\Phi$ est remplacé par $U\Phi$.

THÉORÈME. *Soient $\Theta$ et $\Xi$ deux endomorphismes. Alors L'application $(S,T) \to ST$ envoie $\Phi(\Theta)\times\Phi(\Xi)$ dans $\Phi(\Theta\Xi)$. Comme elle est bilinéaire, elle définit une application linéaire de $\Phi(\Theta)\otimes\Phi(\Xi)$ dans $\Phi(\Theta\Xi)$, qui est un isomorphisme.*

DÉMONSTRATION. Si $\Theta(A)S = SA$ et $\Xi(B)T = TB$ quels que soient $A,B$, il est immédiat de vérifier que $\Theta(\Xi(A))\,ST = STA$ pour tout $A$. Si $S_1^*S_2 = aI$ et $T_1^*T_2 = bI$ on a $(S_1T_1)^*(S_2T_2) = (ab)\,I$, donc la composition définit une isométrie de $\Phi(\Theta)\otimes\Phi(\Xi)$ dans $\Phi(\Theta\Xi)$. Il reste à démontrer que le produit tensoriel de deux bases orthonormales des deux espaces est une base orthonormale du dernier. Or si l'on a $\Theta(A) = \sum_n V_nAV_n^*$ et $\Xi(A) = \sum_i W_iAW_i^*$ on a $\Theta(\Xi(A)) = \sum_{in}(V_nW_i)A(V_nW_i)^*$.

REMARQUE. Il est peut être intéressant de noter que l'application $(S,x) \longmapsto Sx$ de $\Phi(\Theta)\times\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ donne aussi lieu à un isomorphisme entre $\Phi\otimes\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}$.

**3. Systèmes–produits.** Nous considérons maintenant un *semi-groupe* $\Theta_t$ d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, que nous supposerons continu au sens suivant : pour $A$ fixe, $\Theta_t(A)$ est continu en $t$ pour la topologie faible des opérateurs. Nous poserons $\Phi(\Theta_t) = \Phi_t$, et nous allons dégager quelques propriétés de ces sous-espaces de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ — qui deviendront les axiomes des systèmes–produits abstraits. Le but d'Arveson (qui ne nous concerne pas directement ici) est d'utiliser les systèmes–produits ainsi associés aux semi-groupes d'endomorphismes pour classifier ceux-ci.

Voici le premier groupe de propriétés définissant les systèmes–produits :

1) *Pour chaque $t > 0$, nous avons un espace de Hilbert $\Phi_t$, et une "multiplication"(notée sans signe) de $\Phi_s\times\Phi_t$ dans $\Phi_{s+t}$, qui est associative. L'application linéaire de $\Phi_s\otimes\Phi_t$ dans $\Phi_{s+t}$ qui lui correspond est un isomorphisme d'espaces de Hilbert.*

On peut noter que la dimension de $\Phi_t$ est une fonction multiplicative, et ne peut donc prendre que les valeurs 1 et $\infty$ — mais par ailleurs le premier cas est exclu puisque les $\Theta_t$ ne sont pas surjectifs.

Le second groupe de propriétés est plus difficile à énoncer et à établir. Nous allons d'abord l'énoncer, puis expliquer la phrase, et l'établir pour le système associé à un semi-groupe.

2) *La famille $\Phi_t$ est une famille mesurable d'espaces de Hilbert, et la multiplication est mesurable.*

Cela signifie plusieurs choses : que l'ensemble somme des $\Phi_t$, c'est à dire la réunion des $\{t\} \times \Phi_t$ est munie d'une bonne structure mesurable, pour laquelle la projection $(t,T) \longmapsto T$ est mesurable, et (en un certain sens) le produit scalaire. Et d'autre part, qu'il existe des bases orthonormales de $\Phi_t$ dépendant mesurablement de $t$. Détaillons ces points.

Tout d'abord, la boule unité de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est compacte métrisable pour la topologie de dualité avec les opérateurs à trace — et pour la topologie faible des opérateurs, qui y induit la même topologie. Donc $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est un $\mathcal{K}_\sigma$ pour chacune de ces topologies, et admet une bonne structure borélienne (d'espace de Lusin), et il en est de même du produit $L = ]\,0,\infty\,[\times\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Dans cet espace, l'ensemble somme des $\Phi_t$ peut s'écrire comme

$$E = \{(t,T) : \forall A \ \ \Theta_t(A)T = TA\} \ .$$

Il est borélien, car il suffit de vérifier cette commutation sur les opérateurs de la forme $|x><y|$, $x,y$ parcourant un ensemble dénombrable dense dans $\mathcal{H}$. On munira donc $E$ de la structure mesurable induite.

Choisissons un couple de vecteurs $(x,y)$ tel que $<x,y>=1$. La fonction sur $L\times L$

$$((s,S);(t,T)) \longmapsto <Sx,Ty>$$

est borélienne. Sa restriction à $E\times E$ induit sur $\Phi_t\times\Phi_t$ le produit scalaire $<S,T>$, qui est donc borélien. De même, la fonction sur $L\times L$

$$((s,S);(t,T)) \longmapsto ST$$

est borélienne, d'après la relation $<x,STy>=<S^*x,Ty>$ et le caractère borélien de l'opération $^*$, et sa restriction à chaque $\Phi_t$ est la multiplication.

Cependant, il reste une condition délicate à vérifier dans la définition des familles mesurables d'espaces de Hilbert : l'existence de bases orthonormales de $\Phi_t$ dépendant mesurablement de $t$. Pour cela, Arveson démontre un lemme (non trivial) que nous admettrons ici :

LEMME. *Il existe une famille fortement continue d'unitaires $U_t$ telle que $\Theta_t(A) = U_t\Theta_1(A)U_t^*$.*

Alors $\Phi_t$ est l'ensemble des opérateurs $U_tS$ avec $S\in\Phi_1$, et cela préserve le produit scalaire. Par conséquent, on construit alors une famille mesurable de bases orthonormales des $\Phi_t$ en promenant une base orthonormale de $\Phi_1$.

**4. Un exemple : l'espace de Fock.** Nous allons maintenant étudier un exemple fondamental de système–produit.

Soit $\mathcal{K}$ un espace de Hilbert, et soit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+,\mathcal{K})$. Soit $\Phi$ l'espace de Fock symétrique sur $\mathcal{H}$. Soient $\mathbf{1}$ le vecteur vide, et pour $s<t$ $\Phi_t^s$ l'espace de Fock

sur $L^2(]s,t],\mathcal{K})$ ; en particulier $\Phi_t = \Phi_t^0$, $\Phi^t = \Phi_\infty^t$. Il est bien connu que $\Phi$ est isomorphe à $\Phi_s \otimes \Phi^s$, ou plus généralement à $\Phi_s \otimes \Phi_t^s \otimes \Phi^t$. On identifie généralement les $\Phi_t^s$ (et en particulier $\Phi_t, \Phi^t$) à des sous–espaces de $\Phi$, au moyen des applications $x \in \Phi_t^s \longmapsto \mathbf{1}_s \otimes x \otimes \mathbf{1}^t \in \Phi$.

La translation est un isomorphisme de $[0,\infty[$ sur $[t,\infty[$, qui induit une isométrie $\theta_t : \Phi \longmapsto \Phi^t$ ; nous définissons alors un semi-groupe $\Theta_t$ d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\Phi)$ par

$$\Theta_t(A)(f_t \otimes \theta_t g) = f_t \otimes \theta_t(Ag) \ . \tag{4.1}$$

Nous nous proposons de montrer que l'espace hilbertien d'opérateurs $\Phi(\Theta_t)$ s'identifie à $\Phi_t$ : précisément, tout opérateur $T \in \Phi(\Theta_t)$ est de la forme

$$Tg = \tau \otimes \theta_t g \quad \text{où } \tau \text{ est un élément fixe de } \Phi_t . \tag{4.2}$$

Nous remarquons d'abord qu'un opérateur de ce type appartient bien à $\Phi(\Theta_t)$, que l'adjoint d'un opérateur de ce type est de la forme

$$S^*(f_s \otimes \theta_t g) = < \sigma, f_s > g$$

et que $S^*Tg = < \sigma, \tau > g$ comme il convient. La réciproque est un peu moins évidente.

Considérons un vecteur normalisé $g$, et soit $(e_n)$ une base orthonormale de $\Phi$ telle que $e_1 = g$. Soit $(e'_m)$ une base orthonormale de $\Phi_t$, et développons

$$Tg = \sum\nolimits_{mn} \lambda_{mn}\, e'_m \otimes \theta_t e_n \ .$$

Nous avons alors, si $A$ est un opérateur tel que $Ag = g$, $\Theta_t(A)Tg = TAg = Tg$, or

$$\Theta_t(A)\,Tg = \sum\nolimits_{mn} \lambda_{mn}\, e'_m \otimes \theta_t A e_n \ .$$

Par conséquent, en prenant pour $A$ un opérateur de rang fini laissant fixe $e_1$, on voit que tous les $\lambda_{mn}$ avec $n \neq 1$ sont nuls. Autrement dit, $Tg$ est de la forme $u \otimes \theta_t g$ avec $u \in \Phi_t$ — et cela, quel que soit le vecteur $g$. Or on a le petit résultat suivant d'algèbre linéaire : si $E, F$ sont des espaces vectoriels, si tous les éléments d'un sous-espace $H \subset E \otimes F$ sont de la forme $f = a \otimes b$, alors ou bien $a$ est fixe, ou bien $b$ est fixe. Donc ici on a un opérateur de la forme $Tg = \tau \otimes \theta_t g$ avec un vecteur fixe $\tau \in \Phi_t$.

La multiplication d'Arveson, qui applique $\Phi_s \times \Phi_t$ dans $\Phi_{s+t}$, est alors l'application $(f_s, g_t) \longmapsto f_s \otimes \theta_s g_t$.

*Le problème résolu par Arveson est de caractériser les systèmes–produits isomorphes au modèle de Fock.*

Il faut souligner les propriétés spéciales du Fock rencontrées ci–dessus : en général, il n'y a aucune relation entre les $\Phi_t$. Ici, en utilisant les vecteurs vide $\mathbf{1}_t$ des $\Phi_t$, nous avons pu introduire une structure plus riche, comportant une relation d'inclusion entre les $\Phi_t$.

**5. Unités.** Etant donné un système–produit abstrait $(\Phi_t)$, Arveson appelle *unité* toute famille mesurable d'éléments $u_t \in \Phi_t$, non identiquement nulle et telle que $u_s u_t = u_{s+t}$. La fonction $t \longmapsto \| u_t \|$ est une solution mesurable de l'équation exponentielle, et donc de la forme $e^{t\lambda}$ ; remplaçant $u_t$ par $e^{-t\lambda}u_t$, on pourrait se borner à considérer des unités de norme 1. Dans la situation des systèmes–produits associés aux semi-groupes $\Theta_t$ d'endomorphismes de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, une unité de norme 1 correspond à un semi-groupe d'isométries $(U_t)$ tel que $\Theta_t(A)U_t = U_tA$ pour tout $t$ et tout $A$.

Le nom d'unité peut sembler bizarre : on aimerait appeler "exponentielles"ces familles de vecteurs. En fait, cela créerait beaucoup de confusion avec les vecteurs exponentiels usuels du Fock, et Arveson a été très sage de créer un nouveau nom.

*Le théorème principal d'Arveson dit qu'un système–produit est du type Fock si, et seulement s'il admet "suffisamment"d'unités.* Arveson mentionne l'existence (établie par Powers), d'un système–produit associé à un semi–groupe d'endomorphismes et n'admettant *aucune* unité.

Le lemme suivant est très important.

LEMME 1. *Soient $(u_t)$ et $(v_t)$ deux unités. Alors le produit scalaire $<u_t, v_t>$ est une exponentielle $e^{t\gamma}$.*

DÉMONSTRATION. Appelons $f(t)$ ce produit scalaire. Il est immédiat que $f$ est mesurable et que $f(s+t) = f(s)f(t)$. Il suffit donc de démontrer que $f(0+) \neq 0$. On se ramène au cas où $u, v$ sont des unités de norme hilbertienne égale à 1. Considérons l'espace de Hilbert $\mathcal{G}$ des "processus mesurables adaptés" $\varphi_t \in \Phi_t$ tels que $\int_0^\infty \|\varphi_t\|^2 dt < \infty$. On peut montrer que $\mathcal{G}$ est *séparable*. Nous faisons opérer $x \subset \Phi_r$ sur le "processus" $\varphi = (\varphi_t)$ en posant

$$(T(x)\varphi)_t = 0 \quad \text{si } t \leq r\,, \; x\cdot\varphi_{t-r} \text{ si } t > r\,.$$

On définit ainsi une *représentation* du système–produit, *i.e.* $T(x)T(y) = T(x\cdot y)$. De plus, si $x$ est de norme 1 $T(x)$ est isométrique. En particulier posons $U_t = T(u_t)$ ; nous définissons ainsi un semi–groupe d'isométries de $\mathcal{G}$, qui est *mesurable* et donc *fortement continu.* Soit de même $V_t = T(v_t)$. Alors si $\varphi$ est de norme 1, on vérifie que

$$<U_t\varphi, V_t\varphi> = <u_t, v_t>$$

tend lorsque $t \to 0$ vers $<\varphi, \varphi> = 1$.

**6. Unités du Fock.** Rappelons la notation $\mathcal{E}(h)$ pour désigner le vecteur exponentiel du Fock associé à $h \in \mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{K})$. En particulier, pour $\xi \in \mathcal{K}$ le vecteur $\xi I_{[0,t[}$ (on a omis le signe $\otimes$) appartient à $\mathcal{H}$, et nous poserons

$$e_t(\xi) = \mathcal{E}(\xi I_{[0,t[})\,. \tag{6.1}$$

Cette famille est une unité du Fock, et pour $\xi = 0$ on trouve le vide, ou plutôt la famille $\mathbf{1} = \mathbf{1}_t$, qui a aussi une norme hilbertienne égale à 1. Pour alléger le langage, nous dirons que les unités du type (6.1) sont les *unités spéciales* du Fock. Ces unités sont *normalisées*, non pas au sens de la norme hilbertienne, mais au sens du produit scalaire $<\mathbf{1}_t, e_t(\xi)>$ qui a la valeur 1 — cette notion est propre au Fock, puisqu'elle fait intervenir le vide.

Dans le cas de deux unités du Fock de la forme $u_t = e^{t\lambda}e_t(\xi)$, $v_t = e^{t\mu}e_t(\eta)$, on a

$$<v_t, u_t> = e^{t(\overline{\mu}+\lambda+<\eta,\xi>)}\,. \tag{6.2}$$

Arveson a démontré le théorème suivant, qui devrait être classique en théorie de l'espace de Fock (on devrait plus généralement savoir caractériser tous les "vecteurs multiplicatifs", homogènes ou non), mais qui ne l'est pas :

THÉORÈME. *Toute unité du Fock est de la forme*

$$u_t = e^{ct}\, e_t(\xi)\ , \quad (c \in \mathbb{C}\,, \xi \in \mathcal{K})\ . \tag{6.3}$$

Nous allons établir ce résultat par une démonstration probabiliste, différente de celle d'Arveson.

Nous nous plaçons dans l'interprétation brownienne de l'espace de Fock — autrement dit, $\Phi = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, l'espace probabilisé engendré par une famille dénombrable de mouvements browniens indépendants $(X_t^\alpha)$, en bijection avec une base orthonormale $e^\alpha$ de $\mathcal{K}$. L'espace $\Phi_t$ devient $L^2(\mathcal{F}_t)$, Le vecteur vide devient la fonction $1$, et la fonctionnelle $< \mathbf{1}, \cdot >$ l'espérance $\mathbb{E}[\,\cdot\,]$. Dans ces conditions, soit $(u_t)$ une unité normalisée. Chaque $u_t$ se lit comme une v.a. de carré intégrable, $\mathcal{F}_t$-mesurable, et le processus $(u_t)$ est un ***processus à accroissements multiplicatifs indépendants et homogènes*** par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$. La normalisation $\mathbb{E}[u_t] = 1$ entraîne que ce processus est une ***martingale***. On peut donc en choisir une modification à trajectoires càdlàg.. D'après le théorème de convergence des martingales, elle admet une limite p.s. en $t = 0$ qui (la tribu $\mathcal{F}_{0+}$ étant dégénérée) ne peut être que $1$. Un processus à accroissements multiplicatifs indépendants et homogènes est un processus de Markov dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$, admettant 0 comme état absorbant : l'homogénéité multiplicative entraîne que la probabilité de transition $P_t(x, \{0\})$ ne dépend pas de $x$ pour $x \neq 0$. Ensuite, la propriété de Markov entraîne que $\pi(s) = P_s(x, \{0\})$ satisfait à

$$\pi(s+t) = \pi(s) + (1 - \pi(s))\,\pi(t) \quad \text{d'où} \quad \pi(s) = 1 - e^{-\lambda s}\ .$$

Ensuite, si $S$ est le temps de première rencontre de $0$, on a

$$\mathbb{P}\{S \le t \,|\, \mathcal{F}_s\} = I_{\{S \le s\}} + I_{\{S > s\}} e^{-\lambda(t-s)}$$

donc $S$ est un temps exponentiel dans la filtration brownienne, et ***il n'existe pas de tel temps d'arrêt.*** Donc le processus ne rencontre jamais $0$. C'est donc un p.a.i. sur le groupe multiplicatif $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$. Or les sauts d'un p.a.i. sont totalement inaccessibles, et il n'y a pas de temps d'arrêt totalement inaccessibles dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$ — donc ce p.a.i. est continu, on peut prendre son logarithme, qui est un p.a.i. additif continu à valeurs dans $\mathbb{C}$, issu de $0$, donc un processus gaussien, etc. Pour finir c'est un processus de la forme

$$ct + \sum\nolimits_\alpha c_\alpha X_t^\alpha \quad \text{où les } c_\alpha \text{ sont des constantes.}$$

Mais alors il est clair que $(u_t)$ est une unité spéciale.

**7. Caractérisation de l'espace de Fock.** Considérons $n$ unités $v^1, \ldots, v^n$, $n$ indices $s_1, \ldots, s_n$ de somme $t$ ; alors le produit $v^1_{s_1} v^2_{s_2} \ldots v^n_{s_n}$ est un élément de $\Phi_t$. Nous noterons $\Phi_t^\circ$ l'espace vectoriel engendré par les produits de ce type. Sur le Fock et lorsque les $v^i$ sont des vecteurs exponentiels homogènes, cela correspond à la valeur en $t$ du vecteur exponentiel associé à une fonction étagée. Par conséquent, LEMME 2. *Dans le cas du Fock, $\Phi_t^\circ$ est dense dans $\Phi_t$.*

Le théorème principal d'Arveson est la réciproque de ce résultat. Avec les notations précédentes :

THÉORÈME. *Un système produit est isomorphe à l'espace de Fock si et seulement si $\Phi_t^\circ$ est dense dans $\Phi_t$ (pour tout $t$).*

REMARQUE. Il me semble clair (mais je n'ai pas vérifié les détails) qu'en général les adhérences $\Phi_t^* = \overline{\Phi_t^\circ}$ constituent un système–produit, qui admet les mêmes unités que le précédent, et qui est le plus grand système–produit du type Fock contenu dans $\Phi_t$.

La démonstration de ce théorème est très ingénieuse, et pas du tout facile. Nous allons en indiquer les grandes lignes, en commençant par quelques constructions préparatoires.

a) Une première étape consiste à se donner une unité de norme hilbertienne 1, qui va jouer le rôle du vecteur vide. Aussi la noterons nous $\mathbf{1}_t \in \Phi_t$. Pour $s < t$ nous identifions $x_s \in \Phi_s$ à $x_s \cdot \mathbf{1}_{t-s} \in \Phi_t$. Ces identifications sont compatibles : cela signifie que $x_s \mathbf{1}_{t-s} \mathbf{1}_{u-t} = x_s \mathbf{1}_{u-s}$, *i.e.* la multiplicativité de $\mathbf{1}$.

On a construit ainsi une famille croissante d'espaces de Hilbert $\Phi_t$. On peut si on le désire les plonger dans un gros espace $\Phi$ qui est le complété de leur réunion. On peut aussi considérer leur intersection $\Phi_0$, qui doit être triviale (mais cela ne semble pas évident).

L'introduction du vecteur vide permet de normaliser les unités.

b) On cherche à établir une correspondance biunivoque entre les unités $(u_t)$ et les éléments $(\lambda, \xi)$ de $\mathbb{C} \times \mathcal{K}$ (où $\mathcal{K}$ est un certain espace de Hilbert) dans laquelle $u_t = e^{\lambda t}\mathcal{E}(\xi I_{[0,t[})$. L'idée naturelle de départ consiste à prendre pour $\mathcal{K}$ l'ensemble $\mathcal{U}$ des unités normalisées lui même (le coefficient $\lambda$ se lit sur la normalisation), le "produit scalaire" de deux unités normalisées (noté $\gamma(v,u)$ pour éviter des confusions) étant défini par

$$(7.1) \qquad < v_t, u_t > = e^{t\gamma(v,u)} .$$

Il est facile de voir que cette fonction est ***conditionnellement de type positif*** sur $\mathcal{U}$, et il est alors tout à fait classique qu'il existe une application canonique $\sigma$ de $\mathcal{U}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{K}$, tel que pour $u, v \in \mathcal{U}$ on ait $\gamma(v,u) = <\sigma(v), \sigma(u)>_{\mathcal{K}}$. La normalisation fait que $\gamma(\mathbf{1}, u) = 0$ pour tout $u$, donc $\sigma(\mathbf{1}) = 0$. D'autre part, il résulte aisément de l'hypothèse de densité de $\Phi_t^\circ$ dans $\Phi_t$ qu'une unité $u$ est uniquement déterminée par la fonction $\gamma(\cdot, u)$ ; donc l'application $\sigma$ est injective.

c) Le principal problème est maintenant de montrer qu'en fait $\sigma$ est une bijection de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{K}$. Pour cela, on voudrait savoir lire sur $\mathcal{U}$ les opérations de $\mathcal{K}$, l'addition et la multiplication par un scalaire. Mais on ne sait pas "multiplier" les unités ! Arveson est parvenu à donner aux unités au moins une structure ***convexe***.

L'idée qui intervient est la suivante : considérons deux fonctions $a, b$ de $L^2([0,1])$ (par exemple). Considérons la $n$-ième partition dyadique de $[0,1]$, et la fonction $c_n$ égale à $a$ sur les intervalles impairs, à $b$ sur les intervalles pairs. Alors lorsque $n \to \infty$, $c_n$ ***converge faiblement vers*** $(a+b)/2$. Plus généralement, si on partage chaque intervalle en deux dans le rapport $(p, 1-p)$ au lieu de $(1/2, 1/2)$, $c_n$ converge faiblement vers $pa + (1-p)b$.

On prend alors deux unités $u, v$ (non nécessairement normalisées), et on pose

$$w_n(t) = (u_{t/2^{n+1}} v_{t/2^{n+1}})^{2^n} \in \Phi_t \ . \tag{7.2}$$

On montre que $w_n(t)$ converge faiblement en vérifiant 1) qu'il reste borné en norme (ce qui est facile) 2) que le produit scalaire de $w_n(t)$ avec n'importe quel produit

$$\pi_t = u^1_{r_1 t} u^2_{r_2 t} \ldots u^k_{r_k t} \tag{7.3}$$

admet une limite, où les $u^i$ sont des unités arbitraires, et les $s_i$ sont des éléments dyadiques de $[0,1]$ de somme égale à 1 — en effet, le sous–espace fermé de $\Phi_t$ engendré par les produits (7.3) contient $w_n(t)$ pour tout $t$ : il n'est pas nécessaire d'utiliser l'hypothèse de densité pour cela. Alors en utilisant la remarque ci dessus, on trouve que $< \pi_t, w_n(t) >$ tend vers $\prod_i e^{s_i(\gamma(u^i,v)+\gamma(u^i,u))/2}$.

On montre alors sans problème que les limites $w_t$ des $w_n(t)$ constituent une unité. Arveson note $[uv]$ l'unité $w$. Dans le cas du Fock, $v$ et $u$ étant de la forme $e^{\mu t}\mathcal{E}(\eta I_{[0,t[})$ et $e^{\lambda t}\mathcal{E}(\xi I_{[0,t[})$, les paramètres de $w$ seraient $(\lambda+\mu)/2$, $(u+v)/2$.

d) On peut maintenant achever la démonstration : On construit l'espace de Fock sur $\mathcal{K}$, que nous notons $\Psi$, et le système produit correspondant. On a un homomorphisme injectif de $\Phi_t$ dans $\Psi_t$, et il s'agit de savoir si c'est un isomorphisme. On est donc ramené au problème suivant sur l'espace de Fock. On part d'un ensemble $\mathcal{U} \subset \mathcal{K}$ qui contient $0$, qui est convexe et engendre $\mathcal{K}$ au sens hilbertien. Soit $\Sigma_t$ l'espace hilbertien engendré par l'ensemble des vecteurs exponentiels de $\Psi_t$ de la forme $\mathcal{E}(h)$, où $h$ est sur $[0,t]$ une fonction étagée à valeurs dans $\mathcal{U}$. *A-t-on alors* $\Sigma_t = \Psi_t$ *?*

On fait la remarque suivante : les coefficients du développement en chaos de $\mathcal{E}(h)$ se calculent au moyen des dérivées successives de $\mathcal{E}(rh)$ pour $r=0$. Or la courbe $r \longmapsto \mathcal{E}(rh)$ est tracée dans $\Sigma_t$ pour $r \in [0,1]$, et cela suffit pour calculer ces dérivées, qui appartiennent donc à $\Sigma_t$. Mais alors, en sommant la série exponentielle, on voit que $\mathcal{E}(rh)$ appartient à $\Sigma_t$ pour tout $r \in \mathbb{C}$. Alors la convexité de $\mathcal{U}$ entraîne que $\Sigma_t$ contient les vecteurs $\mathcal{E}(h)$, où $h$ parcourt un *espace vectoriel dense dans* $\mathcal{K}$. L'application exponentielle étant continue, la démonstration est finie.

RÉFÉRENCES

[1] ARVESON (W.). *Continuous Analogues of Fock space, Memoirs A.M.S.* n° 409, vol. 80, 1989.

[2] PARTHASARATHY (K.R.). *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus,* Birkhäuser 1992.