Jacques Azéma
Marc Yor

Sur les zéros des martingales continues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 26 (1992), p. 248-306
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1992__26__248_0>

SUR LES ZEROS DES MARTINGALES CONTINUES

par J. Azéma et M. Yor

Laboratoire de Probabilités - Université Paris VI - 4, Place Jussieu - Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05

1 - Introduction.

A l'origine de ce travail, se trouve le problème suivant : soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien unidimensionnel, $(\mathcal{B}_t)$ sa filtration naturelle, H l'ensemble aléatoire de ses zéros ; quelles sont les $(\mathcal{B}_t)$-martingales qui s'annulent sur H ? Après avoir pataugé dans la théorie des excursions, nous nous sommes persuadés que la solution résultait plus simplement de l'application du théorème de Girsanov dans une filtration grossie. La même technique permet de traiter deux des classiques du folklore : étant donné un espace filtré $(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$,

- caractériser les fermés aléatoires qui sont les zéros d'une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue

- caractériser les $(\mathcal{F}_t)$-sous-martingales qui sont la valeur absolue d'une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue.

Rédigé quinze ans plus tôt, cet article aurait pu trouver place dans la série d'exposés consacrés au balayage [15], ou aux temps locaux [4]. Nous avons puisé parmi les idées qui s'échangeaient à cette époque notamment celles de J. Walsh, et utilisé les résultats de la théorie du grossissement tels qu'ils figurent dans la monographie de T. Jeulin [10]. L'influence de P.A. Meyer dans tout cela est trop évidente pour qu'on insiste davantage.

2 - Les classes $\mathcal{R}(H)$ et $\mathcal{R}_+$.

$(\Omega,(\mathcal{F}_t),P)$ est un espace filtré satisfaisant aux conditions habituelles, H un fermé aléatoire optionnel. On pose, quelque soit $t \geq 0$,

$$g_t = \sup\{s \ ; \ 0 \le s < t, \ s \in H\} \ ; \ \gamma_t = \sup\{s \ ; \ 0 \le s \le t \ ; \ s \in H\}$$

$$g = g_\infty = \sup\{s \ge 0 \ ; \ s \in H\} \ ; \ d_t = \inf\{s > t \ ; \ s \in H\}.$$

On fera la convention $\sup \emptyset = -\infty$; dans la suite, on supposera $P[g < \infty] = 1$. G désignera l'ensemble progressif mince des extrémités gauches des intervalles contigus à H ; on dira que G évite les temps d'arrêt si, quelque soit le temps d'arrêt T, $E[1_G(T) \ ; \ T < \infty] = 0$.

2.1. Définition : *Nous appellerons* $\mathcal{R}(H)$ *la classe des processus* (X_t) *s'annulant sur* H *et admettant une décomposition de la forme*

$$X_t = M_t + V_t \ , \ \textit{où}$$

(M_t) *est une martingale continue à droite uniformément intégrable,*

(V_t) *est un processus à variation intégrable, continu, adapté, tel que* (dV_t) *soit portée par* H.

[Meyer a appelé les processus de $\mathcal{R}(H)$ des "martingales relatives" associées à H, car il s'agit de processus qui sont des "martingales en dehors de H". La classe $\mathcal{R}_+$ introduite un peu plus loin est celle qui intervient naturellement dans les problèmes de réflexion. La lettre $\mathcal{R}$ est là pour rappeler l'un ou l'autre de ces deux points de vue].

Il est clair qu'un processus de $\mathcal{R}(H)$ est une quasi-martingale de la classe (D).

Toute martingale uniformément intégrable s'annulant sur H est évidemment dans $\mathcal{R}(H)$; la proposition suivante permet de construire d'autres éléments de $\mathcal{R}(H)$.

2.2. Proposition :

a) Soit (X_t) *un processus de* $\mathcal{R}(H)$ *; on a, quelque soit le temps d'arrêt* T *:*

(1) $$E[X_\infty \; ; \; g \le T | \mathcal{F}_T] = X_T.$$

b) Supposons que G *évite les temps d'arrêt ; si* X *est une variable aléatoire intégrable, la version continue à droite du processus*

(2) $$X_t = E[X \; ; \; g \le t | \mathcal{F}_t] \quad \textit{est dans} \quad \mathcal{R}(H).$$

Démonstration :

a) Si (X_t) est dans $\mathcal{R}(H)$, on note que $X_\infty 1_{\{t \ge g\}} = X_{d_t}$, ce qui permet d'écrire

$$E[X_\infty 1_{\{t \ge g\}} | \mathcal{F}_t] = E[M_{d_t} + V_{d_t} | \mathcal{F}_t] = M_t + V_t = X_t.$$

b) Soit (X_t) le processus défini par *(2)* ; (X_t) est une quasi-martingale de la classe (D) dont nous écrivons la décomposition canonique

$X_t = M_t + V_t$; on a : $E[V_T] = E[X_T - X_o] = E[X \; ; \; 0 < g \le T] = E[X \; ; \; 0 < g < T]$

quelque soit le temps d'arrêt T ; un argument de classe monotone montre alors que l'on a

(3) $$E\left[\int_0^\infty Z_s \, dV_s\right] = E[X \, Z_g \; ; \; g > 0]$$

quelque soit (Z_t) processus optionnel borné.

Appliquée au processus $Z_t = 1_{H^c}(t)$, cette égalité montre que dV_t ne charge pas H^c ; d'autre part, si T est un temps d'arrêt, on aura, toujours d'après *(3)*,

$$0 = E[X \; ; \; g = T \; ; \; g > 0 \; ; \; T < \infty] = E[\Delta V_T \, , \; T < \infty],$$

ce qui montre que (V_t) est continu. Il nous reste à montrer que (X_t) s'annule sur H, ce qui résulte des égalités

$$X_T 1_H(T) 1_{\{T<\infty\}} = X_T 1_{H \setminus G}(T) 1_{\{T<\infty\}} = E[X \; ; \; g \le T < \infty \; ; \; 1_{H \setminus G}(T) | \mathcal{F}_T] = 0.$$

2.3. **Remarque** : Dans la proposition précédente, la partie a) reste vraie si l'on suppose seulement H fermé à droite.

Nous passons maintenant à la définition de la classe $\mathcal{R}_+$.

2.4. **Définition** : *Soit* (Y_t) *un processus positif ; nous dirons que* (Y_t) *appartient à la classe* $\mathcal{R}_+$ *si*

- *l'ensemble aléatoire* $\{t \ ; \ Y_t = 0\}$ *est fermé.*
- (Y_t) *admet une décomposition de la forme* $Y_t = \mu_t + \lambda_t$ *, où* (μ_t) *est une martingale continue à droite uniformément intégrable et* (λ_t) *un processus croissant continu adapté intégrable tel que* $d\lambda_t$ *soit portée par l'ensemble des zéros de* (Y_t).
- $P[Y_\infty = 0] = 0$.

Posons $H = \{t \ ; \ Y_t = 0\}$; il est clair que (Y_t) est dans $\mathcal{R}(H)$; on a donc $Y_t = E[Y_\infty \ ; \ t \geq g | \mathcal{F}_t]$, quand g désigne la fin (nécessairement presque sûrement finie) de H. Les exemples de processus de $\mathcal{R}_+$ sont nombreux ; en voici quelques uns :

a) Une martingale uniformément intégrable strictement positive (y compris en $+\infty$).

b) La valeur absolue d'une martingale continue uniformément intégrable (M_t) vérifiant $P[M_\infty = 0] = 0$.

c) Le même exemple qu'en b), mais on appauvrit la filtration en se plaçant dans $(\mathcal{G}_t)$, filtration naturelle du processus $(|M_t|)$; la sous-martingale $(|M_t|)$ reste dans $\mathcal{R}_+$, mais n'est plus nécessairement la valeur absolue d'une $(\mathcal{G}_t)$-martingale continue. Toutefois, Barlow et Yor [5] ont montré que tout processus de $\mathcal{R}_+$ est identique en loi à un processus de ce type en s'appuyant sur un résultat de Gilat [8]. Il faut pour cela élargir la filtration, une facilité que nous nous interdisons ici.

d) (M_t) étant une martingale continue, $S_t = \sup_{s\le t} M_s$, le processus (S_t-M_t) arrêté à un temps d'arrêt convenable. Il résulte aisément du lemme de réflexion de Skorokhod que tout processus continu de $\mathcal{R}_+$ peut être représenté sous cette forme.

e) Un processus (X_t) de la forme :

$$X_t = \alpha B_t^+ + \beta B_t^- , \quad \text{avec} \quad \alpha \neq \beta,\ \alpha,\beta > 0,$$

convenablement arrêté.

f) (X_t) étant une diffusion sur $\mathbb{R}_+$ admettant une fonction d'échelle s nulle à l'origine, le processus $Y_t = s(X_t)$ convenablement arrêté.

Terminons par un exemple discontinu.

g) H désignant l'ensemble des zéros du mouvement brownien, le processus $(\sqrt{t-\gamma_t}\ , t \ge 0)$ convenablement arrêté, muni de sa filtration naturelle.

Avant de caractériser l'ensemble des zéros des processus de $\mathcal{R}_+$, introduisons un peu de vocabulaire. Soit H un ensemble aléatoire optionnel de fin g presque sûrement finie ; *nous dirons qu'un ensemble* H' *est situé à gauche de* g *si sa fin* g' *vérifie* $g' \le g$ *p.s. On dira que* H *est saturé si tout ensemble optionnel situé à gauche de* g *est contenu dans* H. On notera qu'un ensemble saturé est fermé. Une conséquence triviale de la saturation est la suivante : si (Z_t) et (Z'_t) sont deux processus optionnels qui coïncident sur $]g,\infty[$ et sur H, ils sont indistinguables.

2.5. **Proposition** : *Soit* H *un fermé aléatoire optionnel presque sûrement borné ;* H *est l'ensemble des zéros d'un processus de* $\mathcal{R}_+$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

α) G *évite les temps d'arrêt.*

β) H *est saturé.*

Démonstration : Montrons tout d'abord que les conditions α) et β) sont nécessaires ; donnons-nous pour cela un processus (Y_t) de $\mathcal{R}_+$ et posons $H = \{t \; ; \; Y_t = 0\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un temps d'arrêt S vérifiant

$$[S] \subset G \; ; \quad P[S < \infty] > 0.$$

Dans la filtration $(\mathcal{F}_{S+t})$, la variable aléatoire $\sigma = (d_S - S)1_{\{S<\infty\}} + \infty \, 1_{\{S=\infty\}}$ est un temps d'arrêt, le processus $\mu_t^{(S)} = \mu_{S+t} \, 1_{\{S<\infty\}}$ est une martingale ; le processus $(1_{\{S<\infty\}} \, Y_{(S+t)\wedge d_S} \; ; \; t \geq 0)$ qui s'écrit encore $1_{\{S<\infty\}}(\mu_{t\wedge\sigma}^{(S)} + \lambda_S)$, est donc une martingale positive. Comme il s'annule à l'origine, il est évanescent, ce qui provoque une contradiction. Passons à la propriété β) ; si H' est un ensemble optionnel situé à gauche de g, l'inégalité $Y_\infty 1_{H'} \leq Y_\infty 1_{[0,g]}$ permet d'écrire, quelque soit le temps d'arrêt T

$$1_{H'}(T) \; E[Y_\infty | \mathcal{F}_T] \leq E[Y_\infty \, 1_{\{g\geq T\}} | \mathcal{F}_T] = E[Y_\infty \, 1_{\{g>T\}} | \mathcal{F}_T].$$

On a donc $1_{H'}(T) \leq 1 - \dfrac{Y_T}{E[Y_\infty | \mathcal{F}_T]}$, d'où le résultat.

Réciproquement, si H satisfait α) et β), posons $Y_t = P[t \geq g | \mathcal{F}_t]$, $H' = \{t \geq 0, \; Y_t = 0\}$, $g' = \sup\{t \; ; \; Y_t = 0\}$; nous savons d'après 2.2 que (Y_t) appartient à $\mathcal{R}(H)$, ce qui entraîne l'inégalité $g' \geq g$. Nous allons montrer que H' est saturé et a même fin que H, ce qui nous assurera que $H' = H$. Commençons par remarquer que $Y_{g'-}$ est nulle sur $\{g' \geq 0\}$; cela est évident sur $\{g' = 0\} \cup \{[\{g' > 0\} \cap \{Y_{g'-} > 0\}]$ de sorte qu'il suffit de se placer sur l'événement $B = \{g' > 0\} \cap \{Y_{g'-} = 0\}$. D'après un résultat connu [1], l'ensemble prévisible $\{t > 0 \; ; \; Y_{t-} = 0\}$ est situé à gauche de g ; sur B, on peut donc écrire

$$g' \leq g, \text{ puis } g' = g, \text{ et enfin } Y_{g'} = Y_g = 0 \qquad \text{p.s.}$$

Introduisons maintenant le processus croissant (A'_t) projection duale optionnelle du processus croissant brut $1_{\{t\geq g'\geq 0\}}$; le support de (dA'_t) est le plus petit fermé optionnel contenant $[g']$ si bien que sa fin est égale à g'. On écrit alors

$$E\left[\int_g^\infty dA'_t\right] = E\left[\int_0^\infty Y_t\ dA'_t\right] = E\left[Y_{g'}\ ;\ g' \geq 0\right] = 0,$$

ce qui montre que $g' \leq g$; l'égalité de g et g' est ainsi démontrée.
Il ne reste plus qu'à établir la saturation de H' ; si K est optionnel situé à gauche de g, on a

$$1_K \leq 1_{[0,g]}\ ,\quad \text{d'où l'on déduit}\quad 1_K \leq (1-Y_t)$$

par projection optionnelle ; cela achève la démonstration.

Remarques : 1) Si, dans la définition de $\mathcal{R}_+$, on supprime la première condition, on obtient des processus ayant une toute autre allure. Soit T un temps d'arrêt totalement inaccessible fini ; si $Y_t = 1_{\{t\geq T\}}$, on a $H = [0,T[$, et $G = [T]$ n'évite pas les temps d'arrêt, bien au contraire.

2) Par contre, si dans la définition de $\mathcal{R}_+$, on supprime les conditions d'intégrabilité, la propriété α) : G *évite les temps d'arrêt* est conservée, car les arguments de la démonstration ci-dessus sont encore valables (en remplaçant toutefois "martingale" par "martingale locale"). Au contraire, sans condition d'intégrabilité sur Y, la propriété β) : H *est saturé* n'est pas nécessairement conservée, comme le montre l'exemple
$Y_t = |B_{t\wedge T_1}|$, où $(B_t, t \geq 0)$ est un mouvement brownien réel issu de 0, et $T_1 = \inf\{t > 0 : B_t = 1\}$.

3 - Le théorème quotient et ses applications.

Le changement de probabilité $Q = \dfrac{Y_\infty}{E[Y_\infty]} \cdot P$ associé à une martingale uniformément intégrable strictement positive $Y_t = E[Y_\infty | \mathcal{F}_t]$ établit une bijection $X_t \longrightarrow {}^{X_t}/_{Y_t}$ entre les martingales uniformément intégrables relatives à P d'une part, et à Q d'autre part. Nous allons, dans ce paragraphe, construire une correspondance du même type dans le cas où (Y_t) est une sous-martingale de $\mathcal{R}_+$. Nous aurons besoin de notions simples sur le grossissement de filtrations que nous rappelons brièvement ci-dessous en renvoyant au livre de Jeulin [10] pour plus de détails. Dans ce qui suit, (Y_t) sera une sous-martingale de $\mathcal{R}_+$, H l'ensemble de ses zéros, g la fin de H ; g est une variable aléatoire honnête (ainsi que $\bar{g} = g \vee 0$). La plus petite filtration <u>continue à droite</u> contenant $(\mathcal{F}_t)$ pour laquelle $\bar{g}$ est un temps d'arrêt sera notée $(\mathcal{F}_t^g)$. La filtration $(\mathcal{F}^g_{\bar{g}+t})$ est alors bien définie et sera notée plus simplement $(\mathcal{F}_{g+t})$. (Il y a une différence de notations avec Jeulin [10] qui appelle $\mathcal{F}_{g+}$ ce que nous notons ici $\mathcal{F}_g$).

La tribu optionnelle $\mathcal{O}^g$ de la filtration $(\mathcal{F}_{g+t})$ peut être décrite de la façon suivante :

- $\mathcal{F}_g$ est la tribu engendrée par les variables aléatoires $Z_{\bar{g}}$ quand (Z_t) parcourt la famille des processus $(\mathcal{F}_t)$-progressifs bornés.
- Un processus $(V_t \; ; \; t > 0)$ appartient à $\mathcal{O}^g|_{]0,\infty[}$ si et seulement s'il existe un processus $(\mathcal{F}_t)$-optionnel U_t tel que $V_t = U_{\bar{g}+t}$, $\forall t > 0$.

Nous allons profiter de la saturation de H pour être plus précis.

3.1. Proposition : *Soit* $(V_t \; ; \; t \geq 0)$ *un processus* $(\mathcal{F}_{g+t})$*-optionnel ; il existe un processus* $(U_t \; ; \; t \geq 0)$, $(\mathcal{F}_t)$*-optionnel unique qui est nul sur* H

et qui vérifie

(4) $$U_{\bar{g}+t} = V_t \ , \ \forall t > 0 \ ; \ U_o = V_o \quad \text{sur} \quad \{g = -\infty\}.$$

On notera dans la suite $U_t = \rho(V)_t$.

<u>Démonstration</u> : D'après la théorie du grossissement progressif (cf. Jeulin [10], chapitre V), il existe un processus $(W_t \ ; \ t \geq 0)$, $(\mathcal{F}_t)$-optionnel tel que $W_{\bar{g}+t} = V_t$ pour $t > 0$, $W_o = V_o$ sur $\{\bar{g} = 0\}$. Il reste à poser

$U_t = W_t \ 1_{H^c}(t)$.

Si maintenant (U_t) et (U'_t) sont deux processus vérifiant *(4)*, on voit facilement qu'ils sont indistinguables sur $]g,\infty[$; comme ils sont nuls sur H, ils sont indistinguables. □

Rappelons maintenant comment on projette sur $\mathcal{O}^g$; introduisons les notations $({}^oK_t)$ et $({}^{g,o}K_t)$ pour désigner les projections $(\mathcal{F}_t)$ et $(\mathcal{F}_{g+t})$-optionnelles d'un processus mesurable borné (K_t). Posons $J_t = 1_{H^c}(t) \dfrac{{}^o(K\, 1_{[g,\infty[})}{{}^o(1_{[g,\infty[})}(t)$.

On a alors

(5) $${}^{g,o}(K_{\bar{g}+\cdot})_t = J_{\bar{g}+t} \ , \ \forall t > 0.$$

Rappelons enfin que l'on appelle $\mathcal{F}_{g-}$, la σ-algèbre engendrée par les variables aléatoires $Z_{\bar{g}}$ quand (Z_t) parcourt la famille des processus prévisibles bornés.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème quotient ; (Y_t) est un processus de $\mathcal{R}_+$, $H = \{t \ ; \ Y_t = 0\}$, $Q = \dfrac{Y_\infty}{E[Y_\infty]} P$.

3.2. Théorème :

a) Si $(X_t\ ;\ t \geq 0)$ *est un processus de* $\mathcal{R}(H)$, *le processus* $(\chi_t\ ;\ t > 0)$ *défini par* $\chi_t = \dfrac{X_{\bar{g}+t}}{Y_{\bar{g}+t}}$ *est une* $(Q, (\mathcal{F}_{g+t})_{t>0})$ *martingale uniformément intégrable ;*

(χ_t) *admet donc une limite presque sûre* χ_0 *quand* t *décroit vers* 0.

b) Réciproquement, soit $(\chi_t\ ;\ t \geq 0)$ *une* $(Q, (\mathcal{F}_{g+t})_{t\geq 0})$ *martingale uniformément intégrable ; le processus* $X_t = Y_t\ \rho(\chi)_t$ *est alors l'unique processus de* $\mathcal{R}(H)$ *tel que* $\chi_t = \dfrac{X_{\bar{g}+t}}{Y_{\bar{g}+t}}$ *pour tout* $t > 0$; *de plus,* (X_t) *est une martingale si et seulement si* $E_Q[\chi_0|\mathcal{F}_{g-}] = 0$ *sur* $\{g > 0\}$.

Démonstration : a) Soit (X_t) un processus de $\mathcal{R}(H)$ et $t > 0$; on a, d'après *(5)* et 2.2. :

$$E_Q[\chi_\infty|\mathcal{F}_{g+t}] = \frac{E_P[X_\infty|\mathcal{F}_{g+t}]}{E_P[Y_\infty|\mathcal{F}_{g+t}]} = \frac{{}^o(X_\infty 1_{[g,\infty[})(\bar{g}+t)}{{}^o(Y_\infty 1_{[g,\infty[})(\bar{g}+t)} = \frac{X_{\bar{g}+t}}{Y_{\bar{g}+t}} = \chi_t.$$

b) Prouvons d'abord l'unicité ; si (X_t) et (X'_t) sont dans $\mathcal{R}(H)$ et vérifient $\dfrac{X_{\bar{g}+t}}{Y_{\bar{g}+t}} = \dfrac{X'_{\bar{g}+t}}{Y_{\bar{g}+t}}$ pour tout $t > 0$, ils coïncident sur $]\bar{g},\infty[$ et, par continuité à droite, sur $]g,\infty[$; puisqu'ils sont nuls sur H, ils sont indistinguables.

Posons $X_t = Y_t\ \rho(\chi)_t$; on a clairement $\chi_t = \dfrac{X_{\bar{g}+t}}{Y_{\bar{g}+t}}$ pour $t > 0$, et l'égalité $\chi_t = E_Q[\chi_\infty|\mathcal{F}_{g+t}]$ s'écrit :

$$\frac{X_{\bar{g}+t}}{Y_{\bar{g}+t}} = \frac{E_P[X_\infty|\mathcal{F}_{g+t}]}{E_P[Y_\infty|\mathcal{F}_{g+t}]} = \frac{{}^o(X_\infty 1_{[g,\infty[})(\bar{g}+t)}{Y_{\bar{g}+t}}.$$

Posons $X'_t = E[X_\infty \; ; \; t \geq g | \mathcal{F}_t]$; (X'_t) est dans $\mathcal{R}(H)$; les processus continus à droite (X_t) et (X'_t) sont nuls sur H, égaux sur $]g,\infty[$ et par conséquent indistinguables.

Le dernier point résulte immédiatement de la formule *(3)* : on a, quelque soit (Z_t) prévisible borné,

$$E_P\left[\int_0^\infty Z_s \, dV_s\right] = E_P[X_\infty \, Z_g \; ; \; g > 0] = E_Q[\chi_\infty \, Z_g \; ; \; g > 0],$$

de sorte que (V_t) est nul si et seulement si $E_Q[\chi_\infty | \mathcal{F}_{g-}] = 0$ sur $g > 0$.

On remarquera que le résultat reste vrai si l'on remplace $\mathcal{F}_{g-}$ par la σ-algèbre engendrée par les variables aléatoires Z_g où (Z_t) est optionnel.

Nous noterons dans la suite $\bar{g}_t = g_t \vee 0$.

3.2.1. Corollaires :

a) Soit (ξ_t) *un processus progressif tel que* $E_Q[|\xi_g|] < \infty$.

Le processus $\xi_{\bar{g}_t} Y_t$ *est dans* $\mathcal{R}(H)$ *et est une martingale si et seulement si* $E_Q[\xi_{\bar{g}} | \mathcal{F}_{g-}] = 0$ *sur* $\{g > 0\}$.

Démonstration : La variable aléatoire $\xi_{\bar{g}}$ est $\mathcal{F}_g$-mesurable ; il est clair que le processus à trajectoires constantes $\chi_t = \xi_{\bar{g}}$ est une $(Q,\mathcal{F}_{g+t})$-martingale uniformément intégrable ; d'autre part, on a $\rho(\chi)_t = \xi_{\bar{g}_t} 1_{H^c}(t)$ comme on le vérifie tout de suite d'après la définition de ρ. (Noter que $\xi_{\bar{g}_t}$ n'est que progressif, mais que $\xi_{\bar{g}_t} 1_{H^c}(t)$ est optionnel). Le théorème 3.2 donne alors immédiatement le résultat, lequel pour partie, était déjà connu (cf. [11]). □

b) Soit (X_t) *dans* $\mathcal{R}(H)$ *; il existe un processus progressif fini* (σ_t) *tel que, pour presque tout* ω,

$$\lim_{h\downarrow\downarrow 0} \frac{X_{u+h}}{Y_{u+h}}(\omega) = \sigma_u(\omega) \qquad \text{quelque soit} \quad u \in G(\omega).$$

Démonstration : On peut se limiter au cas où (X_t) est positif. Posons $\sigma_t = \underline{\lim}_{h\downarrow\downarrow 0} \frac{X_{t+h}}{Y_{t+h}} 1_{H^c}(t+h)$; (σ_t) est progressif, fini sur $H^c \cup D$; il nous reste à montrer qu'il est fini sur G. On a déjà remarqué dans l'énoncé du Théorème 3.2 que $\sigma_{\bar{g}}$, qui est égal à χ_o, était p.s. finie.

Introduisons alors les temps d'arrêt $T_{n,p}$ définis par récurrence par

$$T_{n,1} = \inf\{t \geq 0 \ ; \ t - \gamma_t \geq \tfrac{1}{n}\} , \ldots , T_{n,p+1} = \inf\{t > T_{n,p} \ ; \ t - \gamma_t \geq \tfrac{1}{n}\}.$$

Le raisonnement précédent appliqué aux processus $(Y_{t\wedge T_{n,p}})$ et $(X_{t\wedge T_{n,p}})$ prouve que $\sigma_{\bar{g}_{T_{n,p}}}$ est presque sûrement finie ; le résultat découle alors du fait que $G = \bigcup_{n,p} [g_{T_{n,p}}]$. □

c) Soit $X_t = M_t + V_t$ *la décomposition canonique d'un processus de* $\mathcal{R}(H)$ *; il existe un processus prévisible* (α'_t) *tel que* $V_t = \int_0^t \alpha'_s \, d\lambda_s$.

Démonstration : Ecrivons $\chi_t = \chi'_o + \chi''_o + (\chi_t - \chi_o)$, où $\chi'_o = E_Q[\chi_o | \mathcal{F}_{g-}]$, $\chi''_o = \chi_o - \chi'_o$. Appelons (α'_t) (resp. (α''_t)) un processus prévisible (resp. progressif) tel que $\alpha'_{\bar{g}} = \chi'_o$ (resp. $\alpha''_{\bar{g}} = \chi''_o$) ; on a alors

$$X_t = Y_t \, \rho(\chi)_t = \alpha'_{\bar{g}_t} Y_t + \alpha''_{\bar{g}_t} Y_t + Y_t \, \rho(\chi_. - \chi_o)_t.$$

Les deux derniers termes du membre de droite sont des martingales, tandis que le théorème du balayage prévisible ([4], [15]) permet de décomposer le premier.

On a : $\alpha'_{g_t} Y_t = \alpha'_o Y_o + \int_0^t \alpha'_{g_s} d\mu_s + \int_0^t \alpha'_s d\lambda_s$, de sorte que $V_t = \int_0^t \alpha'_s d\lambda_s$.

Nous allons maintenant caractériser l'ensemble des zéros d'une classe de martingales qui, sans être continues, n'en sont pas très loin.

3.3. Définition : La classe $\mathcal{R}$ des martingales pseudo-continues.

Nous dirons qu'une martingale uniformément intégrable continue à droite (N_t) *est dans la classe* $\mathcal{R}$ *si*

a) $(|N_t|)_{t\geq 0}$ *est une sous-martingale régulière*

b) $H = \{t \; ; \; N_t = 0\}$ *est fermé*

c) Presque sûrement, $\forall s < t$, $N_s N_t < 0 \Longrightarrow \exists u \in]s,t[$ *tel que* $N_u = 0$,

d) $P[N_\infty = 0] = 0$.

Remarque sur la définition 3.3 : La condition a) n'est pas commode à vérifier. On peut la remplacer par la condition a') suivante qui porte sur les trajectoires de (N_t).

a') (N_{t-}) *ne s'annule pas sur* H^c.

Nous montrons maintenant que les conditions a) et a') sont équivalentes.

Rappelons en effet la formule de Tanaka pour les martingales discontinues établie par Meyer dans le Séminaire X

$$|N_t| = |N_o| + \int_0^t \text{signe}(N_{s-})dN_s + \Lambda_t + \sum_{s\leq t} (|N_s| - |N_{s-}| - \Delta N_s \,\text{signe}(N_{s-}))$$

où, par convention, signe(0) = -1 ; (Λ_t) est un processus croissant continu qui est le "temps local" de (N_t). Soit (N_t) une martingale de $\mathcal{R}$; appelons K l'ensemble aléatoire optionnel $\{t \in H^c \cup D \,;\, N_{t-} = 0\}$; l'égalité précédente s'écrit, compte tenu de la condition c)

$$|N_t| = |N_o| + \int_0^t \text{signe}(N_{s-})dN_s + \Lambda_t + \sum_{\substack{s\le t\\ s\in K}} 2(N_s)^+.$$

Le dernier terme du second membre définit un processus à variation intégrable porté par $H^c \cup D$; il en est de même de sa projection duale prévisible ; puisque l'on sait que $(|N_t|) \in \mathcal{R}_+$, cela n'est possible que si

$\sum_{\substack{s\le t\\ s\in K}} 2(N_s)^+$ est évanescent, ce qui entraîne $\{N_{s-} \neq 0\}$ sur $\{N_s > 0\}$.

Le même raisonnement appliqué à $(-N_t)$ prouve que a') est vérifiée. Inversement si dans la définition 3.3 on remplace a) par a'), on vérifie aisément que $\sum_{s\le t} [|N_s| - |N_{s-}| - \Delta N_s \text{ signe}(N_{s-})]$ est nul, ce qui entraîne la régularité de $(|N_t|)$.

La condition a) est automatiquement vérifiée si la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche ; contrairement à la continuité, la pseudo-continuité se conserve par projection sur une sous-filtration (qu'on doit prendre assez riche cependant pour que H reste optionnel). Ainsi, la martingale $\text{signe}(B_t)\sqrt{t-\gamma_t}$, où B_t désigne un mouvement brownien est pseudo-continue ; la propriété utile des martingales de $\mathcal{R}$ est la suivante

3.4. **Proposition** : *Si* $(X_t) \in \mathcal{R}$, $(|X_t|) \in \mathcal{R}_+$.

Démonstration : Soit $|X_t| = \mu_t + \lambda_t$ la décomposition de Doob-Meyer de $(|X_t|)$; on sait que (λ_t) est continu, il nous faut montrer que $d\lambda_t$ est portée par H. Si S est un temps d'arrêt tel que $[S] \subset H^c$, on pose

$$\sigma = (d_S-S)1_{\{S<\infty\}} + \infty\, 1_{\{S=\infty\}} , \quad U_t = 1_{\{S<\infty\}}\, |X_{S+t}|\, 1_{\{S+t\le d_S\}} .$$

Grâce à la condition c), (X_t) ne change pas de signe sur l'intervalle $]S,d_S[$ de sorte que l'on a

$$U_t = \text{signe}(X_S)\, X^S_{t\wedge T} \quad \text{quand on a posé} \quad X^S_t = X_{S+t}\, 1_{\{S<\infty\}}.$$

(U_t) est donc une $(\mathcal{F}_{S+t})$-martingale uniformément intégrable, ce qui entraîne facilement les égalités

$$E[|X_S|] = E[|X_{d_S}|]\ ,\ E[\lambda_S] = E[\lambda_{d_S}],$$

puis le résultat.

3.5. **Théorème** : *Soit* H *un fermé optionnel presque sûrement borné ;* H *est l'ensemble des zéros d'une martingale de* $\mathcal{R}$ *si et seulement s'il satisfait aux 3 conditions suivantes*

α) G *évite les temps d'arrêt*

β) H *est saturé*

γ) Il existe un événement A *de* $\mathcal{F}_g$ *tel que*

$$0 < P(A|\mathcal{F}_{g-}) < 1 \quad \text{p.s.} \quad \text{sur} \quad \{g > 0\}.$$

Démonstration :

1) Les conditions α), β), γ) sont nécessaires ; soit en effet (X_t) une martingale de $\mathcal{R}$; puisque $(|X_t|) \in \mathcal{R}_+$, $H = \{t, X_t = 0\}$ vérifie α) et β). Appelons alors ε_t le processus progressif défini par

$\varepsilon_t = \underset{h\downarrow\downarrow 0}{\underline{\lim}}\ \text{signe}(X_{t+h})\, 1_{H^c}(t+h)$, et A l'événement $\{\varepsilon_{\bar g} = 1\} = \{X_\infty > 0\}$.

$(\varepsilon_{\bar g_t}\, |X_t|)$ est évidemment une martingale, ce qui entraîne

$$(6) \qquad 1_{\{g>0\}}\, E_Q[\varepsilon_{\bar g}|\mathcal{F}_{g-}] = 0.$$

Cela revient à dire que, sur $\{g > 0\}$, $E_Q[A|\mathcal{F}_{g-}] = \frac{1}{2}$; revenant de Q à P, on obtient facilement γ).

2) Réciproquement, si H satisfait α) et β), le processus $Y_t = P[t \geq g | \mathcal{F}_t]$ est dans $\mathcal{R}_+$ et est tel que $H = \{t\ ;\ Y_t = 0\}$; utilisons maintenant γ) : désignant par ξ la variable aléatoire $\mathcal{F}_{\bar{g}}$-mesurable définie par

$$\xi = \left(\frac{1}{P(A|\mathcal{F}_{g-})} 1_A - \frac{1}{P(A^c|\mathcal{F}_{g-})} 1_{A^c}\right) 1_{\{g>0\}} + 1_{\{g\leq 0\}} ,$$

il existe un processus progressif tel que $\xi_{\bar{g}} = \xi$; le processus $1_{\{\xi_{\bar{g}_t}=0\}}$, nul sur $]g,\infty[$, est nul sur H^c d'après la saturation de H. Cela signifie que $(\xi_{\bar{g}_t})$ ne s'annule pas sur H^c, ou encore que (Y_t) et $(X_t = \xi_{\bar{g}_t} Y_t, t \geq 0)$ admettent le même ensemble de zéros. Enfin, puisque $E[\xi_{\bar{g}}|\mathcal{F}_{g-}] = 0$ sur $\{g > 0\}$, (X_t) est une martingale de $\mathcal{R}$, ce qui termine la démonstration.

3.6. Proposition : *Soient* (Y_t) *un processus,* H *l'ensemble de ses zéros.* (Y_t) *est la valeur absolue d'une martingale de* $\mathcal{R}$ *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées*

(i) $(Y_t) \in \mathcal{R}_+$

(ii) *Il existe un événement* A *de* $\mathcal{F}_g$ *tel que* $E_Q[A|\mathcal{F}_{g-}] = \frac{1}{2}$ *sur* $\{g > 0\}$.

Démonstration : Nous avons déjà vu en 3.4 et au cours de la démonstration de 3.5 que les conditions (i) et (ii) sont nécessaires. Réciproquement, si (Y_t) est un processus de $\mathcal{R}_+$ vérifiant (ii), appelons (ξ_t) un processus progressif tel que $\xi_{\bar{g}} = 1_A - 1_{A^c}$ et posons $\xi'_t = \xi_{\bar{g}_t} 1_{H^c}(t)$; $|\xi'_t|$ est un processus optionnel qui est égal à 1 pour $t > g$; d'après un raisonnement déjà fait utilisant la saturation de H, on a : $|\xi'_t| = 1_{H^c}(t)$. On voit alors immédiatement que la martingale $X_t = \xi_{\bar{g}_t} Y_t = \xi'_t Y_t$ est solution du problème.

3.7. **Exemples** :

a) (B_t) est un mouvement brownien réel issu de 0, $T = \inf\{t ; |B_t| = 1\}$, $Y_t = |B_{t\wedge T}|$.

$(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle engendrée par (Y_t). On sait (cf. [6]) que $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{g-}$; l'ensemble H vérifie α) et β) mais non γ) ; il n'y a aucune martingale de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ dont l'ensemble des zéros soit H.

b) La condition $\mathcal{F}_{g-} \neq \mathcal{F}_g$, moins forte que γ), n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'une martingale de $\mathcal{R}$ admettant H pour ensemble de zéros, comme le montre l'exemple suivant : (B_t), T, H ayant les mêmes significations qu'au a), on pose maintenant si c est > 0,

$$X_t = B_{t\wedge T}\ ,\ Z_t = X_t\, 1_{\{t<d_c\}} + |X_t|\, 1_{\{t\geq d_c\}}.$$

$(\mathcal{F}_t)$ désignera la filtration naturelle engendrée par (Z_t). H est optionnel et satisfait α) et β) ; l'événement $A = \{Z_\infty > 0\}$ est dans $\mathcal{F}_g$; il vérifie l'égalité $P(A^c|\mathcal{F}_{g-}) = \frac{1}{2}\, 1_{\{g<c\}}$ et n'est donc pas dans $\mathcal{F}_{g-}$; si C est dans $\mathcal{F}_g$, on peut montrer qu'il existe deux indicateurs x et y, $\mathcal{F}_{g-}$-mesurables tels que $1_C = x\, 1_A + y\, 1_{A^c}$; on a alors $P(C|\mathcal{F}_{g-}) = x$ sur $\{g > c\}$; la condition γ) n'est donc pas vérifiée et la conclusion est la même qu'en a).

c) Posons maintenant $\gamma_t = \sup\{s \leq t ; B_s = 0\}$; $X_t = \text{signe}(B_t)\sqrt{t-\gamma_t}$ est une martingale de $\mathcal{R}$ purement discontinue relativement à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$. On pose $T = \inf\{t ; |X_t| = 1\}$, $Y_t = |X_{t\wedge T}|$, $H = \{t ; Y_t = 0\}$.

Dans la filtration $(\mathcal{F}_t)$, toute martingale continue est constante.

H satisfait α), β), γ), mais n'est l'ensemble des zéros d'aucune martingale continue, ce qui justifie l'introduction de la classe $\mathcal{R}$.

d) Revenons au cas du mouvement brownien (B_t) muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$; posons $S_t = \alpha B_t^+ + \beta B_t^-$, où α et β sont deux réels positifs et distincts.

Montrons rapidement que la filtration naturelle $(\mathcal{S}_t)$ engendrée par (S_t) est égale à $(\mathcal{F}_t)$; on voit d'abord facilement que le processus

$$\alpha^2 \, 1_{\{B_t>0\}} + \beta^2 \, 1_{\{B_t<0\}} = \frac{d\langle S,S\rangle_t}{dt}$$

est $(\mathcal{S}_t)$-adapté ; comme il prend les deux valeurs distinctes α^2 et β^2, les processus $1_{\{B_t>0\}}$ et $1_{\{B_t<0\}}$ sont $(\mathcal{S}_t)$ adaptés, ainsi que B_t^+ et B_t^- qui sont respectivement égaux à $\frac{1}{\alpha} S_t \, 1_{\{B_t>0\}}$ et $\frac{1}{\beta} S_t \, 1_{\{B_t<0\}}$. Posons maintenant

$$T = \inf\{t \geq 0 \; ; \; S_t = 1\} = \inf\{t \; ; \; B_t \notin [-\tfrac{1}{\beta}, \tfrac{1}{\alpha}]\}$$

$$Y_t = S_{t\wedge T}, \qquad H = \{t \; ; \; Y_t = 0\} = \{t \; ; \; B_t = 0\} \cap [0,T]$$

$$g = \sup\{t \leq T \; ; \; B_t = 0\}.$$

(Y_t) est un processus de $\mathcal{R}_+$ et $Q = P$. Nous allons montrer qu'il n'y a pas d'ensemble C, $\mathcal{F}_g$-mesurable, vérifiant $P[C|\mathcal{F}_{g-}] = \frac{1}{2}$; il en résultera que (Y_t) n'est la valeur absolue d'aucune $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue. Nous verrons un peu plus loin que $\mathcal{F}_g = \sigma(\mathcal{F}_{g-}, [B_T = \frac{1}{\alpha}])$; l'indicateur d'un événement C de $\mathcal{F}_g$ peut donc s'écrire $1_C = x \, 1_A + y \, 1_{A^c}$ où x et y sont deux indicateurs $\mathcal{F}_{g-}$-mesurables, A désignant l'événement $[B_T = \frac{1}{\alpha}]$; on a donc $P[C|\mathcal{F}_{g-}] = x \, P[A|\mathcal{F}_{g-}] + y \, P[A^c|\mathcal{F}_{g-}]$; sous la probabilité $P' = |B_T|P$, on sait que $P'[A|\mathcal{F}_{g-}] = \frac{1}{2}$; on a donc

$$P[A|\mathcal{F}_{g-}] = \frac{E'[\frac{1}{|B_T|} 1_A|\mathcal{F}_{g-}]}{E'[\frac{1}{|B_T|}|\mathcal{F}_{g-}]} = \frac{\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

si bien que la variable aléatoire $P[C|\mathcal{F}_{g-}] = \frac{\alpha x + \beta y}{\alpha+\beta}$ ne peut pas prendre la valeur $\frac{1}{2}$.

La situation est toute différente si l'on s'autorise à élargir l'espace de probabilité (cf. [5]).

3.8. Soit (X_t) une martingale de $\mathcal{R}$. Nous allons examiner les conséquences de l'hypothèse

$$\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{g-} \vee \sigma\{X_\infty > 0\}$$

qui est vérifiée par exemple dans le cas où (X_t) est un mouvement brownien arrêté à sa première sortie de l'intervalle $[-1,+1]$.

3.8.1. **Proposition** : *Soient* (X_t) *une martingale de* $\mathcal{R}$, (Y_t) *sa valeur absolue. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{g-} \vee \sigma\{X_\infty > 0\}$.

(ii) Si (ξ_t) *est un processus progressif borné tel que* $\xi_{g_t} Y_t$ *soit une martingale, il existe un processus prévisible borné* (σ_t) *tel que*

$$\xi_{g_t} Y_t = \sigma_{g_t} X_t.$$

(iii) Si (ξ_t) *est un processus progressif borné tel que* $\xi_{g_t} X_t$ *soit une martingale, il existe un processus prévisible borné* (σ_t) *tel que*

$$\xi_{g_t} X_t = \sigma_{g_t} X_t .$$

Démonstration : Posons $A = \{X_\infty > 0\}$ et considérons à nouveau le processus progressif (ε_t) introduit dans la démonstration de 3.5 ; l'équivalence entre (ii) et (iii) est évidente dès que l'on a remarqué que $X_t = \varepsilon_{\bar{g}_t} Y_t$, $Y_t = \varepsilon_{\bar{g}_t} X_t$. Montrons maintenant l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii). Soit (ξ_t) un processus progressif borné tel que $\xi_{\bar{g}_t} Y_t \in \mathcal{R}$; appelons (σ_t) et (σ'_t) deux processus prévisibles bornés tels que $\xi_{\bar{g}} = \sigma_{\bar{g}} 1_A + \sigma'_{\bar{g}} 1_{A^c}$; sur $\{g > 0\}$ l'égalité $E_Q[\xi_{\bar{g}} | \mathcal{F}_{g-}] = 0$ entraîne successivement $\sigma_{\bar{g}} + \sigma'_{\bar{g}} = 0$,

$\xi_{\bar{g}} = \sigma_{\bar{g}}(1_A - 1_{A^c}) = \sigma_{\bar{g}}\, \varepsilon_{\bar{g}}$; on a donc $\xi_{\bar{g}_t} = \sigma_{\bar{g}_t}\, \varepsilon_{\bar{g}_t}$ sur H^c, et enfin

$\xi_{\bar{g}_t} Y_t = \sigma_{\bar{g}_t} X_t$.

Inversement, supposant (ii) vérifiée, soit u une variable aléatoire $\mathcal{F}_g$ mesurable bornée. Désignons par (U_t) et (V_t) deux processus progressifs tels que $U_{\bar{g}} = u$, $V_{\bar{g}} = u - E_Q[u|\mathcal{F}_{g-}]$, et par (W_t) un processus prévisible tel que $W_{\bar{g}} = E_Q[u|\mathcal{F}_{g-}]$. D'après le Corollaire 3.2.1, a), $(V_{\bar{g}_t} Y_t)$ est une martingale ; il existe donc, par hypothèse, un processus prévisible (σ_t) tel que

$V_{\bar{g}_t} Y_t = \sigma_{\bar{g}_t} Y_t$; on a donc : $U_{\bar{g}_t} Y_t - W_{\bar{g}_t} Y_t = \sigma_{\bar{g}_t} Y_t$,

$U_{\bar{g}} - W_{\bar{g}} = \sigma_{\bar{g}}\, \varepsilon_{\bar{g}}$, $U_{\bar{g}} = W_{\bar{g}} + \sigma_{\bar{g}}(1_A - 1_{A^c})$, ce qui prouve (i).

Revenons alors à la proposition 3.6 ; en y modifiant la condition (ii), on peut obtenir de manière simple toutes les martingales de valeur absolue donnée (Y_t).

3.8.2. **Proposition** : *Soit* (Y_t) *un processus de* $\mathcal{R}_+$ *vérifiant la condition*

(ii') Il existe un événement A *de* $\mathcal{F}_g$ *tel que* $E_Q[A|\mathcal{F}_{g-}] = \frac{1}{2}$ *sur* $\{g > 0\}$ *et* $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{g-} \vee \sigma(A)$.

Soient (X'_t) *et* (X''_t) *deux martingales telles que* $(|X'_t|) = (|X''_t|) = (Y_t)$;

il existe un processus prévisible (δ_t) *à valeurs dans* $\{-1,+1\}$ *tel que*

$$X''_t = \delta_{\bar{g}_t} X'_t .$$

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où (X'_t) est la martingale (X_t) construite en 3.6 pour laquelle $A = \{X_\infty > 0\}$.

Posons alors $\xi_t = \lim\limits_{h\downarrow 0} \frac{X''_{t+h}}{Y_{t+h}} 1_{H^c}(t+h)$; puisque $\xi_{\bar{g}_t} Y_t$ est une martingale, il existe, d'après 3.8.1, un processus prévisible (σ_t) tel que

$X''_t = \xi_{\bar{g}_t} Y_t = \sigma_{\bar{g}_t} X_t$; on remarque alors que $|\sigma_{\bar{g}}| = 1$; il en est de même du processus $|\sigma_{\bar{g}_t}|$ sur H^c ; on pose alors

$$\delta_t = \sigma_t 1_{\{|\sigma_t|=1\}} + 1_{\{|\sigma_t|\neq 1\}} .$$

Remarque : Quitte à remplacer δ_t par $\delta_{\bar{g}_t}$, on peut supposer que le processus (δ_t) vérifie $\delta_t = \delta_{\bar{g}_t}$.

Exemple : Si (B_t) est un mouvement brownien réel muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$, toute martingale continue (X_t) admettant $(|B_t|)$ pour valeur absolue est de la forme $\delta_{g_t} B_t$, où (δ_t) est un processus prévisible de valeur absolue 1.

On peut en effet appliquer la proposition précédente en arrêtant (B_t) et (X_t) à $T_n = \inf\{t \ ; \ |B_t| \geq n\}$, puis faire tendre n vers l'infini.

3.8.3. **Proposition** : *Si* (X_t) *est une martingale de* $\mathcal{R}$ *telle que* $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{g-} \vee \sigma(X_\infty > 0)$ *et* T *un temps d'arrêt tel que* $P[X_T = 0] = 0$, *alors* $\mathcal{F}_{g_T} = \mathcal{F}_{g_T-} \vee \sigma(X_T > 0)$.

Démonstration : Soit (ξ_t) un processus progressif borné tel que $(\xi_{g^-_{t\wedge T}} X_{t\wedge T})$ soit une martingale ; posons $\xi'_t = \xi_{t\wedge T}$. Le processus

$$\xi'_{g^-_t} X_t = \xi_{g^-_{t\wedge T}} X_{t\wedge T} 1_{\{t<T\}} + \xi_{g^-_T} X_t 1_{\{T\le t<d_T\}} + \xi_T X_t 1_{\{t\ge d_T\}} ,$$

qui apparaît comme le recollement de 3 martingales, est lui-même une martingale ; il existe d'après 3.8.1. un processus prévisible borné (σ_t) tel que $\xi'_{g^-_t} X_t = \sigma_{g^-_t} X_T$, ce qui entraîne $\xi_{g^-_{t\wedge T}} X_{t\wedge T} = \xi'_{g^-_{t\wedge T}} X_{t\wedge T} = \sigma_{g^-_{t\wedge T}} X_{t\wedge T}$.

La proposition 3.8.1. appliquée en sens inverse donne alors le résultat. □

Le corollaire suivant s'applique notamment au mouvement brownien.

3.8.4. Corollaire : *Soit* (X_t) *une martingale locale possédant la propriété suivante :*

(*) Il existe une suite (T_n) *de temps d'arrêt croissant* P*-p.s. vers* $+\infty$ *telle que*

$$(X_{t\wedge T_n}) \in \mathcal{R} \; ; \quad P[X_{T_n} = 0] = 0 \; ; \quad \mathcal{F}_{g_{T_n}} = \mathcal{F}_{g_{T_n}^-} \vee \sigma\{X_{T_n} > 0\} \; ;$$

alors pour tout temps d'arrêt S *presque sûrement fini tel que* $P[X_S = 0] = 0$,

on a : $$\mathcal{F}_{g_S} = \mathcal{F}_{g_S^-} \vee \sigma\{X_S > 0\}.$$

Démonstration : Posons $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_{g_{S\wedge T_n}}$, $\mathcal{G}^-_n = \mathcal{F}_{g^-_{S\wedge T_n}}$, $A_n = \{X_{S\wedge T_n} > 0\}$, $A = \{X_S > 0\}$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{g_{S\wedge T}}$.

Comme la suite $S\wedge T_n$ tend en croissant vers S de façon stationnaire, on a $A = \bigcup_n A_n$, $\mathcal{G} = \bigvee_n \mathcal{G}_n$; soit Z une variable $\mathcal{G}$-mesurable positive et bornée ; d'après la proposition précédente, il existe U_n , $\mathcal{G}^-_n$-mesurable positive et bornée telle que $E[Z|\mathcal{G}_n]1_{A_n} = U_n 1_{A_n}$. Prenant la limite inférieure des deux membres, on obtient $Z\,1_A = \left(\underline{\lim}_{n\to\infty} U_n\right)1_A$, d'où le résultat. □

Il y a deux cas où l'on peut être plus précis :

a) Si S est un temps d'arrêt tel que $(X_{t\wedge S})$ soit uniformément intégrable, la condition $Q(A|\mathcal{F}_{g_S^-}) = \frac{1}{2}$ montre que l'événement $A = \{X_S > 0\}$ n'est pas dans $\mathcal{F}_{g_S^-}$; de plus, $\mathcal{F}_{g_S} = \mathcal{F}_{g_S^-} \vee \sigma(A)$.

Dans le cas où (X_t) est un mouvement brownien et S un temps d'arrêt constant, on retrouve un résultat de [6].

b) Si S est un temps d'arrêt fini tel que $P[X_S > 0] = 1$, le corollaire 3.8.4. montre que $\mathcal{F}_{g_S} = \mathcal{F}_{g_S^-}$ presque sûrement.

Pour des résultats voisins, voir [12].

A ce point de la rédaction, il serait sans doute intéressant d'étudier les liens entre la propriété (*) du corollaire 3.8.4. et la notion de martingale pure ; il semble probable qu'un changement de temps (τ_t) de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ conserve la propriété (*). Une martingale continue pure aurait donc la propriété (*). Inversement, des martingales continues ne possédant pas la propriété (*) sont faciles à trouver dans le cadre des "mouvements browniens de Walsh" étudiés en [6]. Cela fournit de nouveaux exemples de martingales continues impures. Nous laissons cela de côté pour le moment pour avancer un peu. L'exemple du mouvement brownien pourrait d'autre part laisser croire à la propriété suivante : si (M_t) est une martingale continue possédant la propriété (*), relativement à sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$, la filtration naturelle $(\mathcal{G}_t)$ de $(|M_t|)$ vérifie $\mathcal{G}_{g_S} = \mathcal{G}_{g_S^-}$ quelque soit le temps d'arrêt S tel que $P[|M_S| > 0] = 1$; rien n'est plus inexact : il existe des martingales continues (par exemple, $B_t^2 - t$) pour lesquelles (M_t) et $(|M_t|)$ engendrent la même filtration naturelle, ce qui fait que l'égalité $\mathcal{G}_{g_S} = \mathcal{G}_{g_S-}$ n'est pas vérifiée. L'adage selon lequel tout ce qui est bon pour le mouvement brownien est bon pour les martingales continues est à proscrire pour ce type de problèmes. De la même facon qu'en 3.8.4, on a le résultat suivant.

3.8.5 *Soit* (Y_t) *une sous-martingale locale possédant la propriété suivante : il existe une suite* (T_n) *de temps d'arrêt croissant* P-*p.s. vers* $+\infty$ *telle que*

1) $(Y_{t\wedge T_n}) \in \mathcal{R}_+$ *(ainsi, en particulier,* $P(Y_{T_n} = 0) = 0)$;

2) $\mathcal{F}_{g_{T_n}} = \mathcal{F}_{g_{T_n}-}$;

alors pour tout temps d'arrêt S *presque sûrement fini tel que* $P[Y_S = 0] = 0$,

$$\mathcal{F}_{g_S} = \mathcal{F}_{g_S-}.$$

Démonstration : Soit $(Y_t) \in \mathcal{R}_+$; la propriété $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_{g-}$ est équivalente à la suivante : si (ξ_t) est un processus progressif borné, il existe un processus prévisible borné (σ_t) tel que $\xi_{g_t} Y_t = \sigma_{g_t} Y_t$; il est facile d'en déduire le résultat suivant : si (Y_t) est une sous-martingale locale, T un temps d'arrêt tel que $(Y_{t\wedge T}) \in \mathcal{R}_+$ et S un temps d'arrêt $\leq$ T tel que $P[Y_S = 0] = 0$, alors l'égalité $\mathcal{F}_{g_T} = \mathcal{F}_{g_T-}$ entraîne $\mathcal{F}_{g_S} = \mathcal{F}_{g_S-}$; le résultat en découle immédiatement. □

3.9. Nous terminerons ce chapitre par une étude du temps local des martingales pseudo-continues de $\mathcal{R}(H)$; ((Y_t) est un processus de $\mathcal{R}_+$ fixé, $H = \{t ; Y_t = 0\}$). Si (X_t) est une martingale de $\mathcal{R}$ dont l'ensemble des zéros est exactement H, $(|X_t|) \in \mathcal{R}(H)$ et nous avons vu en 3.2.1, c), que le temps local de (X_t) est absolument continu par rapport à (λ_t). Il n'en est évidemment plus de même si (X_t) n'annule en dehors de H, et il est naturel de supposer que cela introduit une partie singulière, dans ce temps local, que nous allons préciser. Nous aurons besoin d'un résultat de grossissement qui, curieusement, ne figure pas dans [10].

3.9.1. Lemme : *Soient* H *un ensemble aléatoire optionnel satisfaisant aux conditions α) et β) de 2.5, et* A_t *un processus croissant intégrable, nul à l'origine,* $(\mathcal{F}_{g+t})$*-optionnel.*

Il existe une mesure aléatoire positive unique $a(\omega,dt)$ *possédant les propriétés suivantes :*

- P-*p.s.* $a(\omega,dt)$ *est portée par* $H^c(\omega)$
- a *est* σ*-finie sur la tribu optionnelle (i.e. il existe un processus* (W_t) $(\mathcal{F}_t)$*-optionnel strictement positif tel que* $W(t,\omega)\, a(\omega,dt)$ *soit intégrable)*
- a *est* $(\mathcal{F}_t)$*-optionnelle (i.e. quelque soit* (u_t) *mesurable positif, on a l'égalité*

$$E\left[\int_0^\infty u_s\; a(\omega,ds)\right] = E\left[\int_0^\infty {}^{o}u_s\; a(\omega,ds)\right]\Big).$$

- *enfin, pour tout processus* (u_t) *mesurable positif,*

$$E\left[\int_0^\infty u_{\overline{g+s}}\; dA_s\right] = E\left[\int_g^\infty u_s\; a(ds)\right].$$

Démonstration : a) Nous utiliserons les notations suivantes :

- nous désignons par (y_t) la projection $(\mathcal{F}_t)$-optionnelle de $[g,\infty]$;
- il existe un processus croissant (C_t), $(\mathcal{F}_t)$-optionnel et intégrable, unique, tel que

$$E\left[\int_0^\infty u_s\, dC_s\right] = E\left[\int_0^\infty u_{\bar{g}+s}\, dA_s\right] \quad \text{quelque soit } (u_t) \text{ optionnel borné ;}$$

il est clair que (dC_t) est presque sûrement portée par H^c.

b) Montrons l'unicité de a ; si a et a' satisfont aux conditions de l'énoncé, on aura, quelque soit u optionnel positif,

$$E\left[\int_0^\infty u_s\, dC_s\right] = E\left[\int_0^\infty u_{\bar{g}+s}\, dA_s\right] = E\left[\int_g^\infty u_s\, a(ds)\right] = E\left[\int_0^\infty y_s\, u_s\, a(ds)\right],$$

ce qui entraîne l'égalité $y_s\, a(ds) = y_s\, a'(ds)$; a et a', qui coïncident sur $\{t\ ;\ y_t > 0\} = H^c$, sont égales.

c) Pour montrer l'existence de a, posons $a(ds) = \dfrac{dC_s}{y_s}$; nous devons vérifier que

$$E\left[\int_0^\infty u_{\bar{g}+s}\, dA_s\right] = E\left[\int_g^\infty u_s\, a(ds)\right]$$

quelque soit u mesurable positif ; supposons dans un premier temps, que (u_t) est $(\mathcal{F}_t)$-optionnel ; le deuxième membre s'écrit alors

$$E\left[\int_0^\infty y_s\, u_s\, a(ds)\right] = E\left[\int_0^\infty u_s\, dC_s\right] = E\left[\int_0^\infty u_{\bar{g}+s}\, dA_s\right],$$

ce qui prouve notre assertion. Si, maintenant, u est mesurable, on écrit :

$$E\left[\int_0^\infty u_{\bar{g}+s}\, dA_s\right] = E\left[\int_0^\infty dA_s\, \frac{{}^o(u\, 1_{[g,\infty[})\,(\bar{g}+s)}{y_{\bar{g}+s}}\right] = E\left[\int_g^\infty \frac{a(ds)}{y_s}\, {}^o(u\, 1_{[g,\infty]})(s)\right]$$

$$= E\left[\int_0^\infty a(ds)\, {}^o(u\, 1_{[g,\infty]})(s)\right] = E\left[\int_g^\infty a(ds) u_s\right]. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3.9.2. <u>Remarque</u> : Il est facile de voir que $a[\bar{g}_t, t[= (\rho(A))_t$; cela montre que le processus $a[\bar{g}_t, t[$ est p.s. fini ; on en déduit que $a(I)$ est fini pour tout intervalle I contigu à H de longueur finie.

Dans la proposition qui suit, (Y_t) est un processus de $\mathcal{R}_+$, $H = \{t \; ; \; Y_t = 0\}$, $g = \sup\{t \; ; \; Y_t = 0\}$. On note comme précédemment (λ_t) le processus croissant intervenant dans la décomposition de Doob-Meyer de (Y_t). Considérons une martingale (X_t) de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}(H)$ de temps local (L_t) ; le processus $(\chi_t) = \left(\frac{X_{g+t}}{Y_{g+t}}\right)$ est une $(Q, (\mathcal{F}_{g+t}))$-martingale dont on note le temps local (ℓ'_t).

3.9.3. <u>Proposition</u> : *Il existe un processus prévisible* (α_t) *et une mesure aléatoire optionnelle positive* $\ell(dt)$ *portée par* H^c *tels que*

$$E_P\left[\int_0^\infty Y_s \, \ell(ds)\right] < \infty \; ; \quad (\ell_{[g,g+t]}) = (\ell'_t) \; ; \quad L_t = \int_0^t \alpha_s \, d\lambda_s + \int_0^t Y_s \, \ell(ds).$$

On notera en particulier que $1_H(t) dL_t$ *est absolument continue par rapport à* $d\lambda_t$.

<u>Démonstration</u> : Nous avons vu précédemment que la pseudo-continuité entraîne une simplification de la formule de Tanaka : on a

$$|\chi_t| = |\chi_o| + \int_0^t \text{signe}(\chi_{s-}) d\chi_s + \ell'_t.$$

De plus, $E_Q[\ell'_\infty] = E_Q[|\chi_\infty| - |\chi_o|] < \infty$; le lemme précédent, appliqué sous la probabilité Q, affirme l'existence d'une mesure aléatoire optionnelle $\ell(dt)$ portée par H^c telle que $\ell[g, g+t] = \ell'_t$; on peut écrire

$$E_P\left[\int_0^\infty Y_s \, \ell(ds)\right] = E_Q\left[\int_g^\infty \ell(ds)\right] = E_Q[\ell'_\infty] < +\infty.$$

Revenons à la formule de Tanaka ; appliquant l'opérateur ρ aux deux membres, il vient

$$(7) \qquad |X_t| = |\sigma_{\bar g_t}| Y_t + Y_t\, \rho\left[\int_0^{\cdot} \mathrm{signe}(\chi_{s-}) d\chi_s\right]_t + Y_t\, \ell(\bar g_t, t)$$

où (σ_t) est un processus progressif tel que $\sigma_{\bar g} = \chi_o$. Effectuons la décomposition canonique du second membre, en remarquant d'abord que le deuxième terme est une martingale. D'après un raisonnement déjà employé, on peut écrire

$$|\sigma_{\bar g_t}| Y_t = \sigma'_{\bar g_t} Y_t + \alpha_{\bar g_t} Y_t$$

où (σ'_t) (resp. (α_t)) est un processus progressif (resp. prévisible) tel que

$$(8) \qquad \sigma'_{\bar g} = |\sigma_{\bar g}| - E_Q[|\sigma_{\bar g}| \,|\, \mathcal{F}_{g-}] \qquad \text{(resp. } (9) \quad \alpha_{\bar g} = E_Q[|\sigma_{\bar g}| \,|\, \mathcal{F}_{g-}]).$$

$(\sigma'_{\bar g_t} Y_t)$ est une martingale uniformément intégrable, tandis que $(\alpha_{\bar g_t} Y_t)$ s'écrit, en vertu du théorème du balayage prévisible,

$$\alpha_{\bar g_t} Y_t = \int_0^t \alpha_{\bar g_s} d\mu_s + \int_0^t \alpha_s\, d\lambda_s.$$

Le processus croissant intervenant dans la proposition canonique de $(|\sigma_{\bar g_t}| Y_t)$ est donc $\int_0^t \alpha_s d\lambda_s$. Nous allons maintenant montrer que le troisième terme admet la décomposition canonique

$$Y_t\, \ell(]\bar g_t, t]) = \int_0^t Y_s\, \ell(ds) + \int_0^t \ell(]g_s, s]) d\mu_s.$$

Introduisons pour cela la suite croissante de mesures aléatoires intégrables (ℓ^n) définie par

$$\ell^n(dt) = 1_{\{Y_t \geq \frac{1}{n}\}}\, \ell(dt)$$

et posons $\ell^n_t = \ell^n[0,t]$; le théorème du balayage permet d'écrire

$$Y_t\ \ell^n(]g_t,t]) = Y_t(\ell^n_t - \ell^n_{g_t}) = \int_0^t Y_s\, d\ell^n_s + \int_0^t \ell^n_s\, dY_s - \int_0^t \ell^n_{g_s}\, dY_s$$

$$= \int_0^t Y_s\, d\ell^n_s + \int_0^t (\ell^n_s - \ell^n_{g_s})\,(d\mu_s + d\lambda_s) = \int_0^t Y_s\, d\ell^n_s + \int_0^t (\ell^n_s - \ell^n_{g_s})d\mu_s$$

$$= \int_0^t Y_s\ \ell^n(ds) + \int_0^t \ell^n(]g_s,s])d\mu_s.$$

Notre résultat sera donc établi si l'on sait démontrer que

$\int_0^t \ell^n(]g_s,s])d\mu_s$ converge vers $\int_0^t \ell(]g_s,s])d\mu_s$, ce qui se fait facilement

(on notera que le processus $\ell(]g_t,t])$ est localement borné). Le processus croissant continu figurant dans la décomposition canonique du second membre de *(7)* est donc

$$\int_0^t \alpha_s\, d\lambda_s + \int_0^t Y_s\ \ell(ds)\ ,$$ ce qui achève de montrer 3.9.3.

3.9.4 **Remarque** : La proposition précédente fait apparaître (α_t) comme la densité de Lebesgue de (dL_t) par rapport à $(d\lambda_t)$. L'égalité

$$\alpha_{\bar g} = E_Q[\,|\sigma_{\bar g}|\,|\mathcal{F}_{g-}] \tag{9}$$

rappelle alors le théorème de Fatou relatif aux martingales positives et à leurs mesures de sortie.

3.9.5. **Corollaires** : *Soient* (X_t) *et* (X'_t) *deux martingales de* $\mathcal{R}$ *admettant pour temps locaux respectifs* (L_t) *et* (L'_t). *On pose* $H = \{t\ ;\ X_t = 0\}$ $H' = \{t\ ;\ X'_t = 0\}$, $g = \sup\{t\ ;\ X_t = 0\}$, $g' = \sup\{t\ ;\ X'_t = 0\}$.

1) H *et* H' *sont indistinguables si et seulement si les mesures aléatoires* (dL_t) *et* (dL'_t) *sont presque sûrement équivalentes.*

2) Supposons H *contenu dans* H' *; les assertions suivantes sont équivalentes*

(i) $g' > g$ *p.s. sur* $\{g > 0\}$ *;*

(ii) dL_t *et* dL'_t *sont presque sûrement étrangères ;*

(iii) $\lim\limits_{h \downarrow\downarrow 0} \dfrac{X'_{g+h}}{X_{g+h}} = 0$ *p.s. sur* $\{g > 0\}$ *;*

(iv) $\inf\{t > g \; ; \; X'_t = 0\} = g$ *p.s. sur* $\{g > 0\}$.

Démonstration : 1) Si $H = H'$, la proposition 3.9.3. entraîne immédiatement les égalités $L'_t = \int_0^t 1_H(s)\, dL'_s = \int_0^t \alpha_s \, dL_s$, et l'on obtient le résultat en intervertissant les rôles de (X_t) et (X'_t). Réciproquement, si (dL_t) et (dL'_t) admettent les mêmes ensembles de mesure nulle, leurs supports sont indistinguables de sorte que $g = g'$. L'égalité entre H et H' résulte alors de leur saturation.

2) (i) $\Longrightarrow$ (ii) ; en effet, $K = H' \setminus H$ est un ensemble optionnel contenant $[g']$, de sorte que

$$E\left[\int_0^\infty 1_{K^c}(t) dL'_t\right] = E[|X'_\infty| \; 1_{K^c}(g') \; ; \; g' > 0] = 0.$$

Il en résulte que (dL'_t) est portée par $H' \setminus H$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Supposons (dL_t) et (dL'_t) étrangères ; reprenons les notations de 3.9.3. et posons $\sigma_{\bar{g}} = \lim\limits_{h \downarrow\downarrow 0} \dfrac{X'_{\bar{g}+h}}{X_{\bar{g}+h}}$, $\alpha_{\bar{g}} = E_Q[|\sigma_g| \,|\, \mathcal{F}_{g-}]$; on a

$$0 = E\left[\int_0^\infty \alpha_s \, dL_s\right] = E[|X_\infty| \, \alpha_{\bar g} \; ; \; g > 0] \; ;$$

$\alpha_{\bar g}$ est donc nul sur $\{g > 0\}$; il en est de même de $\sigma_{\bar g}$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). La $(Q,\mathcal{F}_{g+t})$-martingale $\chi_t = \dfrac{X'_{g+t}}{|X_{g+t}|}$ est pseudo-continue et nulle à l'origine sur $\{g > 0\}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) de façon évidente. □

On notera que le corollaire 1) n'est plus vrai si l'on supprime l'hypothèse $P[X_\infty = 0] = P[X'_\infty = 0] = 0$; il est facile de construire à partir d'un "mouvement brownien de Walsh" à quatre branches deux martingales continues uniformément intégrables admettant même temps local en 0 et des ensembles de zéros distincts.

3.9.6. **Exemples** : 1) Soient (B_t) un mouvement brownien standard muni de sa filtration naturelle, $T = \inf\{t \; ; \; |B_t| = 1\}$, $Y_t = |B_{t\wedge T}|$. La martingale $X_t = \exp(-\frac{1}{2}(t \wedge T)) \operatorname{sh}(B_{t\wedge T})$ admet même ensemble de zéros que Y_t ; les temps locaux de (X_t) et $(B_{t\wedge T})$ sont donc équivalents ; plus précisément

$$\alpha_g = E[|\chi_0| \, |\mathcal{F}_{g-}] = \exp(-\tfrac{1}{2} g),$$

de sorte que $\alpha_t = e^{-\frac{1}{2}t}$, $L_t = \int_0^t e^{-\frac{1}{2}s} \, d\lambda_s$. On peut modifier X_t de manière à ce qu'elle admette même temps local que $(B_{t\wedge T})$: le théorème du balayage prévisible permet d'affirmer que

$$e^{\frac{1}{2}g_t} e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sh} B_t = e^{-\frac{1}{2}(t-g_t)} \operatorname{sh} B_t$$

a même temps local que (B_t).

Avant de passer au deuxième exemple, revenons un instant aux hypothèses et aux notations de la proposition 3.9.3 ; supposons qu'il existe une semi-martingale (ξ_t) telle que $X_t = \xi_t\, Y_t$; il est possible de donner une description plus précise de la mesure $\ell(dt)$: si (ν_t) désigne le temps local de (ξ_t), on a

$$\textit{(10)} \qquad \ell(dt) = 1_{H^c}(t)d\nu_t \quad ; \quad L_t = \int_0^t \alpha_s\, d\lambda_s + \int_0^t Y_s\, d\nu_s.$$

En effet, $\xi_{g+t} = \dfrac{X_{g+t}}{Y_{g+t}}$ admet pour temps local $(\nu_{g+t} - \nu_g)$ de sorte que $\ell'_t = \nu_{g+t} - \nu_g$; le processus ν'_t défini par $d\nu'_t = 1_{H^c}(t)d\nu_t$ vérifiera donc $\nu'_{g+t} - \nu'_g = \nu_{g+t} - \nu_g = \ell'_t$ ce qui entraîne $\ell(dt) = d\nu'_t$. On notera que, sous cette hypothèse supplémentaire, le processus $(\ell]0,t])$ est fini.

Les égalités *(10)* pourraient également être déduites d'une formule simple, dûe à Ouknine [13], permettant de calculer le temps local du produit de deux semi-martingales.

2) Posons maintenant $X_t = B^3_{t\wedge T} - 3(t\wedge T)B_{t\wedge T}$, $\xi_t = B^2_{t\wedge T} - 3(t \wedge T)$.

On a $\chi_o = -3g$ signe(B_T), $|\chi_o| = 3g$, $\alpha_t = 3t$.

Désignant par (ν_t) le temps local de la semi-martingale $(B^2_t - 3t)$, on peut écrire

$$L_t = \int_0^{t\wedge T} 3s\, d\lambda_s + \int_0^{t\wedge T} |B_s| d\nu_s.$$

On vérifie bien sur cet exemple que, conformément à (3.9.5. (iv)) les ensembles aléatoires $H = \{t\ ;\ B_t = 0\}$ et $H'\setminus H = \{t\ ;\ B^2_t = 3t\}$ ne sont pas "collés" l'un à l'autre.

3) Donnons maintenant des exemples de martingales (X_t) et (X'_t) satisfaisant aux conditions (3.9.5. 2)). Nous ferons d'abord l'observation suivante : soient (X_t) une martingale de $\mathcal{R}$ et (X''_t) une martingale de $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}(H)$, posons

$X'_t = X_t - \tau_{\bar{g}_t} X''_t$, où (τ_t) est un processus progressif tel que

$$\tau_{\bar{g}} = \lim_{h \downarrow\downarrow 0} \frac{X''_{\bar{g}+h}}{X_{\bar{g}+h}}$$; le couple $((X_t)\ ,\ (X'_t))$ satisfait alors à (3.9.5. 2)).

Pour rendre les exemples plus concrets, on peut prendre pour (X''_t) les martingales qui viennent d'être étudiées en 1) et 2) ci-dessus, ce qui conduit à poser

$$X'^{(1)}_t = e^{-\frac{1}{2}t} \text{sh } B_t - e^{-\frac{1}{2}g_t} B_t = B_t\left[(\exp(-\frac{t}{2}))\frac{\text{sh}(B_t)}{(B_t)} - \exp(-\frac{g_t}{2})\right]$$

$$X'^{(2)}_t = B_t^3 - 3t\, B_t + 3g_t\, B_t = B_t(B_t^2 - 3(t-g_t)).$$

Ces deux martingales admettent des temps locaux portés respectivement par les ensembles aléatoires

$$\left\{t\ ;\ B_t \neq 0\ ;\ \frac{\text{sh } B_t}{B_t} = e^{\frac{1}{2}(t-g_t)}\right\}\ ;\ \{t\ ;\ B_t \neq 0\ ;\ |B_t| = \sqrt{3(t-g_t)}\}.$$

Il résulte de (3.9.5) que ces ensembles sont "collés" à H, ce qui pourrait également se déduire de la loi du logarithme itéré relative à un processus de Bessel de dimension 3. Remarquons enfin que, dans ces deux exemples, les semi-martingales

$$\xi^{(1)}_t = \left(e^{-\frac{1}{2}t}\right)\frac{\text{sh } B_t}{B_t} - e^{-\frac{1}{2}\gamma_t}\ ,\ \xi^{(2)}_t = B_t^2 - 3(t-\gamma_t)$$

vérifient $X'^{(i)}_t = \xi^{(i)}_t B_t$, $(i = 1,2)$, de sorte que les mesures aléatoires $\ell^{(i)}$ satisfont $\ell^{(i)}(0,t) < \infty$ p.s.

3.10. Projection sur les filtrations lentes.

Nous allons commencer par un résultat très simple caractérisant les martingales uniformément intégrables s'annulant sur un fermé optionnel H de fin g p.s. finie. En bonne logique, nous aurions dû le situer au tout début de cette rédaction. Nous supposerons, pour simplifier, que g évite les temps d'arrêt. P.A. Meyer, à qui nous devons une partie de la démonstration qui suit, est en train d'étendre le résultat à des situations plus générales ; nous lui emprunterons la terminologie suivante : l'ensemble

$\tilde{H} = \{t \ ; \ P[t \geq g|\mathcal{F}_t] = 0\}$, qui est le plus grand ensemble optionnel de fin g, sera appelé *ombre optionnelle* de g.

3.10.1. Proposition : *Soit* (X_t) *une martingale uniformément intégrable ; les assertions suivantes sont équivalentes*

1) $X_g = 0$ *p.s. sur* $\{g > 0\}$

2) $E[X_\infty|\mathcal{F}_{g-}] = 0$ *p.s. sur* $\{g > 0\}$

3) (X_t) *s'annule sur* H

4) (X_t) *s'annule sur l'ombre optionnelle de* g.

Nous nous appuierons sur le lemme suivant

3.10.2. Lemme : *Posons* $X' = E[X_\infty|\mathcal{F}_{g-}]$, $X'' = X' \, 1_{\{g>0\}}$,

$$X'_t = E[X'|\mathcal{F}_t] \ , \quad X''_t = E[X''|\mathcal{F}_t].$$

Alors, $X_g = X'_g = X''_g$ *p.s. sur* $\{g > 0\}$.

Démonstration du lemme : Il suffit de se limiter au cas où X_∞ est positive ; appelons (dA_t) la projection duale (optionnelle ou prévisible) de $\varepsilon_g \, 1_{\{g>0\}}$, et soit (U_t) un processus prévisible borné. (A_t) est un processus croissant continu tel que $A_g = A_\infty$, de sorte que l'on a

$$E[X_g\ U_g\ ;\ g>0] = E\Big[\int_0^\infty X_s\ U_s\ dA_s\Big] = E\Big[X_\infty \int_0^g U_s\ dA_s\Big] = E\Big[X' \int_0^g U_s\ dA_s\Big]$$

$$= E[X'_g\ U_g\ ;\ g>0].$$

Le même calcul, effectué en remplaçant X_g par X''_g , conduit aux égalités $E[X_g\ U_g\ ;\ g>0] = E[X'_g\ U_g\ ;\ g>0] = E[X''_g\ U_g\ ;\ g>0]$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Démonstration de 3.10.1 :

2) $\Longrightarrow$ 1) : Si $E[X_\infty|\mathcal{F}_{g-}] = 0$ sur $\{g>0\}$, alors $X'' = 0$; la martingale (X''_t) étant nulle, on a : $X_g = X''_g = 0$ sur $\{g>0\}$.

1) $\Longrightarrow$ 4) Si $X_g = 0$ sur $\{g>0\}$, (X_t) est nulle (dA_t) presque partout. Introduisons le support H' de (dA_t) ; c'est un fermé optionnel de fin g' égale à g. Avec des notations évidentes, la continuité à droite de (X_t) entraîne sa nullité sur $H'\setminus G'$; on a donc $X_{d'_t} = 0$ sur $\{d'_t < \infty\}$.

Recopiant alors la démonstration de 2.2. a) (qui n'exige pas que (X_t) s'annule sur H tout entier), on en tire l'égalité $X_t = E[X_\infty\ ;\ t \geq g|\mathcal{F}_t]$. Il en résulte facilement que (X_t) s'annule sur l'ombre optionnelle de g.

4) $\Longrightarrow$ 2). Soit U_t un processus prévisible borné ; le théorème du balayage prévisible affirme que le processus $(X_t\ U_{g_t}\ 1_{\{g_t>0\}})$ est une martingale uniformément intégrable nulle à l'origine, si bien que

$$E[X_\infty\ U_g\ ;\ g>0] = 0.$$

3.10.3. Corollaires : *Faisons l'hypothèse supplémentaire* $P[g>0] = 1$.

a) Soit $\mathcal{H}$ *le sous-ensemble de* L^2 *formé des variables terminales des martingales bornées dans* L^2 *s'annulant sur* H ; $\mathcal{H}$ *est l'orthogonal de*

$L^2(\Omega, \mathcal{F}_{g-}, P)$.

b) Dans une filtration $(\mathcal{F}_t)$ *vérifiant* $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_{g-}$ *, toute martingale uniformément intégrable s'annulant sur* H *est nulle.*

Introduisons la filtration $(\mathcal{A}_t)$ régularisée à droite de la filtration $(\mathcal{F}_{g_t-})$; H reste optionnel et $H \setminus D$ prévisible dans cette nouvelle filtration ; en outre $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{A}_{g-}$. Désignant par $p_{\mathcal{A}}$ l'opérateur de projection sur la tribu $(\mathcal{A}_t)$-optionnelle, il est possible d'exprimer la proposition précédente de la façon suivante :

3.10.4. *On suppose toujours* $g > 0$ *p.s. Une martingale uniformément intégrable* (X_t) *s'annule sur* H *si et seulement si* $p_{\mathcal{A}}(X) = 0$.

<u>Démonstration</u> : Si (X_t) s'annule sur H, $p_{\mathcal{A}}(X)_t$, qui est une $(\mathcal{A}_t)$-martingale s'annulant sur H, est nulle en vertu du corollaire précédent. La réciproque résulte immédiatement de la proposition 3.10.1.

Revenons à la situation où H est l'ensemble des zéros d'un processus (Y_t) de $\mathcal{R}_+$.

3.10.5. <u>Définitions</u> : *Soit* (X_t) *un processus de* $\mathcal{R}(H)$ *; nous dirons que*

- (X_t) *est du premier type s'il existe* (σ_t) *progressif vérifiant*

$$E_P[|\sigma_{\bar g}| Y_\infty] < +\infty \quad \text{et tel que} \quad X_t = \sigma_{\bar g_t} Y_t$$

- (X_t) *est du second type si* $\lim\limits_{h \downarrow\downarrow 0} \dfrac{X_{\bar g+h}}{Y_{\bar g+h}} = 0$ *p.s.*

Faisons quelques remarques qui découlent facilement du théorème quotient : (X_t) est du second type si et seulement si $\chi_o = 0$; tout processus du second type est une martingale uniformément intégrable ; pour un tel processus, on peut écrire : $\lim_{h\downarrow\downarrow 0} \left[1_{H^c}(\bar{g}_t+h)\, \frac{X_{\bar{g}_t+h}}{Y_{\bar{g}_t+h}}\right] = 0.$

Le fait d'être du second type ne dépend que de H (et non pas du processus (Y_t) admettant H comme ensemble de zéros). Tout processus (X_t) de $\mathcal{R}(H)$ admet une décomposition unique $X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$ en somme de processus du premier et du second type.

3.10.6. Proposition : *Soit* (X_t) *un processus de* $\mathcal{R}(H)$.

1) (X_t) *est du second type si et seulement si* $E[X_\infty|\mathcal{F}_g] = 0$.

2) (X_t) *est du premier type si et seulement si* $\frac{X_\infty}{Y_\infty}$ *est* $\mathcal{F}_g$*-mesurable.*

Démonstration : 1) Grâce au théorème quotient, on a les équivalences suivantes

(X_t) est du second type $\Longleftrightarrow \chi_o = 0 \Longleftrightarrow E_Q[\frac{X_\infty}{Y_\infty}|\mathcal{F}_g] = 0 \Longleftrightarrow E_P[X_\infty|\mathcal{F}_g] = 0.$

2) Si (X_t) est du premier type, appelons (σ_t) un processus progressif tel que $X_t = \sigma_{\bar{g}_t} Y_t$; on a alors $\chi_t = \sigma_{\bar{g}}$, $\frac{X_\infty}{Y_\infty} = \chi_\infty = \sigma_{\bar{g}}$.

Réciproquement, si χ_∞ est $\mathcal{F}_g$-mesurable, désignant par (σ_t) un processus progressif tel que $\chi_\infty = \sigma_{\bar{g}}$, on a $\frac{X_{g+t}}{Y_{g+t}} = \chi_t = \sigma_{\bar{g}}$, d'où $X_t = \sigma_{\bar{g}_t} Y_t$.

3.10.7. Corollaires :

1) Supposons Y_∞ $\mathcal{F}_g$*-mesurable (il arrive souvent que* $Y_\infty = 1$*) ; identifions les martingales de carré intégrable à leurs variables terminales. La décomposition d'une martingale de* $\mathcal{H}$ *en martingales du premier et du second type correspond à la décomposition hilbertienne* $\mathcal{H} = \mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}''$ *quand on a posé*

$$\mathcal{H}' = L^2(\Omega,\mathcal{F}_g,P) \cap \mathcal{H} , \quad \mathcal{H}'' = \{X \in L^2(\Omega,\mathcal{F},P) \ ; \ E_P(X|\mathcal{F}_g) = 0\}.$$

Le cas général est un peu plus compliqué : la décomposition $\frac{X_\infty}{Y_\infty} = \frac{X_\infty^{(1)}}{Y_\infty} + \frac{X_\infty^{(2)}}{Y_\infty}$ *correspond à une décomposition hilbertienne analogue à la précédente, où l'on a remplacé* P *par* Q.

2) Soit $(\mathcal{F}_t)$ *une filtration pour laquelle* $\mathcal{F}_g = \mathcal{F}_\infty$ *; tout processus de* $\mathcal{R}(H)$ *est alors du premier type. C'est en particulier le cas pour la filtration naturelle engendrée par un fermé aléatoire marqué.*

On généralise ainsi un résultat d'Hamza ([2], [9]).

3) Soit (X_t) *une martingale uniformément intégrable ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $E[X_\infty|\mathcal{F}_g] = 0$

(ii) X *s'annule sur* H *et est du second type.*

<u>Démonstration du Corollaire 3</u> : Si (i) est vérifiée, $E[X_\infty|\mathcal{F}_{g-}] = 0$; (X_t) s'annule donc sur H et l'on peut appliquer 3.10.6. L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) résulte immédiatement de 3.10.6.

Introduisons une nouvelle filtration, un peu plus rapide que la précédente : $(\mathcal{B}_t)$ sera la régularisée à droite de la filtration $(\mathcal{F}_{\gamma_t})$ et $p_{\mathcal{B}}$ l'opérateur de projection sur la tribu optionnelle relative à $(\mathcal{B}_t)$; si T est un $(\mathcal{B}_t)$-temps d'arrêt, on sait (cf. [7]) que $\mathcal{F}_{\gamma_T}$ est contenue dans $\mathcal{B}_T$; nous allons montrer qu'il y a égalité entre ces deux tribus si $[T] \subset H^c$; plus précisément :

3.10.8. <u>Proposition</u> : *Si* T *est un* $(\mathcal{B}_t)$*-temps d'arrêt et* A *est dans* $\mathcal{B}_T$ *, alors :*

$$A \cap \{\gamma_T < T\} \in \mathcal{F}_{\gamma_T}.$$

<u>Démonstration</u> :

a) Commençons par étudier le cas où T est une constante t ; soit t_n une suite décroissant strictement vers t ; il existe une suite $(Z_t^{(n)})$ d'indicateurs d'ensembles progressifs vérifiant $Z^{(n)}_{\bar{\gamma}_{t_n}} = 1_A$; on note alors que, sur l'événement $\{\gamma_t < t\}$, γ_{t_n} décroit vers γ_t de façon stationnaire ; posant $Z_t = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, Z_t^{(n)}$, il est facile d'en déduire que

$$1_{A\cap\{\gamma_t<t\}} = Z_{\bar{\gamma}_t}\, 1_{\{\gamma_t<t\}}\text{ , d'où le résultat.}$$

b) Supposons T étagé : il existe une suite finie strictement croissante $0 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_n \leq \infty$ telle que $T = \sum_i t_i\, 1_{\{T=t_i\}}$; nous allons commencer par construire une suite (α_t^i) d'indicateurs d'ensembles progressifs vérifiant

$$\alpha^i_{\bar{\gamma}_{t_i}} = 1_{\{T=t_i\}\cap\{\gamma_{t_i}<t_i\}} \;\; ; \;\; 1_{\{T=t_j\}\cap\{\gamma_{t_j}<t_j\}}\, \alpha^i_{\bar{\gamma}_{t_j}} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

D'après le a), il existe une suite (β_t^i) d'indicateurs progressifs, que l'on peut prendre nuls sur $[t_i,\infty[$ vérifiant

$\beta^i_{\bar{\gamma}_{t_i}} = 1_{\{T=t_i\}\cap\{\gamma_{t_i}<t_i\}}$; remarquons alors que $1_{\{T=t_j\}}\, \beta^i_{\bar{\gamma}_{t_j}} = 0$ si $j > i$;

(cela est évident sur $\{\gamma_{t_i} = \gamma_{t_j}\}$, mais cela l'est aussi sur $\{\gamma_{t_j} > \gamma_{t_i}\} = \{\gamma_{t_j} > t_i\}$ d'après la condition imposée sur le support de (β_t^i)). On vérifie sans peine que la suite

$$\alpha_t^i = \beta_t^i \prod_{j<i} (1 - \beta_t^j)\text{ vérifie les conditions demandées.}$$

Si maintenant A est un événement de $\mathcal{B}_T$, il existe une suite (U^i_t) d'indicateurs progressifs tels que $U^i_{\bar{\gamma}_{t_i}} = 1_{A\cap\{T=t_i\}\cap\{\gamma_{t_i}<t_i\}}$; posons

$V^i_t = U^i_t \alpha^i_t$, $V_t = \sum_i V^i_t$; on a

$$V_{\bar{\gamma}_t} = \sum_{i,j} V^i_{\bar{\gamma}_{t_j}} 1_{\{\bar{\gamma}_{t_j}<t_j\}} U^i_{\bar{\gamma}_{t_j}} \alpha^i_{\bar{\gamma}_{t_j}} 1_{\{T=t_j\}}$$

$$= \sum_i U^i_{\bar{\gamma}_{t_i}} 1_{\{\bar{\gamma}_{t_i}<t_i\}} 1_{\{T=t_i\}} = 1_{A\,\cap\,\{\bar{\gamma}_T\,<\,T\}}.$$

Cela montre que l'événement $A \cap \{\bar{\gamma}_T < T\}$ est dans $\mathcal{F}_{\gamma_T}$; il en est de même de $A \cap \{\gamma_T < T\}$ qui ne diffère du précédent que par l'événement $\mathcal{F}_o$-mesurable $A \cap \{T = 0\} \cap H^c_o$.

c) Si T est quelconque, on peut approcher T par une suite décroissante de temps d'arrêt étagés ; un raisonnement analogue au a) prouve alors le résultat.

On peut alors exprimer 3.10.6. en termes de projections.

3.5.9. Proposition :

a) Soit (X_t) *un processus de* $\mathcal{R}(H)$; (X_t) *est du second type si et seulement si* $p_{\mathcal{B}}(X)_t = 0$.

b) Soit $X_t = \sigma_{\bar{g}_t} Y_t + (X_t - \sigma_{\bar{g}_t} Y_t)$ *la décomposition de* (X_t) *en processus de* $\mathcal{R}(H)$ *du premier et du second type ; on a*

(11) $\quad p_{\mathcal{B}}(X)_t = \sigma_{\bar{g}_t} y_t$, *où* (y_t) *désigne la* $(\mathcal{B}_t)$*-sous-martingale* $p_{\mathcal{B}}(Y)_t$.

Démonstration :

a) Soit (X_t) dans $\mathcal{R}(H)$; soit T un $(\mathcal{B}_t)$-temps d'arrêt tel que $[T] \subset H^c$; si (X_t) est du second type, on a, en appliquant 3.10.6., $E[X_T|\mathcal{F}_{g_T}] = E[X_T|\mathcal{B}_T] = 0$; $p_{\mathcal{B}}(X)$ s'annule donc sur H^c ; H étant $\mathcal{B}$-optionnel, elle est aussi nulle sur H. Inversement, si $p_{\mathcal{B}}(X) = 0$, $E[X_\infty|\mathcal{F}_g] = 0$ et l'on applique 3.10.6. Le b) est alors immédiat puisque σ_{g_t} est $(\mathcal{B}_t)$-optionnel. □

La formule *(11)* permet des calculs explicites de projection de martingales de $\mathcal{R}(H)$ généralisant les résultats de [3]. On peut en effet souvent calculer (y_t) à l'aide du noyau de Lévy de H ; on pourra se reporter aux exemples étudiés par C. Rainer [14].

4 - Un théorème de Girsanov.

Comme il a été annoncé dans l'introduction, nous nous proposons de montrer un théorème de représentation des martingales qui s'annulent sur l'ensemble des zéros d'une martingale donnée ; nous nous servirons pour cela d'une extension du théorème de Girsanov dans laquelle la densité, au lieu d'être une martingale positive comme c'est l'habitude, est une sous-martingale de la classe $\mathcal{R}_+$.

Dans tout ce chapitre, nous supposerons, pour des raisons de simplicité, que :

(*) <u>les</u> $(P,(\mathcal{F}_t))$ <u>martingales sont continues</u>.

Il sera toujours temps d'aborder les difficultés du cas discontinu quand le besoin s'en fera sentir. Fixons quelques notations :

(Y_t) est une sous martingale de $\mathcal{R}_+$ (nécessairement continue, sous l'hypothèse (*)) telle que $E[Y_\infty] = 1$, $H = \{t \; ; \; Y_t = 0\}$, $g = \sup\{t \; ; \; Y_t = 0\}$, $Q = Y_\infty P$.

4.1.1. Lemme : *Soit* (A_t) *un processus croissant* $(P,(\mathcal{F}_t))$*-optionnel et localement intégrable ; on pose* $B_t = \int_{]g_t,t]} \frac{dA_s}{Y_s}$;

(B_t) *est* $\mathcal{F}_t$*-optionnel et fini.*

Démonstration : La suite des processus optionnels $\int_{]g_t,t]} \frac{dA_s}{Y_s} 1_{\{Y_s \geq \frac{1}{n}\}}$ converge vers (B_t) de sorte que ce dernier est optionnel. Il reste à montrer qu'il est fini. Si T est un temps d'arrêt tel que $E_P[A_T] < \infty$, on a

$$E_Q\left[\int_g^T \frac{dA_s}{Y_s}\right] = E_P\left[\int_0^T Y_\infty 1_{\{s\geq g\}} \frac{dA_s}{Y_s}\right] \overset{(a)}{=} E_P[A_T] < \infty$$

si bien que la variable aléatoire $\int_g^T \frac{dA_s}{Y_s}$ est presque-sûrement finie.

((a) découle de l'identité (1) de la Proposition 2.2).

Il en résulte que le processus $C_t = \int_g^{g+t} \frac{dA_s}{Y_s}$ est fini ; il en est de même du processus (B_t) qui est égal à $(\rho(C)_t)$. □

Remarque : Ce résultat devient inexact si l'on remplace la condition "(A_t) est $(\mathcal{F}_t)$-optionnel" par "(A_t) est $(\mathcal{F}_{g+t})$-optionnel" ; voir un contre-exemple à la fin de ce chapitre.

4.1.2. Théorème : *Soit* (X_t) *une* $(P,(\mathcal{F}_t))$*-semi-martingale qui est la somme d'une martingale locale et d'un processus à variation finie* (V_t) *tel que* dV_t *soit portée par* H.

Le processus $(\hat{X}_t\ ;\ t \geq 0)$ *défini par*

$$\hat{X}_t = X_{g+t} - X_g - \int_g^{g+t} \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}$$

est alors une $(Q\ ;\ (\mathcal{F}_{g+t}))$*-martingale locale et* $\langle\hat{X},\hat{X}\rangle_t = \langle X,X\rangle_{g+t} - \langle X,X\rangle_g$.

Remarque : Les hypothèses faites ici sur (X_t) sont différentes de celles du théorème quotient ; en particulier, on n'exige pas que (X_t) s'annule sur H.

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où (X_t) est une martingale locale. Changeons tout d'abord de filtration : d'après la théorie du grossissement progressif [10], on sait que le processus $(\xi_t\ ;\ t \geq 0)$ défini par

$$\xi_t = X_{g+t} - X_g + \int_g^{g+t} \frac{d\langle X,Z^g\rangle_s}{1-Z^g_s} \text{ est une } (P,(\mathcal{F}_{g+t}))\text{-martingale locale}$$

(rappelons que $Z^g_t = P[g > t|\mathcal{F}_t]$). Appliquons maintenant le théorème de Girsanov usuel dans la filtration $(\mathcal{F}_{g+t})$ après avoir remarqué que $\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_{g+t}} = E_P[Y_\infty|\mathcal{F}_{g+t}] = \Delta_{g+t}$ quand on a posé $\Delta_t = \dfrac{Y_t}{1-Z^g_t}$.

Le processus $\eta_t = \xi_t - \xi_o - \displaystyle\int_0^t \frac{d\langle\xi,\Delta_{g+\cdot}\rangle_s}{\Delta_{g+s}}$ est une $(Q,(\mathcal{F}_{g+t}))$-martingale locale qui s'écrit encore :

$$\eta_t = X_{g+t} - X_g + \int_g^{g+t} \left(\frac{d\langle X,Z^g\rangle_s}{1-Z^g_s} - \frac{d\langle X,\Delta\rangle_s}{\Delta_s}\right).$$

Mais la formule d'Itô appliquée dans la filtration grossie $(\mathcal{F}^g_t)$ sur l'intervalle stochastique $]g,g+t]$ conduit à l'égalité

$$\frac{d\Delta_s}{\Delta_s} = \frac{dY_s}{Y_s} + \frac{dZ^g_s}{1-Z^g_s} + dW_s\ ,\ \text{où } (W_t) \text{ est à variation finie sur}$$

tout compact de $]g,\infty[$; on a donc : $\dfrac{d\langle X,\Delta\rangle_s}{\Delta_s} = \dfrac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s} + \dfrac{d\langle X,Z^g\rangle_s}{1-Z^g_s}$; cela permet de simplifier l'expression de (η_t) qui devient

$$\eta_t = X_{g+t} - X_g - \int_g^{g+t} \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s} .$$

4.1.3. Nous aurons besoin d'une légère modification du théorème précédent

Proposition : *Soit* S *un* $(\mathcal{F}_t)$*-temps d'arrêt ; on pose* $Q^S = Y_S \cdot P$. *Alors,*

$$\left(X_{\gamma_S+t} - X_{\gamma_S} - \int_{\gamma_S}^{\gamma_S+t} \frac{d\langle X,Y^S\rangle_u}{Y_u}\right)_{t\geq 0} \quad \textit{est une} \quad (Q^S,(\mathcal{F}_{\gamma_S+t}))\textit{-martingale locale.}$$

Démonstration : Le remplacement de (g_t) par (γ_t) ne pose pas de problème ; on notera aussi qu'il n'y a aucune nouveauté dans le cas où $[S] \subset H^c$: il suffit de remplacer H par $H \cap [0,S]$ et (Y_t) par la sous-martingale arrêtée (Y_t^S). Si, en revanche, $[S]$ rencontre H, Y^S n'est pas dans la classe $\mathcal{R}_+$ puisque Y_∞^S n'est pas strictement positive.

Dans la démonstration précédente, le théorème de Girsanov "usuel" ne peut pas s'appliquer puisque Q^S n'est pas équivalente à P. Cette difficulté se résoud de la façon suivante : dans la filtration $(\mathcal{G}_t) = (\mathcal{F}_{\gamma_S+t})$, l'événement $\{Y_S > 0\} = \{\gamma_S < S\}$ est dans $\mathcal{G}_0$ si bien que l'extension du théorème de Girsanov dont on a besoin est triviale.

4.1.4. Proposition : *Soient* (X_t) *une* $(P,(\mathcal{F}_t))$ *martingale locale et* (θ_t) *un processus prévisible tel que* $\int_0^t \theta_s^2 \, d\langle X,X\rangle_s$ *soit fini pour tout* t *; on pose*

$$X'_t = \int_0^t \theta_s \, dX_s \quad ; \textit{ alors,} \quad \hat{X}'_t = \int_0^t \theta_{g+s} \, d\hat{X}_s .$$

Démonstration : Remarquons d'abord que

$$\int_0^t \theta_{g+s}^2 \, d\langle\hat{X},\hat{X}\rangle_s = \int_g^{g+t} \theta_u^2 \, d\langle X,X\rangle_u < +\infty,$$ si bien que l'intégrale stochastique $\int_0^t \theta_{g+s} \, d\hat{X}_s$ existe ; de plus,

$$\hat{X}'_t = \int_g^{g+t} \left[dX'_s - \frac{d\langle X',Y\rangle_s}{Y_s}\right] = \int_g^{g+t} \theta_s\left[dX_s - \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right] = \int_0^t \theta_{g+s} \, d\hat{X}_s \, .$$

Remarque : On peut, comme ci-dessus, ajouter à (X_t) un processus à variation finie porté par H ; cela ne change ni $\hat{X}$, ni $\hat{X}'$.

4.2. Retour à l'étude des quotients.

Soit (X_t) une $(P,(\mathcal{F}_t))$ semi-martingale satisfaisant aux hypothèses du théorème 4.1.2. Définissons, comme au § 3, le processus $(\chi_t \; ; \; t > 0)$ en posant $\chi_t = \dfrac{X_{g+t}}{Y_{g+t}}$.

Comme l'on n'a pas supposé que (X_t) s'annulait sur H, (χ_t) peut exploser à l'origine ; néanmoins

4.2.1. Théorème : *Le processus* $(\chi_t \; ; \; t > 0)$ *est une* $(Q,(\mathcal{F}_{g+t}))$*-martingale locale sur* $]0,\infty[$ *; plus précisément, on a, quelque soient* $\varepsilon > 0$ *et* $t \geq 0$

$$\chi_{\varepsilon+t} = \frac{X_{g+\varepsilon}}{Y_{g+\varepsilon}} + \int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \frac{(Y_{g+s} \, d\hat{X}_s - X_{g+s} \, d\hat{Y}_s)}{Y_{g+s}^2} \, .$$

Démonstration : On a vu en 4.1.2 que (X_{g+t}) et (Y_{g+t}) sont des $(Q,(\mathcal{F}_{g+t}))$ semi-martingales ; on a donc en appliquant la formule d'Itô

$$\frac{X_{g+\varepsilon+t}}{Y_{g+\varepsilon+t}} = \frac{X_{g+\varepsilon}}{Y_{g+\varepsilon}} + \int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \frac{1}{Y_{g+u}}\left(dX_{g+u} - \frac{d\langle X,Y\rangle_{g+u}}{Y_{g+u}}\right) - \int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \frac{X_{g+u}}{Y_{g+u}^2}\left(dY_{g+u} - \frac{1}{Y_{g+u}} d\langle Y,Y\rangle_{g+u}\right)$$

Aux notations près, c'est le résultat annoncé. □

On notera en particulier que $\left(\frac{1}{Y_{g+t}}\ ;\ t>0\right)$ est une $(Q,(\mathcal{F}_{g+t}))$-martingale locale sur $]0,\infty[$ satisfaisant l'égalité

$$\frac{1}{Y_{g+\varepsilon+t}} = \frac{1}{Y_{g+\varepsilon}} - \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+t} \frac{d\hat{Y}_s}{Y_{g+s}^2} .$$

4.3. Un exemple : Le méandre Brownien et la relation d'Imhof.

Dans ce paragraphe, (B_t) désigne le mouvement Brownien standard muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$; on pose $Y_t = |B_{t\wedge 1}|$, $Q = \dfrac{|B_1|\cdot P}{E|B_1|}$. Le processus $(m_u\ ;\ u \le 1)$ défini par :

$$m_u = \frac{1}{\sqrt{1-g}}\, |B_{g+u(1-g)}|$$

est connu sous le nom de méandre Brownien.

Théorème : *Sous la probabilité* Q, $(m_u\ ;\ u \le 1)$ *est un processus de Bessel de dimension* 3, *indépendant de* $\mathcal{F}_g$.

Démonstration : D'après (4.1.2), $|B_{(g+t)\wedge 1}| - \displaystyle\int_g^{(g+t)\wedge 1} \frac{ds}{|B_s|}$ est une $(Q,\mathcal{F}_{g+t})$ martingale locale dont le processus croissant est égal à $t \wedge (1-g)$. Il existe donc, sur un espace éventuellement élargi, un mouvement Brownien (β_t) tel que

$$|B_{g+t}| = \beta_t + \int_0^t \frac{ds}{|B_{g+s}|}, \quad \text{pour } t \le 1-g.$$

Effectuons le changement de variables $t = u(1-g)$; après changement d'échelle de temps (on notera que, dans la filtration $(\mathcal{F}_{g+t})$, g se comporte comme une constante), l'égalité précédente s'écrit

$$m_u = \beta'_u + \int_0^u \frac{ds}{m_s} \qquad (u \le 1)$$

où (β'_u) désigne le mouvement Brownien $\left(\frac{1}{\sqrt{1-g}}\,\beta_{u(1-g)}\right)$.

(m_u) est donc solution de l'équation différentielle stochastique qui caractérise le processus de Bessel de dimension 3.

Corollaire **(Imhof [17])** : *Sur l'espace canonique* $C([0,1],\mathbb{R}_+)$ *muni de la famille des applications coordonnées* $(X_u\ ;\ u \le 1)$, *désignons par* S *et* M *les lois respectives du processus de Bessel de dimension* 3 *et du méandre Brownien. On a l'égalité :*

$$M = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{X_1} \cdot S.$$

Démonstration : Notons $\mathcal{M}$ la tribu engendrée par $(m_u\ ,u \le 1)$. Il découle du résultat d'indépendance énoncé dans le Théorème, et de l'égalité :

$$|B_1| = \sqrt{1-g}\ m_1\ ,\ \text{que :}\quad E[|B_1|\ |\ \mathcal{M}] = E[\sqrt{1-g}]m_1.$$

Or, on a :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = E(|B_1|) = E(\sqrt{1-g})\ E(m_1) = \frac{2}{\pi}\ E[m_1],$$

d'où : $\qquad E[m_1] = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$,

et, toujours d'après le Théorème :

$$Q|_{\mathcal{M}} = \frac{m_1}{E(m_1)} \cdot P|_{\mathcal{M}}\ .$$

Cette relation équivaut à la relation annoncée entre M et S. □

Remarque : L'approche ci-dessus du méandre brownien est tout à fait différente des autres études sur ce sujet répertoriées dans l'article [16], auquel le lecteur peut se référer pour une vue d'ensemble. □

Voici maintenant le contre-exemple promis à la suite du Lemme 4.1.1.

Il suffit de considérer : $A_t = \int_g^{g+t} \frac{ds}{|B_s|}$.

En effet, on a alors : $\int_g^{g+t} \frac{dA_s}{Y_s} = \int_g^{g+t} \frac{ds}{B_s^2} = \infty$ P-p.s.,

ce qui découle, encore à l'aide du Théorème, de ce que :

pour tout $t > 0$, $\int_0^t \frac{ds}{R_s^2} = \infty$, P-p.s.,

$(R_s, s \geq 0)$ désignant ici le processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.

En fait, on a le résultat assez bien connu, et beaucoup plus précis, suivant (voir, par exemple, Revuz-Yor [18], Exercise 3.20, p. 400).

Lemme : *Soit* $(R_t, t \geq 0)$ *processus de Bessel de dimension* $d > 2$, *issu de* 0 ; *alors, on a* :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\log \frac{1}{\varepsilon}} \int_\varepsilon^1 \frac{ds}{R_s^2} = \lim_{t \uparrow \infty} \frac{1}{\log t} \int_0^t \frac{ds}{R_s^2} = \frac{1}{d-2}, \qquad \text{P-p.s.}$$

5 - Représentation des martingales de $\mathcal{R}(H)$.

Dans ce chapitre, (Y_t) désigne toujours une sous-martingale de la classe $\mathcal{R}_+$ fixée une fois pour toutes, de décomposition canonique $Y_t = \mu_t + \lambda_t$; H est, rappelons le, l'ensemble des zéros de (Y_t) ; on suppose, comme au chapitre précédent, que les martingales de la filtration $(\mathcal{F}_t)$ sont continues.

Nous allons commencer par voir ce que devient le théorème 4.2.1 quand la partie martingale de (X_t) appartient à l'espace stable engendré par (μ_t).

5.1. **Proposition** : *Soit* (X_t) *une* $(P,\mathcal{F}_t)$*-semi-martingale admettant la décomposition*

$$X_t = X_o + \int_0^t \theta_s \, d\mu_s + V_t \, ,$$

(θ_t) *étant un processus prévisible tel que* $\int_0^t \theta_s^2 \, d\langle\mu,\mu\rangle_s < \infty$ *quelque soit* t, *et* (V_t) *un processus à variation finie optionnel tel que* dV_t *soit portée par* H. *On pose*

$$\eta_t = \frac{1}{Y_t} \left(\theta_t - \frac{X_t}{Y_t}\right) 1_{H^c}(t).$$

Alors, pour tous $\varepsilon > 0$ *et* $t \geq 0$, *les intégrales* $\int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \eta_{g+s}^2 \, d\langle\hat{Y},\hat{Y}\rangle_s$ *sont finies et l'on a*

$$(12) \qquad \chi_{\varepsilon+t} = \frac{X_{g+\varepsilon+t}}{Y_{g+\varepsilon+t}} = \frac{X_{g+\varepsilon}}{Y_{g+\varepsilon}} + \int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \eta_{g+s} \, d\hat{Y}_s \, .$$

Démonstration : Les intégrales $\int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \frac{1}{Y_{g+s}^2} \, d\langle\hat{X},\hat{X}\rangle_s$ et $\int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \left(\frac{X_{g+s}}{Y_{g+s}^2}\right)^2 d\langle\hat{Y},\hat{Y}\rangle_s$ sont finies ; la première partie de l'énoncé en résulte facilement.

L'égalité *(12)* découle immédiatement de 4.2.1 et 4.1.4.

Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition précédente, mais supposons en outre que $(X_t) \in \mathcal{R}(H)$; on sait alors que $(\chi_t \, ; \, t \geq 0)$ est une $(Q,\mathcal{F}_{g+t})$ martingale uniformément intégrable, ce qui va nous permettre de supprimer ε dans l'énoncé précédent.

5.2. Proposition : *Soit* (X_t) *un processus de* $\mathcal{R}(H)$ *satisfaisant aux hypothèses de la proposition 5.1 ; on a, quelque soit* $t \geq 0$

$$\int_0^t \eta^2_{g+s}\, d\langle\hat{Y},\hat{Y}\rangle_s = \int_g^{g+t} \eta^2_s\, d\langle Y,Y\rangle_s < +\infty$$

(13)

$$\chi_t = \chi_o + \int_0^t \eta_{g+s}\, d\hat{Y}_s = \chi_o + \int_g^{g+t} \eta_s \left(dY_s - \frac{d\langle Y,Y\rangle_s}{Y_s}\right)$$

Démonstration : Posons $B_t = \langle\chi,\chi\rangle_t - \langle\chi,\chi\rangle_o$. Il résulte de 5.1 que

$B_{\varepsilon+t} - B_\varepsilon = \int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \eta^2_{g+s}\, d\langle\hat{Y},\hat{Y}\rangle_s$, ce qui s'écrit encore $B_u - B_\varepsilon = \int_\varepsilon^u \eta^2_{g+s}\, d\langle\hat{Y},\hat{Y}\rangle_s$

quelque soit $u \geq \varepsilon$. Faisant tendre ε vers zéro, il vient

$\int_0^u \eta^2_{g+s}\, d\langle\hat{Y},\hat{Y}\rangle_s = B_u < +\infty$. L'intégrale stochastique $\int_0^u \eta_{g+s}\, d\hat{Y}_s$ a maintenant

un sens ; le résultat désiré s'obtient en faisant tendre ε vers zéro dans

l'égalité : $\chi_u = \chi_\varepsilon + \int_\varepsilon^u \eta_{g+s}\, d\hat{Y}_s$.

5.3. Le théorème de représentation.

Nous aurons besoin du lemme suivant, dans lequel (X_t) désigne un processus pouvant s'écrire comme la somme d'une $(P,(\mathcal{F}_t))$-martingale locale continue et d'un processus à variation finie continu porté par H.

5.3.1. Lemme : *Soit* (u_t) *un processus* $(\mathcal{F}_t)$ *prévisible tel que*

$$\int_g^{g+t} u^2_s\, d\langle X,X\rangle_s < +\infty \qquad \textit{quelque soit } t \geq 0.$$

a) $W_t^{(u)} = \int_0^t u_{g+s}\, d\hat{X}_s$ *est alors une* $(Q,(\mathcal{F}_{g+t}))$ *martingale locale continue.*

b) Si S *est un temps d'arrêt fini, l'intégrale stochastique*

$J_S^u = \int_{\gamma_S}^S u_s\left(dX_s - \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right)$ *a un sens dans la filtration* $(\mathcal{F}_t^{\gamma_S})$ *(rappelons que cette notation désigne la plus petite filtration contenant* $(\mathcal{F}_t)$ *et faisant de* γ_S *un temps d'arrêt).*

c) On a, quelque soit S, $(\mathcal{F}_t)$*-temps d'arrêt fini,*

$$\rho(W^{(u)})_S = J_S^u \qquad P\text{-}p.s.$$

Démonstration : a) On sait que $(\hat{X}_t)$ est une $(Q,(\mathcal{F}_{g+t}))$-martingale locale continue ; d'autre part, $\int_g^{g+t} u_s^2\, d\langle X,X\rangle_s = \int_0^t u_{g+s}^2\, d\langle\hat{X},\hat{X}\rangle_s < +\infty$, d'où l'existence de l'intégrale stochastique.

b) Posons $A = \{\gamma_S < S\} = \{Y_S > 0\}$; A appartient à $\mathcal{F}_{\gamma_S}$ et il suffit de définir J_S^u sur A. La restriction de P à A est une mesure équivalente à $Q^S = Y_S \cdot P$ si bien qu'on peut construire l'intégrale stochastique J_S^u sous la mesure Q^S. Introduisons

$$\hat{X}_t^{(S)} = X_{\gamma_S+t} - X_{\gamma_S} - \int_{\gamma_S}^{\gamma_S+t} \frac{d\langle X,Y^S\rangle_s}{Y_s^S}\ .$$

On sait, d'après 4.1.3, que $(\hat{X}_t^{(S)})$ est une $(Q^S,(\mathcal{F}_{\gamma_S+t}))$-martingale locale telle que $\langle\hat{X}^{(S)},\hat{X}^{(S)}\rangle_t = \langle X,X\rangle_{\gamma_S+t} - \langle X,X\rangle_{\gamma_S}$.

D'autre part, $\displaystyle\int_0^{S-\gamma_S} u^2_{\gamma_S+t}\, d\langle\hat{X}^{(S)},\hat{X}^{(S)}\rangle_t = \int_{\gamma_S}^{S} u_s^2\, d\langle X,X\rangle_s$; cette dernière quantité est finie ; on peut en effet écrire

$$\int_{\gamma_t}^{t} u_s^2\, d\langle X,X\rangle_s = \rho\left[\int_g^{g+\cdot} u_s^2\, d\langle X,X\rangle_s\right]_t ,$$

de sorte que le processus figurant au premier membre est fini.

L'intégrale stochastique $\displaystyle\int_0^{S-\gamma_S} u_{\gamma_S+v}\, d\hat{X}_v^{(S)}$ a un sens, et est finie, dans $(Q^S,(\mathcal{F}_{\gamma_S+t}))$; elle s'écrit aussi bien, après changement de variable,

$\displaystyle\int_{\gamma_S}^{S} u_s\left(dX_s - \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right)$ dans $(Q^S,(\mathcal{F}_t^{\gamma_S}))$.

c) Supposons, dans un premier temps, (u_t) borné, et posons $N_t = \displaystyle\int_0^t u_s\, dX_s$ et $U_t^{(u)} = N_t - N_{\gamma_t} - \displaystyle\int_{\gamma_t}^{t} u_s \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}$; il faut s'assurer que l'intégrale figurant au deuxième membre de cette égalité est définie.

Posons pour cela $v_t = \displaystyle\int_0^t u_s\, d\langle X,Y\rangle_s$; alors, $\displaystyle\int_g^{g+t} \frac{dv_s}{Y_s} = \int_g^{g+t} \frac{u_s d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}$ définit un processus fini en vertu de 4.1.1, et il en est de même de

$$\int_{\gamma_t}^{t} u_s \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s} = \rho\left[\int_g^{g+\cdot} u_s \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right]_t .$$

Comme $U_t^{(u)}$ est nul sur H et vérifie $U_{g+t}^{(u)} = W_t^{(u)}$, on a $U^{(u)} = \rho(W^{(u)})$;

enfin, $U_S^{(u)} = N_S - N_{\gamma_S} - \displaystyle\int_{\gamma_S}^{S} u_s \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s} = \int_{\gamma_S}^{S} u_s\left(dX_s - \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right)$, ce qui termine la démonstration dans le cas où (u_t) est borné.

Passons au cas général, et posons :

$$U_t^{(u)} = \rho(W^{(u)})_t \ , \ u_t^n = u_t \ 1_{\{|u_t|\le n\}} \ , \ W_t^n = \int_0^t u_{g+s}^n \ d\hat{X}_s \ , \ U_t^n = \rho(W^n)_t .$$

Nous venons de voir que $U_S^n = \displaystyle\int_{\gamma_S}^{S} u_s^n\left(dX_s - \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right) = J_S^n$.

Il existe une sous suite $\{u^{n_k}\}$ de $\{u^n\}$ telle que

α) la suite de processus $\{W^{n_k}\}$ converge vers $W^{(u)}$

β) la suite de variables aléatoires $\{J_S^{n_k}\}$ converge presque sûrement vers $J_S^{(u)}$.

La suite de processus $\{\rho(W^{n_k})\}$ converge alors vers $\rho(W^{(u)})$; il en résulte que $\{U_S^{n_k}\}$ converge presque sûrement vers $U_S^{(u)}$. On a donc : $J_S^{(u)} = U_S^{(u)}$, ce qu'il fallait démontrer. □

Quelques mots sont peut être nécessaires pour expliquer la signification de ce lemme ; le calcul stochastique et la théorie du grossissement permettent de définir la famille des variables aléatoires $J_t^{(u)} = \displaystyle\int_{\gamma_t}^{t} u_s\left(dX_s - \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right)$.

Quand t est fixé, $J_t^{(u)}$ n'est définie qu'à une équivalence près. De plus, la filtration dans laquelle on travaille dépend de t. Il nous faut alors, et c'est ce qui a été fait dans ce lemme, recoller ces variables de façon à construire un processus optionnel.

Pour alléger les notations, le processus $(\rho(W^{(u)})_t)$ qui vient d'être construit sera noté $\left(\int_{\gamma_t}^{t} u_s\left(dX_s - \frac{d\langle X,Y\rangle_s}{Y_s}\right) \; ; \; t \geq 0\right)$.

5.3.2. Soit (X_t) un processus de $\mathcal{R}(H)$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 5.1. Rappelons que l'on a posé

$$\sigma_t = \underline{\lim}_{h\downarrow\downarrow 0} \frac{X_{t+h}}{Y_{t+h}} 1_{H^c}(t+h) \;, \qquad \eta_t = \frac{1}{Y_t}\left(\theta_t - \frac{X_t}{Y_t}\right) 1_{H^c}(t).$$

<u>**Théorème**</u> : *Définissons les processus* $X_t^{(1)}$ *et* $X_t^{(2)}$ *par les égalités*

$$X_t^{(1)} = \sigma_{g_t^-} Y_t \quad \textit{et} \quad X_t^{(2)} = Y_t \int_{\gamma_t}^{t} \eta_s\left(dY_s - \frac{d\langle Y,Y\rangle_s}{Y_s}\right)$$

a) Le processus $\int_{\gamma_t}^{t} \eta_s^2 \, d\langle Y,Y\rangle_s$ *est fini.*

b) $(X_t^{(1)})$ *et* $(X_t^{(2)})$ *sont des processus de* $\mathcal{R}(H)$*, respectivement du premier et du deuxième type (le second est donc une martingale uniformément intégrable d'après (3.10.5), et l'on a :* $X_t = X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$*).*

(X_t) *est une martingale si et seulement si* $E_Q[\sigma_g | \mathcal{F}_{g-}] = 0$.

<u>Démonstration</u> : a) D'après la proposition 5.2, le processus $\left(\int_g^{g+t} \eta_s^2 \, d\langle Y,Y\rangle_s\right)$ est fini ; il suffit d'appliquer à ce processus l'opérateur ρ pour obtenir le résultat.

b) On a, en appliquant le lemme (5.3.1),

$$\rho\left[\int_0^{\cdot} \eta_{g+s} \, d\hat{Y}_s\right]_t = \int_{\gamma_t}^{t} \eta_s\left(dY_s - \frac{d\langle Y,Y\rangle_s}{Y_s}\right).$$

Appliquant alors l'opérateur ρ aux deux membres de l'égalité *(13)*, on obtient

$$X_t = \sigma_{\bar{g}_t} Y_t + Y_t \int_{\gamma_t}^{t} \eta_s \left(dY_s - \frac{d\langle Y,Y\rangle_s}{Y_s} \right). \qquad \square$$

5.3.3. La formule de représentation peut prendre d'autres formes quand on fait des hypothèses supplémentaires

a) <u>Si</u> Y_t <u>est la valeur absolue d'une martingale continue uniformément intégrable</u> (M_t) <u>telle que</u> $M_o = 0$, <u>on a alors</u> :

$$X_t^{(2)} = M_t \int_{\gamma_t}^{t} \operatorname{signe}(M_s)\, \eta_s \left(dY_s - \frac{d\langle Y,Y\rangle_s}{Y_s} \right) = M_t \int_{\gamma_t}^{t} \eta_s \left(dM_s - \frac{d\langle M,M\rangle_s}{M_s} \right).$$

b) <u>On suppose</u> $Y_t = |M_t|$ <u>comme au a) ; on cherche à représenter les</u> **<u>martingales</u>** (X_t) <u>de</u> $\mathcal{R}(H)$ <u>appartenant à l'espace stable engendré par</u> (M_t).

On pose $X_t = \int_0^t \theta'_s \, dM_s$; on a $\theta_s = \operatorname{signe}(M_s)\theta'_s$ et $\eta_s = \frac{1}{M_s}\left(\theta'_s - \frac{X_s}{M_s}\right) 1_{H^c}(s)$.

c) <u>Outre les hypothèses a) et b) ci-dessus, on suppose que la martingale</u> (M_t) <u>satisfait aux hypothèses du corollaire 3.8.4.</u>

On peut alors (cf. 3.8.1) écrire $X_t = \sigma'_{g_t} M_t$ où (σ'_t) est prévisible.

5.4. <u>Le cas du mouvement brownien.</u>

Dans ce paragraphe, (B_t) est un mouvement brownien standard muni de sa filtration naturelle $(\mathcal{F}_t)$, et (X_t) est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale s'annulant sur $H = \{t \; ; \; B_t = 0\}$. Ecrivons la représentation d'Itô de (X_t) : $X_t = \int_0^t \theta_s dB_s$, et posons $\eta_t = \frac{1}{B_t}\left(\theta_t - \frac{X_t}{B_t}\right) 1_{H^c}(t)$.

Théorème : *Il existe un processus prévisible* (σ_t) *tel que*

$$\text{(14)} \qquad X_t = \sigma_{g_t} B_t + B_t \int_{\gamma_t}^{t} \eta_s \left(dB_s - \frac{ds}{B_s}\right).$$

Démonstration : Il nous faut d'abord définir proprement le *processus* optionnel $\left(\int_{\gamma_t}^{t} \eta_s \left(dB_s - \frac{ds}{B_s}\right) \; ; \; t \geq 0\right)$. Pour $a > 0$, le processus

$$U_t^{(a)} = \int_{\gamma_{t\wedge a}}^{t} \eta_s \, 1_{\{s \leq a\}} \left(dB_s^a - \frac{d(s\wedge a)}{B_s^a}\right) \quad \text{a été défini}$$

en 5.3.1 et l'on sait que $U_T^a = \int_{\gamma_{T\wedge a}}^{T\wedge a} \eta_s \left(dB_s - \frac{ds}{B_s}\right)$ pour tout temps d'arrêt T ; de plus, il existe un processus prévisible (σ_t^a) tel que

$$X_{t\wedge a} = \sigma^a_{g_{t\wedge a}} B_{t\wedge a} + B_{t\wedge a} U_t^a .$$

Soit $b \geq a$; si T est un temps d'arrêt , $U^a_{T\wedge a} = U^b_{T\wedge a}$, ce qui entraîne $U_T^a = U^b_{T\wedge a}$; il existe donc un processus optionnel (U_t) que l'on notera $\int_{\gamma_t}^{t} \eta_s \left(dB_s - \frac{ds}{B_s}\right)$, vérifiant $U_{t\wedge a} = U_t^a$ quelque soit a.

Passons à la construction de (σ_t) ; on peut écrire, si $t \in G$, $t \leq a$ $\sigma_t^a = \lim_{h\downarrow\downarrow 0} \frac{X_{t+h}}{B_{t+h}}$; le processus $\sigma_t = \underline{\lim}_{a\to\infty} \sigma^a_{g_t}$ est prévisible ; on peut le rendre fini en remplaçant (σ_t) par $\sigma_t \, 1_{\{|\sigma_t|<\infty\}}$. On vérifie sans peine que $X_t = \sigma_{g_t} B_t + U_t$. □

Remarques : 1) Il est vraisemblable que la formule de représentation *(14)* reste valable quand (X_t) est une martingale locale s'annulant sur H ; mais pour que la méthode précédente puisse s'appliquer, il faut pouvoir trouver une suite (T_n) de temps d'arrêts réduisant (X_t) et (B_t) et qui évitent H.

2) Le théorème précédent ne serait entièrement satisfaisant qu'assorti d'une réciproque (prévue pour le prochain séminaire) : étant donné un couple (σ_t), (η_t) de processus prévisibles, trouver les propriétés du processus (X_t) donné par la formule *(14)* en fonction des conditions d'intégrabilité imposées à (σ_t) et (η_t).

3) Les processus (σ_{g_t}) et $\displaystyle\int_{\gamma_t}^{t} \eta_s(dB_s - \frac{ds}{B_s})$ ne sont en général pas des semi-martingales ; les méthodes usuelles du calcul stochastique sont alors difficilement applicables, ce qui explique notre recours à la théorie du grossissement progressif.

Remerciements : Nous remercions vivement F. Knight pour sa lecture très soigneuse de notre manuscrit, qui nous a permis de corriger plusieurs fautes typographiques.

Références

[1] J. Azéma : Quelques applications de la théorie générale des processus.
Invent. Math. **18**, *1972, p. 293-336.*

[2] J. Azéma : Sur les fermés aléatoires.
Sém. Probas XIX, Lect. Notes in Maths. 1123, Springer (1985).

[3] J. Azéma, M. Yor : Etude d'une martingale remarquable.
Sém. Probas XXIII, Lect. Notes in Maths., vol. 1372, Springer (1989), p. 88-130.

[4] J. Azéma, M. Yor (eds.) : Temps locaux. Ouvrage collectif.
Astérisque (1978) Soc. Math. France.

[5] M.T. Barlow, M.Yor : Sur la construction d'une martingale continue, de valeur absolue donnée.
Sém. Probas XIV, Lect. Notes in Math. 784. Springer (1980), p. 62-75.

[6] M.T. Barlow, J. Pitman, M. Yor : On Walsh's Brownian motions.
Sém. Probas. XXIII, Lect. Notes in Maths. 1372, Springer (1989), p. 275-293.

[7] C. Dellacherie, B. Maisonneuve, P.A. Meyer : Probabilités et potentiel.
Tome V, Hermann. A paraître (1992).

[8] D. Gilat : Every non-negative submartingale is the absolute value of a martingale.
Annals of Proba., **5**, *p. 475-481 (1977).*

[9] K. Hamza : La propriété de représentation prévisible dans les filtrations naturelles d'ensembles régénératifs.
Thèse de 3ème cycle. Laboratoire de Probabilités - Université Paris VI (1989).

[10] Th. Jeulin : Semimartingales et grossissement d'une filtration.
Lect. Notes in Maths. 833, Springer (1980).

[11] P.A. Meyer, C. Stricker, M. Yor : Sur une formule de la théorie du balayage.
Sém. de Probas. XIII, Lect. Notes in Maths. 721, Springer (1979), p. 478-487.

[12] P.W. Millar : Germ σ-fields and the natural states space of a Markov process.
Zeit. für Wahr., 39, p. 85-101 (1977).

[13] Y. Ouknine : Temps local du produit et du sup de deux semi-martingales.
Sém. Probas. XXIV, Lect. Notes in Math. 1426, Springer (1990), p. 477-479.

[14] C. Rainer : Projection d'une diffusion réelle sur sa filtration lente.
Article en préparation (Mai 1992).

[15] Exposés sur la formule du balayage. *Sém. Probas. XIII, Lect. Notes in Maths. 721, Springer (1979), p. 443-489.*

[16] Ph. Biane, M. Yor : Quelques précisions sur le méandre brownien.
Bull. Sci. Maths., 112, 1988, p. 101-109.

[17] J.P. Imhof : Density factorizations for Brownian motion and the three-dimensional Bessel processes and applications.
J. Appl. Proba. 21 (1984), p. 500-510.

[18] D. Revuz, M. Yor : Continuous Martingales and Brownian Motion.
Springer (1991).