

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PIERRE VALLOIS

Amplitude du mouvement Brownien et juxtaposition des excursions positives et négatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 361-373

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__361_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

AMPLITUDE DU MOUVEMENT BROWNIEN ET JUXTAPOSITION DES EXCURSIONS
POSITIVES ET NEGATIVES

Pierre VALLOIS

Laboratoire de Probabilités , Tour 56 , 3ème étage , 4 place Jussieu , 75252 Paris Cédex 05.

Introduction.

1°) Il est apparu une identité en loi mettant d'une part en jeu , le processus de l'amplitude du mouvement brownien , et d'autre part , la somme de la valeur absolue du mouvement brownien et de son temps local en 0 . Le but de cet article est d'en fournir une explication probabiliste.

a) Soit $(B_t ; t \geq 0)$ un mouvement brownien réel issu de 0. On note $(S_t ; t \geq 0)$ et $(I_t ; t \geq 0)$ les processus du maximum et du minimum :

$$S_t = \max_{0 \leq u \leq t} B_u , I_t = \min_{0 \leq u \leq t} B_u , t \geq 0.$$

S-I est le processus de l'amplitude de $(B_t ; t \geq 0)$; ce processus a été étudié par Feller ([F]) et Imhof ([I1]) et vient de faire l'objet d'études plus récentes ([I2]) , [V3]).

Le processus S-I est croissant et continu ; désignons par $(\theta(t) ; t \geq 0)$ son inverse continu à gauche, i.e. :

$$\theta(c) = \inf\{t \geq 0 ; S_t - I_t = c\} , c \geq 0.$$

Remarquons que , par scaling , $\theta(c) \stackrel{(d)}{=} c^2 \theta(1)$.

La loi de la v.a. $\theta(2)$ est connue ([I1], [V3]) :

$$(1) \quad \theta(2) \stackrel{(d)}{=} \xi_1 + \xi_2 ,$$

où ξ_1 et ξ_2 sont deux v.a. indépendantes, de même loi et

$$\xi_1 \stackrel{(d)}{=} \inf\{t \geq 0 ; |B_t| = 1\} .$$

b) Soit $(L_t ; t \geq 0)$ le temps local en 0 de $(B_t ; t \geq 0)$. Nous introduisons trois familles de temps d'arrêt , formées respectivement de :

$$U(c) = \inf\{t \geq 0 ; |B_t| + (1/2) L_t = c\} , V(c) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ + (1/2) L_t = c\} \text{ et}$$

$$W(c) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ + (1/2) L_t = c \text{ ou } B_t^- + (1/2) L_t = 2c\} , \text{ où } c > 0 .$$

Par scaling : $U(c) \stackrel{(d)}{=} c^2 U(1)$, $V(c) = c^2 V(1)$ et $W(c) = c^2 W(1)$.

Notons pour simplifier : $\theta = \theta(2)$, $U = U(2)$, $V = V(2)$ et $W = W(1)$.

La loi de chacune des trois v.a. U , V et W se déduit aisément de ([JY]) .

Théorème 1. On a les trois identités en loi :

$$(2) \quad (i) U \stackrel{(d)}{=} \theta \quad ; \quad (ii) V \stackrel{(d)}{=} \zeta + \xi_1 \quad ; \quad (iii) W \stackrel{(d)}{=} \xi_1 \quad ,$$

où ζ est une v.a. stable de paramètre $1/2$, indépendante de ξ_1 .

c) L'égalité en loi (2) (i) est remarquable et semble au premier abord assez mystérieuse . Pour établir (2) (i) , nous montrons plus généralement (théorème 2) qu'en "juxtaposant" les excursions positives et négatives , la loi de $(B_t ; 0 \leq t \leq U)$ est transformée en celle de $(B_t ; 0 \leq t \leq \theta)$. En particulier , U et θ ont même loi . En ce qui concerne (2) (ii), on "juxtapose" les excursions négatives et une partie seulement des excursions positives pour obtenir une trajectoire brownienne arrêtée au premier temps d'atteinte de 1 (théorème 3) .

Quant à (2) (iii) , la question est ouverte.

2°) Se mettent en évidence les processus $(B_t^+ + (1/2)L_t ; t \geq 0)$, $(B_t^- + (1/2)L_t ; t \geq 0)$ et $(|B_t| + (1/2)L_t ; t \geq 0)$. Bertoin a étudié les deux premiers processus, ([B]). On peut d'ailleurs montrer (2) (i) via l'étude de Bertoin, ce qui fournit une troisième preuve de (2) (i) !

Signalons également que Le Gall et Yor ([LY]) se sont intéressés aux processus des temps locaux de $(|B_t| + \gamma L_t ; t \geq 0)$, où γ est un réel positif donné.

3°) Introduisons plus généralement $\mathcal{T}(h,k)$ le temps d'arrêt défini par :

$$\mathcal{T}(h,k) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ = h(L_t) \text{ ou } B_t^- = k(L_t)\} \quad ,$$

où h et k sont deux fonctions boréliennes positives .

On note $\mathcal{T}(h) = \mathcal{T}(h,h)$.

Remarquons que d'après l'identité en loi de Lévy on a :

$$\mathcal{T}(h) \stackrel{(d)}{=} \inf\{t \geq 0 ; B_t = S_t - h(S_t)\} \quad .$$

Soit Γ (resp. Γ_{sym}) l'ensemble des temps d'arrêt de la forme $\mathcal{T}(h,k)$ (resp. $\mathcal{T}(h)$) .

La famille Γ a été étudiée par Jeulin et Yor ([JY]) et joue un rôle essentiel dans certaines résolutions "explicites" du problème de Skorokhod pour le mouvement brownien ([AY] , [V1]) .

Lorsque l'on choisit h et k affines , mis à part les trois cas précédents ,

on peut identifier facilement les lois des trois temps d'arrêt $\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1$ et \mathcal{T}_2 , où :

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}(h_1) ; 0 \leq i \leq 2, h_0 \equiv 1, h_1(x) = x+1 \text{ et } h_2(x) = (1-x)^+ .$$

Il est clair que $\mathcal{T}_0 = \inf\{t \geq 0 ; |B_t| = 1\}$. Afin de caractériser la loi de \mathcal{T}_1 et de \mathcal{T}_2 , rappelons le théorème de Pitman ([P]) :

(3) Le processus $(|B_t| + L_t ; t \geq 0)$ (resp. $(2S_t - B_t ; t \geq 0)$) est un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0 .

D'après l'identité en loi de Lévy, le processus $(|B_t| - L_t ; t \geq 0)$ un mouvement brownien issu de 0, par conséquent :

(4) \mathcal{T}_1 (resp. \mathcal{T}_2) a même loi que le premier instant où un mouvement brownien (resp. processus de Bessel de dimension 3), issu de 0, atteint le niveau 1.

1. Etude de la famille Γ .

Notations.

Nous conservons les notations de l'introduction. Soit $T(x)$ (resp. T_x^* ; $\tau(x)$) le premier instant où le processus $(B_t ; t \geq 0)$ (resp. $(|B_t| ; t \geq 0)$; $(L_t ; t \geq 0)$) atteint le niveau x . Rappelons que pour tous $x \geq 0$ et $\lambda \geq 0$, on a :

(1.1) (i) $E[\exp - \lambda^2 T_x^* / 2] = 1 / \text{ch}(\lambda x)$

(ii) $E[\exp - \lambda^2 T(x) / 2] = E[\exp - \lambda^2 \tau(x) / 2] = \exp(-\lambda x)$

$(R_t ; t \geq 0)$ désigne un processus de Bessel de dimension 3, issu de zéro et $T_x(R)$ le premier instant où $(R_t ; t \geq 0)$ atteint $x > 0$.

Soient a, b, a', b' quatre réels tels que $a > 0, a' > 0$. On note

$\delta = (a/(-b)^+) \wedge (a'/(-b')^+)$ où x^+ désigne la partie positive de x ; on fait la convention $1/0 = +\infty$.

Proposition 1. Soit $U' = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ \geq a + bL_t \text{ ou } B_t^- \geq a' + b'L_t\}$. Alors :

(1.2) $E[\exp - (\lambda^2 U' / 2)] =$

$$\frac{\lambda}{2} \int_0^\delta \left\{ \frac{1}{\text{sh } \lambda(a+bx)} + \frac{1}{\text{sh } \lambda(a'+b'x)} \right\} \left(\frac{\text{sh } \lambda(a+bx)}{\text{sh } \lambda a} \right)^{-1/2b} \left(\frac{\text{sh } \lambda(a'+b'u)}{\text{sh } \lambda a'} \right)^{-1/2b'} dx .$$

Preuve.

Nous appliquons la proposition (4.4) de [JY], il vient :

$E[\exp(-\lambda^2 U'/2) | (B_{U'}, L_{U'})] = (\lambda B_{U'} / \text{sh}(\lambda B_{U'})) \exp f(L_{U'})$, avec

$$f(x) = [f_1(x) - \lambda \int_0^x \{\coth(\lambda(a+bs)) + \coth(\lambda(a'+b's))\} ds] / 2,$$

$$\text{et } f_1(x) = \int_0^x \{1/(a+bu) + 1/(a'+b'u)\} du.$$

Rappelons également que $P(B_{U'} > 0 | L_{U'} = x) = 1/[(a+bx)\{1/(a+bx) + 1/(a'+b'x)\}]$,

et $P(L_{U'} \geq x) = \exp(-f_1(x)/2)$.

Un calcul immédiat conduit à la formule (1.2). □

Remarques. 1°) Si $b = 0$, $\left(\frac{\text{sh } \lambda(a+bx)}{\text{sh } \lambda a}\right)^{-1/2b}$ est à remplacer par sa limite

lorsque b tend vers 0, c'est à dire $\exp(-\lambda x \coth(\lambda a)/2)$.

2°) Soient $a = 1$, $a' = 2$, $b = b' = -1/2$ et $\lambda \geq 0$. Une application directe de (1.2) conduit à :

$$E(\exp - \frac{\lambda^2}{2} W) = \frac{\lambda}{\text{sh } \lambda \text{ sh } 2\lambda} \int_0^2 \text{sh}(\lambda u) du = \frac{\text{ch } 2\lambda - 1}{\text{sh } \lambda \text{ sh } 2\lambda} = \frac{1}{\text{ch } \lambda}, \quad \lambda \geq 0.$$

3°) Soient $a = 2$, $b = -1/2$ et $b' = 0$; le temps d'arrêt V est la limite presque sûre de U' , lorsque a' tend vers $+\infty$, d'où

$$E[\exp(\lambda^2 V/2)] = e^{-\lambda} / \text{ch } \lambda, \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

4°) Lorsque $a = a'$ et $b = b'$, on a $U' = \inf\{t \geq 0; |B_t| = a + b L_t\}$,

$$E[\exp(\lambda^2 U'/2)] = \lambda (\text{sh } \lambda a)^{1/b} \int_0^\delta \left(\text{sh}(\lambda(a+bx))\right)^{-1-1/b} dx.$$

De plus :

$(|b|/a) L_{U'}$, a pour loi $\beta^{(2)}(1, 1/b)$ (resp. $\beta(1, -1/b)$) lorsque $b > 0$ (resp.

$b < 0$),

où $\beta(u, v)(dx) = (1/B(u, v)) x^{u-1} (1-x)^{v-1} 1_{\{0 < x < 1\}} dx$,

$\beta^{(2)}(u, v)(dx) = (1/B(u, v)) x^{u-1} / (1+x)^{v+u} 1_{\{x > 0\}} dx$,

$B(u, v) = \Gamma(u)\Gamma(v)/\Gamma(u+v)$, $u > 0$ et $v > 0$.

En particulier,

$$E[\exp(-\lambda^2 U/2)] = 1/\text{ch}^2 \lambda, \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

Compte tenu de (1.1), le théorème 1 est démontré.

Soit $\delta \in]0, +\infty]$ et h une fonction borélienne définie sur $[0, \delta[$, et strictement

positive. On note $g = 1/h$ et $G(x) = \int_0^x g(u) du$; $x \geq 0$.

Nous supposons de plus que $G(x) < +\infty$ pour tout x de $[0, \delta[$ et $G(\delta-) = +\infty$ où $G(\delta-) = \lim_{x \rightarrow \delta} G(x)$.

Rappelons que d'après [JY], on a : $\mathcal{T}(h) < +\infty$ p.s. et $\mathcal{T}(h) < \tau(\delta)$.

Proposition 2. Les deux v.a. $\mathcal{T}(h)$ et $\int_0^{T^*} \{1/g^2(G^{-1}(L_s))\} ds$ ont même loi.

Preuve.

Soit $M_t = g(L_t)B_t$; $t \geq 0$. Le processus $(M_t ; t \geq 0)$ est une martingale locale continue dont le temps local en 0 est $(G(L_t) ; t \geq 0)$ ([Y1], théorème 1).

De plus $M_t = \int_0^t g(L_u) dB_u$. Par changement de temps, nous pouvons écrire :

$M_t = \beta(A(t))$ où $(\beta(t) ; t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel issu de 0 et

$$A(t) = \langle M \rangle_t = \int_0^t g^2(L_u) du.$$

Notons $(\ell(t) ; t \geq 0)$ le temps local en 0 de $(\beta_t ; t \geq 0)$. Nous avons :

$$(1.3) \quad G(L_t) = \ell(A(t)) ; \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Posons pour simplifier $T = \mathcal{T}(h)$. On a : $T = \inf\{t \geq 0, |M_t| = 1\}$.

La fonction $t \rightarrow A(t)$ est strictement croissante, il est clair que $A(T) = \sigma$ où $\sigma = \inf\{t \geq 0, |\beta(t)| = 1\}$. D'où

$$(1.4) \quad L_T = G^{-1}(\ell(\sigma)).$$

$$\text{Mais } \frac{dA^{-1}(t)}{dt} = 1 / \left(\frac{dA}{dt} (A^{-1}(t)) \right) = 1/g^2(L_{A^{-1}(t)}) = 1/g^2(G^{-1}(\ell(t))).$$

$$\text{On en déduit } T = A^{-1}(\sigma) = \int_0^\sigma \{1/g^2(G^{-1}(\ell(t)))\} dt. \quad \square$$

Remarques. 1°) L'approche précédente est inspirée de Yor ([Y2]).

En utilisant la même approche, via le balayage, signalons un résultat voisin obtenu par ([RY], exercice (4.18), p 248) :

$$\int_0^{T(G(a))} \{1/g^2(G^{-1}(S_u))\} 1_{\{B_u > 0\}} du \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(a)} 1_{\{B_u > \varphi(S_u)\}} du,$$

où $\varphi(x) = x - G(x)/g(x)$.

2°) Considérons $\mathcal{T}_+(h) = \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ = h(L_t)\}$. Une étude analogue montrerait :

$$(1.5) \quad \mathcal{T}_+(h) \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(1)} \{1/g^2(G^{-1}(L_s))\} ds .$$

3°) Soit μ une probabilité sur \mathbb{R} possédant un moment d'ordre 1, et symétrique (i.e. $\mu[0, x] = \mu[-x, 0] ; \forall x \geq 0$) . Pour simplifier nous supposons que μ ne charge pas les points. Soit $T = \mathcal{T}(h)$; on cherche une fonction h , croissante, telle que B_T ait pour loi μ .

Compte tenu de l'égalité $|B_T| = h(L_T)$ et de (1.4), on a :

$$P(|B_T| \geq x) = P(\ell(\sigma) \geq G(h^{-1}(x))) , \text{ pour tout } x \geq 0 .$$

Or $\ell(\sigma)$ suit une loi exponentielle de paramètre 1 ; par conséquent,

$$(1.6) \quad \nu[x, +\infty[= \exp - G(h^{-1}(x)) = \exp - \int_0^x (1/u) dh^{-1}(u) ,$$

où $\nu[x, +\infty[= P(|B_T| \geq x)$.

On différencie (1.6), il vient : $d\nu(x)/\nu[x_1, +\infty[= (1/x) dh^{-1}(x)$. D'où :

$$(1.7) \quad h^{-1}(x) = \int_0^x \{t/(\mu] -\infty, t] + \mu[t, +\infty[)\} dt ; \forall x \geq 0 .$$

Ceci fournit, lorsque μ est symétrique et sans atomes, une expression explicite de h en fonction de μ ; nous retrouvons les formules obtenues dans le cas général par ([V1], lemme 3.5) .

Nous donnons à présent deux applications de la proposition 2.

Proposition 3. On a :

$$(1.8) \quad \begin{aligned} & \text{(i) } \int_0^{T_1^*} \exp(-2L_t) dt \stackrel{(d)}{=} T_1(R) ; \quad \text{(ii) } \int_0^{T_1^*} \exp(2L_t) dt \stackrel{(d)}{=} T(1) ; \\ & \text{(iii) } V(1) \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(1)} \exp(-L_t) dt ; \quad \text{(iv) } U(1) \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T_1^*} \exp(-L_t) dt . \end{aligned}$$

Preuve.

Soient $h_0(x) = a+bx$ avec $a>0$, $b \neq 0$, $\delta = a/(-b)^+$, $g_0 = 1/h_0$ et

$$G_0(x) = \int_0^x g_0(u) du ; x < \delta . \text{ Alors } G_0^{-1}(x) = (a/b)(e^{bx}-1) \text{ et}$$

$1/g_0^2(G_0^{-1}(x)) = a^2 e^{2bx}$. Il suffit alors d'appliquer (3), (1.5), le théorème 1

et la proposition 2, pour établir (1.8) . \square

La proposition 3 nous incite à déterminer la loi des v.a. \mathcal{E}^λ et \mathcal{E}_+^λ où :

$$\mathcal{E}^\lambda = \int_0^{T_1^*} \exp(\lambda L_t) dt \quad , \quad \mathcal{E}_+^\lambda = \int_0^{T(1)} \exp(\lambda L_t) dt \quad \text{et } \lambda \in \mathbb{R} .$$

Plus généralement , pour toute fonction borélienne φ , définie sur \mathbb{R}_+ et localement bornée , on introduit les deux v.a. :

$$\mathcal{E}(\varphi) = \int_0^{T_1^*} \varphi(L_t) dt \quad , \quad \mathcal{E}_+(\varphi) = \int_0^{T(1)} \varphi(L_t) dt .$$

Soit ψ la fonction définie par $\psi(x) = \int_0^x \sqrt{\varphi(t)} dt$, $x \geq 0$.

Proposition 4 . La v.a. $\mathcal{E}(\varphi)$ (resp. $\mathcal{E}_+(\varphi)$) a même loi que $\mathcal{T}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{T}_+(\gamma)$) ,

où $\gamma(x) = \sqrt{\varphi(\psi^{-1}(x))}$, $x \geq 0$.

Preuve

On pose $h(x) = \sqrt{\varphi(\psi^{-1}(x))}$ $x \geq 0$, et $g = 1/h$. Alors :

$$G(x) = \int_0^x (\varphi(\psi^{-1}(t)))^{-1/2} dt = \int_0^{\psi^{-1}(x)} (\varphi(u))^{-1/2} d\psi(u) = \psi^{-1}(x) .$$

On en déduit $1/g^2(G^{-1}(x)) = \varphi(x)$ pour tout $x \geq 0$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2. □

Remarques . 1°) Lorsque $\varphi(x) = e^{\lambda x}$, on a $\gamma(x) = 1 + \lambda x/2$; donc :

(1.9) \mathcal{E}^λ (resp. \mathcal{E}_+^λ) a même loi que $\mathcal{T}(\gamma)$ (resp. $\mathcal{T}_+(\gamma)$) .

2°) Quand $\varphi(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > -2$, on a $\gamma(x) = (\beta x)^{\alpha/2\beta}$, où $\beta = 1 + \alpha/2$; d'où :

$$(1.10) \quad \inf\{t \geq 0 ; |B_t| = (\beta L_t)^{\alpha/2\beta}\} \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T_1^*} (L_t)^\alpha dt ,$$

$$(1.10)_+ \quad \inf\{t \geq 0 ; B_t^+ = (\beta L_t)^{\alpha/2\beta}\} \stackrel{(d)}{=} \int_0^{T(1)} (L_t)^\alpha dt .$$

2. Décompositions trajectorielles.

Notations.

1°) Soient $A_+(t) = \int_0^t 1_{\{B_u > 0\}} du$, $A_-(t) = \int_0^t 1_{\{B_u < 0\}} du$; $t \geq 0$.

α_+ (resp. α_-) désigne l'inverse continu à droite de A_+ (resp. A_-).

On introduit Y_+ et Y_- les deux processus :

$$Y_+ = (Y_+(t) = (B^+ + (1/2)L)(\alpha_+(t)) ; t \geq 0) ,$$

$$Y_- = (Y_-(t) = (B^- + (1/2)L)(\alpha_-(t)) ; t \geq 0) .$$

2°) On désigne par $\mathcal{E}^+ = \{B_U > 0\}$, $\mathcal{E}^- = \{B_U < 0\}$, $\zeta_+ = A_+(U)$ et $\zeta_- = A_-(U)$.

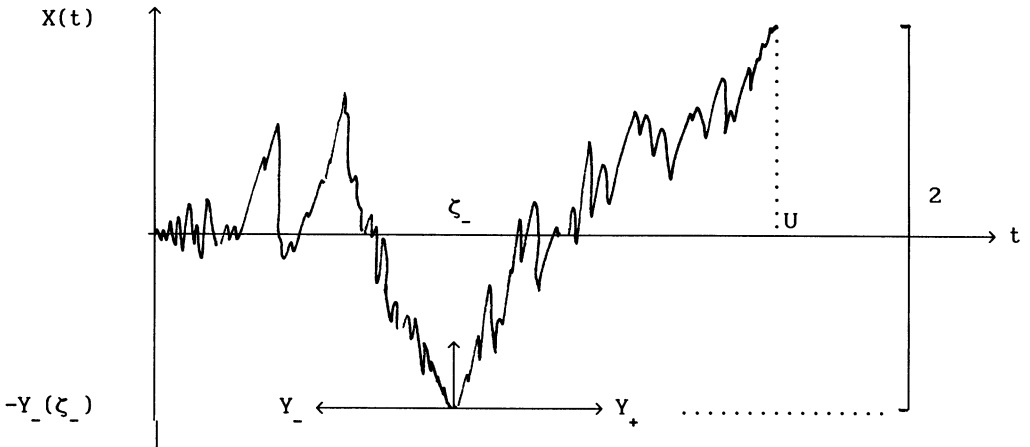
On a $\zeta_+ + \zeta_- = U$.

3°) On construit le processus X de la manière suivante : sur \mathcal{E}^+ (resp. \mathcal{E}^-), on pose :

$$X(t) = Y_-(\zeta_- - t) - Y_-(\zeta_-) , 0 \leq t \leq \zeta_- ; X(t) = Y_+(t - \zeta_-) - Y_-(\zeta_-) , \zeta_- \leq t \leq U .$$

$$\text{(resp. } X(t) = Y_+(\zeta_+) - Y_+(\zeta_+ - t) , 0 \leq t \leq \zeta_+ ; X(t) = Y_+(\zeta_+) - Y_-(t - \zeta_+) , \zeta_+ \leq t \leq U)$$

Représentons le cas \mathcal{E}^+ par la figure :



Théorème 2. *Le processus X a même loi que $(B_t ; 0 \leq t \leq \theta)$.*

Remarques. 1°) En particulier U a même loi que θ .

2°) Soit $t > 0$ fixé . Bertoin ([B]) a établi que le processus $\left((Y_+(u) , 0 \leq u \leq A_+(t)) , (Y_-(u) ; 0 \leq u \leq A_-(t)) \right)$ a même loi que $(\vec{B}_\rho , \vec{B}_\zeta)$, où

$$\vec{B}_\rho = (\vec{B}_\rho(u) = B_\rho - B_{\rho+u} ; 0 \leq u \leq t - \rho) , \vec{B}_\zeta = (\vec{B}_\zeta(u) = B_\rho - B_{\rho-u} ; 0 \leq u \leq \rho) \text{ et}$$

$$\rho = \sup\{u < t ; B_u = S_t\} .$$

a) Montrons à présent , via le travail de Bertoin ([B]) , que U et θ ont même loi .

On a $\{U > t\} = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$, avec $\Lambda_+ = \{ \max_{0 \leq u \leq t} (B^+ + (1/2)L)(u) < 2 \}$ et

$$\Lambda_- = \{ \max_{0 \leq u \leq t} (B^- + (1/2)L)(u) < 2 \}$$

Or le processus $B^+ + (1/2)L$ (resp. $B^- + (1/2)L$) est constant sur les

excursions négatives (resp. positives) de B, par conséquent :

$$\Lambda_+ = \{ \max_{0 \leq u \leq A_+(t)} Y_+(u) < 2 \} \text{ et } \Lambda_- = \{ \max_{0 \leq u \leq A_-(t)} Y_-(u) < 2 \} .$$

$$\text{Mais } \{ \max_{u \geq 0} B(u) < 2 \} = \{ B_\rho - \inf_{\rho \leq u \leq t} B_u < 2 \} , \quad \{ \max_{u \geq 0} \zeta(u) < 2 \} = \{ B_\rho - I_\rho < 2 \} ,$$

$$\text{et } B_\rho = S_t . \text{ Donc } \{ U > t \} \stackrel{(d)}{=} \{ S_t - I_t < 2 \} = \{ \theta > t \} .$$

Il est clair que U et θ ont même loi.

b) Les deux processus B et ζ sont intimement liées au méandre brownien .

En effet , d'après ([BY],[D]) , les processus $(\frac{1}{\sqrt{t-\rho}} B(u(t-\rho)); 0 \leq u \leq 1)$ et $(\frac{1}{\sqrt{\rho}} \zeta(u\rho); 0 \leq u \leq 1)$ sont deux méandres browniens indépendants , et indépendants de ρ .

Preuve du théorème.

1°) Si Z est un processus , on note $\bar{Z}_t = \max_{0 \leq u \leq t} Z_u$ et $Z_{-t} = \min_{0 \leq u \leq t} Z_u$, pour tout $t \geq 0$ et $T_x(Z)$ le premier instant où le processus Z atteint x .

D'après la formule de Tanaka, on a : $B_t^+ = -M_+(t) + (1/2)L_t$; $t \geq 0$, où

$$M_+(t) = - \int_0^t 1_{\{B_u > 0\}} dB_u .$$

D'une manière analogue $(1/2)L = \bar{M}_-$, où $M_-(t) = \int_0^t 1_{\{B_u < 0\}} dB_u$.

Soient $\beta_+(t) = M_+(\alpha_+(t))$ et $\beta_-(t) = M_-(\alpha_-(t))$, $t \geq 0$. Par changement de temps , β_+ et β_- sont deux mouvements browniens réels issus de 0 . Les deux martingales M_+ et M_- étant orthogonales, les deux mouvements browniens β_+ et β_- sont indépendants.

Mais $((1/2)L_t ; t \geq 0)$ est un processus croissant qui ne croit que sur les zéros de B^+ . D'après la solution au problème de réflexion de Skorokhod , on a :

$$\bar{M}_+ = 1/2 L \text{ et}$$

$$(2.1) \quad (1/2)L(\alpha_+(t)) = \bar{\beta}_+(t) , t \geq 0 ; \quad Y_+ = 2\bar{\beta}_+ - \beta_+ ; \quad Y_- = 2\bar{\beta}_- - \beta_- .$$

Utilisons le théorème de Pitman (3) : les deux processus Y_+ et Y_- sont

indépendants , Y_+ et Y_- ont même loi qu'un processus de Bessel de dimension 3 , issu de 0 .

2°) Soit $s \geq 0$, tel que $B_u \geq 0$ pour tout u de $[\tau(s_-), \tau(s)]$. Remarquons que $(B^+ + (1/2)L)(\tau(s)) = s/2$ et $(B^+ + (1/2)L)(v) > s/2$ pour tout $v > \tau(s)$. Par conséquent $\tau(s) = \sup\{t ; (B^+ + (1/2)L)(t) > s/2\}$.

On en déduit , par changement de temps, que sur \mathcal{E}^+ , on a :

(2.2) (i) $\zeta_+ = T_2(Y_+)$; (ii) $\zeta_- = \sup\{t \geq 0 ; Y^-(t) = (1/2)L_U\}$.

De plus $\mathcal{E}^+ = \{ \max_{0 \leq s \leq U} (B^- + (1/2)L)(s) < 2 \} = \{ \max_{u \leq \zeta_-} Y^-(u) < 2 \}$.

3°) Il convient d'ajouter au théorème de Pitman déjà cité :

$L_t = \min_{u \geq t} (|B_u| + L_u)$ (resp. $S_t = \min_{u \geq t} (2S_u - B_u)$) pour tout $t \geq 0$.

Posons $\xi = (1/2)L_U$. D'après (2.1) et (2.2) (i), on a $\xi = \min_{u \geq \zeta_+} Y_+(u) =$

$\min_{u \geq T_2(Y_+)} Y_+(u)$. Par conséquent, conditionnellement à \mathcal{E}^+ , ξ est une v.a. qui est indépendante du processus $(Y_+(s) ; 0 \leq s \leq \zeta_+)$.

Soit $a > 0$. Rappelons à présent le théorème de Williams ([W]):

(2.3) i) Le processus $\hat{R} = (\hat{R}(t) = a - B_{T(a)-t} ; 0 \leq t \leq T(a))$ a pour loi celle d'un processus de Bessel de dimension 3, issu de 0, et arrêté à son dernier temps de passage en a.

ii) La v.a. $S_{g(a)}$ suit une loi uniforme sur $[0, a]$, où

$g(a) = \sup\{u < T(a) ; B_u = 0\}$.

iii) Le processus $(B_{u+g(a)} ; 0 \leq u \leq T(a)-g(a))$ est indépendant de $(B_u ; 0 \leq u \leq g(a))$ et est identique en loi à $(R_u ; 0 \leq u \leq T_a(R))$.

iv) Soit $\eta = \sup\{u < g(a) ; B_u = S_{g(a)}\}$. Conditionnellement à $S_{g(a)} = x$, les deux processus $(B_u ; 0 \leq u \leq \eta)$ et $(B_{g(a)-u} ; 0 \leq u \leq g(a)-\eta)$ sont indépendants, et ont même loi que $(B_u ; 0 \leq u \leq T(x))$.

Remarquons que $T(a) - g(a) = T_a(\hat{R})$ et $a - S_{g(a)} = \min_{t \geq T_a(\hat{R})} \hat{R}(t)$.

On en déduit que, conditionnellement à \mathcal{E}^+ , $\min_{u \geq T_2(Y_+)} Y_+(u)$ suit une loi uniforme sur $[0, 2]$.

Par conséquent, conditionnellement à \mathcal{E}^+ , les deux processus $(Y_+(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_+)$ et $(Y_-(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_-)$ sont indépendants, $(Y_+(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_+)$ a même loi que $(R_t ; 0 \leq t \leq T_2(R))$, $(Y_-(u) ; 0 \leq u \leq \zeta_-)$ a même loi que $(\xi' - B_{T(\xi')-t} ; 0 \leq t \leq T(\xi'))$ conditionné à ne pas atteindre 2, où ξ' est v.a. indépendante des processus B et $P(\xi' \in \cdot) = P(\xi \in \cdot | \mathcal{E}^+)$.

Nous savons déjà que $(1/2)\xi$ suit une loi $\beta(1, 2)$; il est toutefois intéressant de retrouver ce résultat, via les processus Y_+ et Y_- . En effet:

$P(\mathcal{E}^+ | \xi = x) = P(x - B_t < 2 ; \forall t \in [0, T(x)]) = (2-x)/2$. D'où

$P(\xi \in dx, \mathcal{E}^+) = [(2-x)/4] 1_{\{0 < x < 2\}} dx$.

4°) Par construction, sur \mathcal{E}^+ , $X(\zeta_-) = \min_{0 \leq s \leq U} X(s)$, $\zeta_- = \sup \{s < U ; X(s) = X(\zeta_-)\}$ et $(X(s+\zeta_-) - X(\zeta_-) ; 0 \leq s \leq \zeta_+) = (Y_+(s) ; 0 \leq s \leq \zeta_+)$.
 On applique le théorème 1 de ([V2]) avec $\varphi(x) = 2 - x$ (le temps θ correspond à U de ([V2])) et le 1°) du lemme 2 de ([V2]) on en déduit que ,
 conditionnellement à \mathcal{E}^+ , $(X(t) ; 0 \leq t \leq U)$ a même loi que $(B_t ; 0 \leq t \leq \theta)$, puis par symétrie que ces deux processus ont même loi . \square

Etudions à présent le cas du temps d'arrêt $V = V(2)$.

Nous notons $\zeta_- = A_-(V)$ et $\zeta_+ = A_+(V)$. Il est clair que $\zeta_+ = T_2(Y_+)$.

Soient $2\xi = Y_-(\zeta_-)$ et \hat{Y} le processus : $\hat{Y}(t) = 2\xi - Y_-(\zeta_- - t) ; 0 \leq t \leq \zeta_-$.

Remarquons que $2\xi = (1/2)L_V$ et $\zeta_- = T_{2\xi}(\hat{Y})$.

On définit le processus $Z : Z(t) = \hat{Y}(t) ; 0 \leq t \leq T_{\xi}(\hat{Y})$,

$Z(t) = \hat{Y}(\zeta_- + T_{\xi}(\hat{Y}) - t) - \xi ; T_{\xi}(\hat{Y}) < t \leq \zeta_-$, $Z(t) = Y_+(t - \zeta_-) ; \zeta_- < t \leq \zeta_- + T_1(Y_+)$.

Théorème 3.

1°) La v.a., $A_+(V) - A_+(V(1))$ est indépendante du processus Z et

$$A_+(V) - A_+(V(1)) \stackrel{(d)}{=} T_1^*$$

2°) Le processus Z a même loi que $(B_t ; 0 \leq t \leq T(1))$.

Remarques. Par changement de temps, $T_1(Y_+) = A_+(V(1))$; Par conséquent la durée de vie de Z est $A_-(V) + A_+(V(1))$; cette v.a. est indépendante de $A_+(V) - A_+(V(1))$ et suit une loi stable de paramètre $1/2$. De plus, $V = (A_-(V) + A_+(V(1))) + (A_+(V) - A_+(V(1)))$, est une réalisation presque sûre de l'identité en loi (2) (ii).

Preuve du théorème.

Soit ξ' une v.a. indépendante des processus R et B et de même loi que ξ .

On montre d'une manière analogue à la preuve du théorème 2 :

- (i) ξ suit une loi uniforme sur $[0,1]$,
- (ii) les deux processus $(Y_+(t); 0 \leq t \leq \zeta_+)$ et $(Y_-(t); 0 \leq t \leq \zeta_-)$ sont indépendants,
- (iii) $(Y_+(t) ; 0 \leq t \leq \zeta_+)$ a même loi que $(R_t ; 0 \leq t \leq T_2(R))$,
- iv) $(Y_-(t) ; 0 \leq t \leq \zeta_-)$ a même loi que le processus R arrêté à son dernier temps de passage en $2\xi'$.

On applique successivement (2.3) i), ii) et iv) : $(\hat{Y}(t) ; 0 \leq t \leq \zeta_-)$ a même loi

que $(B_t ; 0 \leq t \leq T(2\xi'))$ et $(Z(t) ; 0 \leq t \leq \zeta_-)$ a même loi que $(B_t ; 0 \leq t \leq g(1))$.
 On utilise à nouveau (2.3) : le processus Z a même loi que $(B_t ; 0 \leq t \leq T(1))$.
 Mais $A_+(V(1)) = T_1(Y_+)$ et $A_+(V) - A_+(V(1)) = \inf\{t \geq 0; Y_+(t+T_1(Y_+)) = 2\} \stackrel{(d)}{=} T_1^*$. \square

Bibliographie.

[AY] Azéma , J.; Yor , M. , : Une solution simple au problème de Skorokhod.
Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes. Math. Vol. 721. Berlin Heidelberg New York : Springer 1979.

[B] Bertoin , J. : Décomposition du mouvement brownien avec dérive en un minimum local par juxtaposition de ses excursions positives et négatives.
Séminaire de Probabilités XXV . Lect. Notes Math. , Vol. 1485 . Berlin Heidelberg New York : Springer.

[BY] Biane , P. ; Yor. , M : Quelques précisions sur le méandre brownien .
Bull. Sci. Math. 2° Série , Vol 112 , p 101-109 , 1988 .

[D] Denisov , I.V. : A random walk and a Wiener process near a maximum .
Theory of Probability and its Applications , Vol 28 , n° 24 , p 821-824 , Soviet Journal published December 1983 . English translation published 1984 .

[F] Feller , W. : The asymptotic distribution of the range of sums of independent variables. *Ann. Math. Statist. 22 , 427-432 .1951 .*

[I1] Imhof , J.P. : On the range of Brownian motion and its inverse process.
The Annals of Probability , Vol 13 , N°3 , 1011-1017 , 1985.

[I2] Imhof , J.P. : A construction of the Brownian path from BES^3 pieces.
Preprint .

[JY] Jeulin , T. ; Yor , M. : Sur les distributions de certaines fonctionnelles du mouvement brownien. *Séminaire de Probabilités XV Lect. Notes Math. Vol. 850. Berlin Heidelberg New York : Springer 1979/1980.*

- [LY] Le Gall , J.F.; Yor M. : Excursions browniennes et carrés de processus de Bessel. *Note C.R. Acad. Sc. Paris, t 303, Série I, n°3, 1986.*
- [P] Pitman , J. : *One dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. Adv. Appl. Prob. 7, p 511-526 (1975).*
- [RY] Revuz , D. ; Yor , M. : *Continuous Martingales and Brownian Motion . Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York . 1991 .*
- [V1] Vallois , P. : Le problème de Skorokhod sur \mathbb{R} : une approche avec le temps local. *Séminaire de Probabilités XVII. Lect. Notes Math., Vol 986. Berlin Heidelberg New York Springer 1982.*
- [V2] Vallois , P. : Une extension des théorèmes de Ray et Knight sur les temps locaux Browniens. *Probab. Th. Rel. Fields 88, 445-482 (1991).*
- [V3] Vallois , P. : Diffusion arrêtée au premier instant où l'amplitude atteint un niveau donné. *A paraître.*
- [W] Williams , D. : Decomposing the Brownian path. *Bull. Am. Math. Soc. 76, 871-873 (1970).*
- [Y1] Yor , M. : Sur le balayage des semi-martingales continues *Séminaire de Probabilités XIII. Lect. Notes Math., Vol 721 . Berlin Heidelberg New York Springer 1979 .*
- [Y2] Yor , M. : Problème de Skorokhod et balayage du mouvement brownien . *Manuscrit non publié .*