Paul-André Meyer
Jia-An Yan

Les « fonctions caractéristiques » des distributions sur l'espace de Wiener

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 61-78
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__61_0>

LES "FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES" DES DISTRIBUTIONS SUR L'ESPACE DE WIENER

par P.A. MEYER et J.A. YAN

La présente rédaction est un véritable exposé de séminaire, autrement dit, elle est destinée à faire connaître des résultats récents, avec peu de contribution originale. Nous profitons aussi de l'occasion pour corriger quelques erreurs dans l'exposé de Meyer–Yan du Sém. XXIII concernant les distributions de Kubo–Yokoi (voir après la bibliographie). Nous renverrons à cet article sous la référence [MY], mais le contenu en a été repris sommairement afin de faciliter la lecture.

Le résultat principal de cet exposé est un théorème très simple et très utile de Potthoff–Streit (n° 4 ci–dessous) caractérisant complètement les "fonctions caractéristiques" des distributions de Kubo–Yokoi. Nous en proposons une variante au n° 6. On a aussi inclus une discussion plus complète des "traces" des fonctions–test, et mentionné plusieurs résultats récents.

Cet exposé a été rédigé à la suite du séjour de J.A. Yan à Strasbourg en Juin 1990, et d'une visite très stimulante de P.A. Meyer à la réunion de travail sur l'analyse du bruit blanc (Bielefeld, Septembre 1990). La plupart des communications y utilisaient l'espace des fonctions–test de Kubo–Yokoi, qui est en train de prendre un rôle central. Nous avons appris aussi que leur origine est plus ancienne que les travaux de Kubo–Yokoi et Kubo–Takenaka, et remonte au moins à Kondratiev–Samoilenko (1976–1980). Rappelons aussi les travaux de Krée, par ex. [1] (1976) et [2], dans lesquels on retrouve des idées voisines (avec pour but l'utilisation d'un "théorème des noyaux" pour décrire les opérateurs sur l'espace de Fock), mais où les fonctions caractéristiques sont traitées comme des séries formelles plutôt que des fonctions entières. P.A. Meyer doit personnellement beaucoup à plusieurs discussions avec Krée au cours des années précédentes.

L'usage semble établi d'appeler *distributions de Hida* les distributions correspondant à ces fonctions–test, et cela nous semble tout à fait justifié. Cependant, l'idée fondamentale de Hida était de définir divers types de distributions sur l'espace de Wiener par des conditions de régularité (et non seulement de taille) des coefficients de Wiener–Ito, et l'espace de Kubo–Yokoi n'est pas le seul de ce genre, même s'il semble être le plus important. Nous en verrons ci–dessous un autre exemple.

1. Espace de Fock sur un e.v.t.. Soit E un espace vectoriel *réel* muni d'une famille (q_i) de formes quadratiques positives. Complexifier l'espace dès le début nuirait sans doute à la clarté.

Pour tout n, $E^{\otimes n}$ désigne ici un produit tensoriel *algébrique*, que l'on munit des formes quadratiques $q_i^{\otimes n}$, simplement notées q_i pour alléger; E_n est le sous–espace symétrique de $E^{\otimes n}$. On pose aussi $E_0 = \mathbb{R}$ avec $q_i(x) = x^2$ pour tout i. Désignons par $\Gamma_0(E, q_i)$ l'ensemble des suites $f = (f_n)$, $f_n \in E_n$ telles que $f_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. On écrira celles-ci comme des sommes formelles $f = \sum_n f_n/n!$. On peut munir cet ensemble d'une opération algébrique, le ***produit tensoriel symétrique*** $\circ$ (symétrisé du produit tensoriel ordinaire $\otimes$) : celui-ci applique $E_m \times E_n$ dans E_{m+n}, et se prolonge à Γ_0 par linéarité.

On munit $\Gamma_0(E, q_i)$ de la famille de formes quadratiques

$$q_i(f) = \sum_n \frac{q_i(f_n)}{n!} .$$

L'espace qui nous intéresse ici, noté $\Gamma(E, q_i)$, est *le complété de* Γ_0 *pour la topologie associée aux seminormes* $\sqrt{q_i}$.

La situation classique est celle où $E = \mathcal{H}$, un espace de Hilbert réel, la famille (q_i) ayant pour seul élément la forme quadratique $q(x) = \|x\|^2$. Alors $\Gamma(\mathcal{H}, q)$ est l'espace de Fock symétrique usuel $\Gamma(\mathcal{H})$. Les deux cas particuliers suivants interviendront constamment.

a) $\mathcal{H} = \mathbb{R}$. Alors un élément de $\Gamma(\mathcal{H})$ est une suite de nombres réels (u_n) telle que $\sum_n u_n^2/n! < \infty$, et nous lui associons l'élément de $L^2(\mathbb{R})$ $\sum_n u_n \varphi_n/n!$ avec $\varphi_n = h_n\sqrt{\gamma}$. Ici γ est la densité de la mesure gaussienne standard, et h_n le n-ième polynôme d'Hermite des probabilistes

$$\sum_n h_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{tx - t^2/2} .$$

Compte tenu de la relation $<\varphi_n, \varphi_n> = n!$ cela définit une isométrie de $\Gamma(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$, qui est en fait un isomorphisme entre ces deux espaces.

Ceci est l'interprétation "plate" de l'espace de Fock élémentaire. Si nous désignons par Ω l'espace $\mathbb{R}$ muni de la mesure gaussienne standard, on a aussi un isomorphisme $(u_n) \longmapsto \sum_n u_n h_n(x)/n!$ entre $\Gamma(\mathbb{R})$ et $L^2(\Omega)$: c'est l'interprétation gaussienne, qui a l'avantage de subsister en dimension infinie.

b) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. Alors les intégrales multiples d'Ito définissent un isomorphisme entre $\Gamma(\mathcal{H})$ et $L^2(\Omega)$, où Ω est l'espace de Wiener des fonctions continues nulles en 0 définies sur $\mathbb{R}$ entier; celui-ci fait correspondre à $f = (f_n)$ la v.a.

$$F = I(f) = \sum_n \frac{1}{n!} I_n(f_n) . \tag{1}$$

Grâce à la division par $n!$, cette représentation est identique à la représentation non-anticipante usuelle, où les intégrales sont étendues aux "simplexes" croissants. Nous noterons couramment les v.a. par de grandes lettres (ici F), afin de les distinguer des suites de leurs coefficients d'Ito (ici $f = (f_n)$).

Nous avons fini par adopter (contrairement à [MY]) le point de vue du "bruit blanc", suivant lequel l'élément aléatoire ω est la *dérivée au sens des distributions* de la trajectoire brownienne $X_\bullet(\omega)$. L'intégrale stochastique $\int \xi(s)\, dX_s(\omega)$ vaut donc, si $\xi \in \mathcal{S}$, $\int \xi(s) \dot{X}_s(\omega)\, ds = (\xi, \omega)$ et non $(\xi, \dot{\omega})$.

c) Fixons enfin quelques notations relatives au cas où $E = \mathbb{R}^\nu$, qui est intermédiaire entre a) et b). Soit $(e_1, \ldots, e_\nu)$ une base orthonormale (euclidienne) de E. A tout multi-indice, *i.e.* tout ensemble $a = (a_i)_{1 \le i \le \nu}$ d'entiers positifs ou nuls, nous associons le vecteur e_a, produit symétrique de a_1 fois e_1, a_2 fois $e_2 \ldots$ (les entiers nuls ne contribuent pas). On a $\| e_a \|^2 = a! = \prod_i a_i!$ avec la convention usuelle $0! = 1$. On pose $|a| = \sum_i a_i$. Dans l'interprétation gaussienne, la v.a. associée à un vecteur $\sum_a u_a e_a / a!$ s'obtient en remplaçant le vecteur e_a par la fonction (polynôme d'Hermite) $h_a(x) = h_{a_1}(x_1) \ldots h_{a_\nu}(x_\nu)$. Les mêmes notations sont utilisées pour un Hilbert quelconque, avec la différence que la base orthonormale (e_i) peut être infinie, et on doit alors imposer explicitement que $|a| < \infty$.

2. Vecteurs-test. Nous sortons maintenant des espaces de Fock ordinaires en utilisant des familles (q_i) de normes hilbertiennes.

a) Le plus simple consiste à prendre pour E un espace de Hilbert, et pour (q_i) toutes les formes quadratiques continues — il suffit en fait de considérer les formes $q_n(x) = n\|x\|^2$. Cela conduit déjà à des espaces intéressants de vecteurs-test.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, on obtient ainsi les fonctions $\sum_n u_n \varphi_n(x)/n!$ telles que la série $\sum_n u_n^2 t^{2n}/n!$ converge pour tout $t > 0$. Si l'on pose $v_n = u_n/\sqrt{n!}$, cela signifie que pour tout > 0 on a une inégalité de la forme $|v_n|^2 \le M t^{-n}$, autrement dit que la suite (v_n) est à décroissance rapide. D'après Simon, cela caractérise les développements des fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en fonctions d'Hermite normalisées $\varphi_n/\sqrt{n!}$. Donc $\Gamma(\mathbb{R}, q_i) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *contrairement à ce qui est affirmé* au milieu de la page 384 de [MY]. On a une situation analogue lorsque $E = \mathbb{R}^\nu$.

Lorsque $E = L^2(\mathbb{R})$, on obtient un espace (en fait une algèbre dans l'interprétation gaussienne : *Sém. Prob. XX*, p.283) de vecteurs-test dont les coefficients d'Ito ont des normes rapidement décroissantes, sans régularité. Dans l'interprétation gaussienne, cet espace est contenu dans celui des v.a.-test de Watanabe, et n'est sans doute pas beaucoup plus petit. On ignore toujours s'il contient les solutions des é.d.s. "raisonnables", auquel cas il éviterait en "Calcul de Malliavin" le recours systématique aux normes L^p.

b) Prenons $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et pour (q_i) la famille de toutes les formes quadratiques positives continues. Alors $\Gamma(E, q_i)$ est l'espace des vecteurs-test de Kubo-Yokoi considéré dans [MY], et thème principal de cet exposé. Cet espace (qui était noté $\mathcal{Y}(\Omega)$ dans [MY]) est souvent noté $(\mathcal{S})$; il sera désigné ici par $\mathcal{S}(\Omega)$. Il est nucléaire, et Kubo-Yokoi ont montré que c'est une algèbre pour la multiplication ordinaire des v.a. sur Ω ("produit de Wiener"); *cf.* [MY] et aussi Potthoff-Yan [1], Yan [1][2]. Ils ont surtout montré ([MY] p.389) que ses éléments ont des versions bien définies partout sur l'espace de Wiener, et même sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Pour définir explicitement la topologie de $\mathcal{S}(\Omega)$, on introduit une famille croissante de formes quadratiques continues q_α $(\alpha \in \mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, telle que toute forme quadratique continue soit majorée par l'une des q_α. Voici le choix utilisé par Kubo-Yokoi, mais soulignons que les classes de vecteurs-test et de distributions considérées ne dépendent pas de ce choix.

Représentant $f \in \mathcal{S}, (\mathbb{R})$ par son développement $\sum_n \frac{u_n}{n!}\varphi_n$, on pose

$$(2) \qquad q_\alpha(f) = \|f\|_\alpha^2 = \sum_n c_n^{2\alpha}\frac{u_n^2}{n!} = \|\Gamma(A^\alpha)f\|^2$$

où $c_n = 2(n+1)$, et A est l'opérateur autoadjoint $A \geq 2I$ (hamiltonien d'oscillateur harmonique) tel que $A\varphi_n = c_n\varphi_n$. Le complété de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour $\|\ \|_\alpha$ est un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\alpha$, dont le dual s'identifie à $\mathcal{H}_{-\alpha}$. Alors, avec des notations faciles à comprendre, $\mathcal{S}(\Omega)$ est l'intersection des espaces de Fock Γ_α, et son dual $\mathcal{S}'(\Omega)$, l'espace des *distributions de Hida* ou v.a. généralisées, est la réunion des $\Gamma_{-\alpha}$. Autrement dit, une distribution de Hida est une somme formelle

$$(3) \qquad \Lambda = \sum_n \frac{I_n(\lambda_n)}{n!}$$

où chaque λ_n est une distribution tempérée symétrique sur $\mathbb{R}^n$, telle qu'il existe au moins un α (généralement positif) tel que $\sum_n \|\lambda_n\|_{-\alpha}^2/n! < \infty$. La dualité entre vecteurs-test et distributions est donnée par la forme bilinéaire

$$(4) \qquad (F, \Lambda) = \sum_n \frac{(f_n, \lambda_n)}{n!}\ .$$

Les v.a. ordinaires de $L^2(\Omega)$ s'identifient à des distributions grâce à la mesure de Wiener $\mathbb{P}$ (et en particulier la distribution 1 correspond à l'intégrale des v.a. de test).

Signalons que Korezlioglu et Ustunel [1] ont développé une théorie analogue, dans laquelle l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et l'opérateur autoadjoint A sont remplacés par des objets plus généraux.

Comment calcule-t-on la norme $\|\Lambda\|_\alpha$ d'une distribution? On est ramené au même problème pour chaque coefficient $\lambda_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$: on développe λ_n (au sens faible) dans la base orthonormale des $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$, où $e_i = \varphi_i/\sqrt{i!}$, soit

$$\lambda_n = \sum_{i_1,\ldots,i_n} b_{i_1\ldots i_n}\, e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_n}$$

(les $b_{i_1\ldots i_n}$ sont symétriques). On a alors

$$(5) \qquad \|\lambda_n\|_\alpha^2 = \sum_{i_1,\ldots,i_n} c_{i_1}^{2\alpha}\ldots c_{i_n}^{2\alpha}\,|b_{i_1\ldots i_n}|^2\ .$$

3. Fonction caractéristique. Dans le cas général de l'espace $\Gamma(E, q_i)$ traité au début on appelle *vecteurs exponentiels* les vecteurs de la forme $\mathcal{E}(f) = \sum_n f^{\otimes n}/n!$ ($f \in E$). On peut montrer que les combinaisons linéaires de vecteurs exponentiels sont denses dans $\Gamma(E, q_i)$. Lorsque $E = \mathbb{R}$, les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(t)$ sont représentés, dans l'interprétation gaussienne, par les fonctions $e^{tx-t^2/2}$, et dans l'interprétation plate, par les fonctions $e^{tx-t^2/2}\sqrt{\gamma(x)}$. On a la même chose pour $E = \mathbb{R}^\nu$, t et x étant des vecteurs et tx, t^2

des produits scalaires. Enfin, lorsque $E = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, les vecteurs exponentiels s'écrivent dans l'interprétation gaussienne $\mathcal{E}(\xi) = \exp(\int \xi(s)\,dX_s - |\xi|^2/2)$ pour $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(\xi)$ appartenant à $\mathcal{S}(\Omega)$, on définit la *fonction caractéristique* de la distribution Λ par la formule

$$U_\Lambda(\xi) = (\mathcal{E}(\xi), \Lambda) = \sum_n \frac{(\xi^{\otimes n}, \lambda_n)}{n!} . \tag{6}$$

C'est aussi la *S-transformée* au sens de Hida de la distribution Λ. La fonction caractéristique d'un vecteur exponentiel $\mathcal{E}(\eta)$ vaut $e^{(\xi,\eta)}$.

EXEMPLES. Toute distribution tempérée $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ s'identifie à une distribution sur Ω, appartenant au "premier chaos". Sa valeur sur la v.a. de test F (formule (1)) est l'"intégrale stochastique" $\int f_1(s)\dot{X}_s(\omega)\,ds$ (voir plus haut). La fonction caractéristique de cette distribution est alors $U_\omega(\xi) = (\xi, \omega)$. Par exemple, si $\omega = \varepsilon_t$, la fonction caractéristique est $\xi(t)$, et la v.a. généralisée correspondante est notée $\dot{X}_t$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de la distribution $\sum_n u_n \varphi_n/n!$ (ou h_n dans l'interprétation gaussienne) est la fonction $\sum_n u_n t^n/n!$. Même chose pour $E = \mathbb{R}^\nu$: $\sum_n \frac{1}{n!} \sum_{|a|=n} u_a h_a$ a pour f.c. $\sum_n \frac{1}{n!} \sum_{|a|=n} u_a t^a$, t étant maintenant un vecteur $(t_1, \ldots t_\nu)$. Le passage de la distribution à sa fonction caractéristique est donc l'inverse de la *transformation d'Hermite* de l'analyse euclidienne classique. Nous verrons dans un instant que les f.c. des distributions sont, même en dimension infinie, des fonctions entières. On peut donc aussi considérer les espaces de vecteurs-test, de distributions, l'espace de Fock... comme des espaces de fonctions entières (point de vue de Bargmann, Segal, etc.). Le nombre de manières différentes de dire la même chose (parfois très élémentaire!) a permis de multiplier par 10 le nombre d'articles consacrés à l'espace de Fock, et cet exposé ne fait pas exception.

4. Fonctions entières sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Les fonctions caractéristiques des distributions de Hida seront des *fonctions entières sur* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous ne supposerons connue aucune théorie générale des fonctions entières sur un e.l.c. complexe, afin encore de rester lisibles. Pour définir une fonction entière H sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

1) Nous demanderons d'abord que, pour tout sous-espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de dimension finie, H se prolonge au complexifié comme une fonction entière classique.

2) Les normes $\|\ \|_\alpha$ se prolongeant de manière évidente au complexifié de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nous posons, ξ étant maintenant complexe

$$M(R, \alpha) = \sup_{\|\xi\|_\alpha \leq R} |H(\xi)| .$$

Nous imposerons alors à H l'existence d'un $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $M(R, \alpha)$ soit finie.

REMARQUE. Il n'est pas toujours commode de travailler sur les boules complexes, et on préfère parfois avoir des conditions portant sur la seule fonction $H(z\xi)$, avec ξ réel et z complexe. Nous en dirons un mot plus loin.

Nous dirons de plus que H est *de type* $(2,\alpha)$ si l'on a $M(R,\alpha) = O(e^{KR^2})$, *de type* 2 si cette propriété est satisfaite pour un α au moins. Voici alors le théorème de Potthoff-Streit (la partie relative aux fonctions-test est due à Kuo-Potthoff-Streit [1]).

THÉOREME. *Pour qu'une fonction $U(\xi)$ soit la fonction caractéristique d'une distribution de Hida (resp. d'un vecteur-test de Kubo-Yokoi), il faut et il suffit qu'elle soit entière de type 2 (resp. de type $(2,\alpha)$ pour tout α).*

Il est presque évident que ces conditions sont nécessaires. On a $U(\xi) = \sum_n (\xi^{\otimes n}, \lambda_n)/n!$; on remplace dans cette formule ξ par $t_1\xi_1 + \ldots + t_k\xi_k$, on développe par la formule du binôme, que nous écrirons avec la notation des multiindices $a = (a_1, \ldots, a_k)$, rappelée plus haut

$$(\sum_{i=1}^{k} t_i\xi_i)^n = \sum_{|a|=n} \frac{n!}{a!} t^a \xi^a$$

Ici, t^a est le produit des $t_i^{a_i}$ avec bien sûr $t_i^0 = 1$, et de même pour ξ^a. On peut alors réarranger

$$U(t_1\xi_1 + \ldots + t_k\xi_k) = \sum_n \sum_{|a|=n} \frac{t^a}{a!} (\xi^{\circ a}, \lambda_n)$$

à condition que le côté droit soit absolument convergent (ici $\xi^{\circ a}$ est le symétrisé du produit tensoriel $\xi_1^{\otimes a_1} \otimes \ldots \otimes \xi_k^{\otimes a_k}$). Or si les ξ_i (complexes) sont de norme$_\alpha \leq 1$ on a la même chose pour tous leurs produits tensoriels, et par symétrisation $|(\xi^{\circ a}, \lambda_n)| \leq \| \lambda_n \|_{-\alpha}$. Prenant alors les t_i complexes de module R, la série de droite est dominée par

$$\sum_n \frac{R^n}{n!} \| \lambda_n \|_{-\alpha} \sum_{|a|=n} \frac{n!}{a!}$$

Cette dernière somme est égale à k^n. On utilise enfin le fait que $\sum_n \| \lambda_n \|_{-\alpha}^2 / n!$ converge et l'inégalité de Schwarz pour obtenir la majoration en Ce^{KR^2}.

Nous passons à la réciproque. L'hypothèse de type 2 sera utilisée seulement à la fin, le début de la démonstration étant consacré à la reconstruction des distributions λ_n et au calcul de leur norme$_\beta$ à partir de la fonction entière U.

Nous développons comme ci-dessus $U(\sum_{i=1}^k z_i\xi_i)$ en série entière et nous calculons les coefficients par la formule de Cauchy, l'intégration ayant lieu sur le produit des cercles $\{z_i = R\}$. On a donc pour tout multi-indice $a = (a_1, \ldots a_k)$ de degré n, comme ci-dessus

$$(7) \qquad (\xi^{\circ a}, \lambda_n) = \frac{a!}{(2i\pi)^k} \int \frac{U(z_1\xi_1 + \ldots + z_k\xi_k)\, dz_1 \ldots dz_k}{z_1^{a_1+1} \ldots z_k^{a_k+1}}$$

et par conséquent, si les ξ_i sont de norme$_\alpha \leq 1$ nous avons

$$|(\xi^{\circ a}, \lambda_n)| \leq \frac{a!\, M(R,\alpha)}{R^n}$$

et on peut lever l'hypothèse sur les normes, par homogénéité, en rajoutant à droite un facteur $\|\xi_1\|_\alpha^{a_1}\dots\|\xi_k\|_\alpha^{a_k}$. Nous allons appliquer cela à $\xi_1 = e_{i_1}$, $\xi_k = e_{i_k}$, les éléments de la base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ considérée au début. La norme$_\alpha$ de e_i étant c_i^α, on a ainsi majoré les coefficients de la forme λ_n. De plus, comme celle–ci est symétrique, nous pouvons désymétriser le produit tensoriel et dire que, pour tous les n-uples $i_1,\dots,i_n$ d'indices distincts ou non, on a

$$|(e_{i_1}\otimes\dots\otimes e_{i_n}, \lambda_n)| \le \frac{a!\,M(R,\alpha)}{R^n}\, c_{i_1}^\alpha\dots c_{i_n}^\alpha$$

Ici on ne parle plus de multi-indices, et $a!$ s'interprète comme le produit des factorielles des multiplicités.

Nous allons calculer ensuite $\|\lambda_n\|_{-\beta}^2$. Pour cela, nous élevons la quantité précédente au carré, nous multiplions par $c_{i_1}^{-2\beta}\dots c_{i_n}^{-2\beta}$ et sommons sur tous les n–uples. L'expression obtenue est

$$\frac{(a!)^2\,M(R,\alpha)^2}{R^{2n}}\sum_{i_1,\dots,i_n} c_{i_1}^{2\alpha-2\beta}\dots c_{i_n}^{2\alpha-2\beta}$$

Nous majorons grossièrement $a!$ par $n!$, nous supposons $\beta > \alpha + 1/2$ de sorte que $\sum_i c_i^{2\alpha-2\beta} = \delta(\beta-\alpha) < \infty$, et nous avons pour tout R

$$\|\lambda_n\|_{-\beta}^2 \le (n!)^2\,M(R,\alpha)^2\,R^{-2n}\delta(\beta-\ \alpha)^n\ . \tag{8}$$

Cela montre que λ_n est bien une distribution symétrique dès que U est une fonction entière, sans hypothèse de croissance. Maintenant, nous utilisons l'hypothèse de type $(2,\alpha)$ en prenant $R=\sqrt{n}$, donc $M(R,\alpha)^2 \le Ce^{Kn}$ et $R^{2n} = n^n$. La formule de Stirling nous dit alors que la série $\|\lambda_n\|_{-\beta}^2/n!$ se comporte comme une série géométrique, et si β est assez grand $\delta(\beta-\alpha)$ est assez petit pour la faire converger.

Ceci établit l'énoncé relatif aux distributions de Hida. La partie relative aux fonctions-test se traite de même, mais au lieu de prendre α fixé et β grand on fixera β et on prendra α négatif suffisamment éloigné.

Signalons encore que l'article de Potthoff–Streit contient un résultat de continuité, permettant de vérifier la convergence de distributions de Hida vers une limite en examinant leurs fonctions caractéristiques. Bien que ce résultat soit fort utile, nous le laisserons de côté.

REMARQUE. Comme nous l'avons dit, il est plus commode de vérifier les conditions de croissance sur les fonctions d'une seule variable complexe $U(z\xi)$ pour ξ réel. Désignons par $M'(R,\alpha)$ le maximum correspondant. La formule de Cauchy nous donne alors pour ξ réel, $\|\xi\|_\alpha \le 1$

$$|(\xi^{\otimes n}, \lambda_n)| \le n!\,\frac{M'(R,\alpha)}{R^n}\ .$$

Utilisons la formule de polarisation

$$(\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n\,,\,\lambda_n\,) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{i_1<\ldots<i_k}((\xi_{i_1}+\ldots+\xi_{i_k})^{\otimes n}\,,\,\lambda_n\,)$$

qui nous donne

$$|(\,\xi_1 \otimes \ldots \otimes \xi_n\,,\,\lambda_n\,)\,| \le n!\,\frac{M'(R,\alpha)}{R^n}\sum_k \binom{n}{k} k^n/n!\,.$$

Remplaçant k^n par n^n et appliquant la formule de Stirling, nous voyons que la somme à droite est $O(K^n)$ pour tout $K>2e$. Nous prenons alors ξ complexe de norme$_\alpha \le 1$, de sorte que ses parties réelle et imaginaire η et ζ sont aussi de norme ≤ 1. Appliquant la formule du binôme et les majorations précédentes, nous avons

$$|(\,\xi^{\otimes n}\,,\,\lambda_n\,)| \le C\,n!\,\frac{M'(R,\alpha)}{R^n}\,K^n\,.$$

cette fois pour tout $K>4e$. Sommant alors la série entière, nous avons pour ξ complexe, $\|\xi\|_\alpha \le \rho$

$$|\,U(\xi)\,| \le C\,M'(R,\alpha)\sum_n (K\rho/R)^n$$

ou encore (avec une autre constante C) $M(\rho,\alpha) \le C M'(K\rho,\alpha)$ pour tout $K>4e$. On voit donc que la restriction aux ξ réels ne change pas les types de croissance.

5. Produits de Wick. Le *produit de Wick* $S:T$ de deux distributions de Hida est défini par la relation

$$U_{S:T}(\xi) = U_S(\xi)\,U_T(\xi)$$

(produit ordinaire des f.c.). Cette opération associative et commutative laisse stables les espaces $\mathcal{S}(\Omega)$ et $\mathcal{S}'(\Omega)$ ([MY] p. 387). Le produit de Wick ne fait que transporter, sur les espaces de v.a. ou de v.a. généralisées, le produit tensoriel symétrique $\circ$ sur les suites de coefficients.

Les intégrales multiples d'Ito $I_n(f_n)$ ($f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) peuvent s'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n(s_1,\ldots,s_n)\,\dot X_{s_1} : \ldots : \dot X_{s_n}\,ds_1\ldots ds_n$$

En effet, nous avons vu que la f.c. de $\dot X_t$ est $\xi \longmapsto \xi(t)$, donc celle de $\dot X_{s_1} : \ldots : \dot X_{s_n}$ est $\xi(s_1)\ldots\xi(s_n)$, et en intégrant on obtient bien $(\xi^{\otimes n}, f_n)$, *i.e.* la f.c. de $I_n(f_n)$. On notera que la contribution des diagonales dans une telle intégrale est nulle. Par exemple, $\int \dot X_s^{:2}\,ds$ étant une distribution finie, la contribution diagonale $\int_{\{s=t\}} \dot X_s : \dot X_t\,ds\,dt$ est nulle. Il n'en sera plus de même pour les intégrales de Stratonovich.

EXEMPLE. Lorsque $E = \mathbb{R}$, dans l'interprétation gaussienne, on a $h_m : h_n = h_{m+n}$, et comme $h_1(x) = x$ on voit que les polynômes d'Hermite sont les "puissances de Wick" $x^{:n}$.

Sachant ce qu'est le produit de Wick, on est amené à définir l'*exponentielle de Wick* d'une distribution Λ. Ce n'est pas nécessairement une distribution de Hida (nous reviendrons sur ce point), mais si c'en est une, sa fonction caractéristique est égale à $e^{U_\Lambda(\xi)}$. Par exemple, le vecteur exponentiel $\mathcal{E}(\xi)$ est l'exponentielle de Wick de $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (identifié à un élément du premier chaos), et l'exponentielle de Wick d'une distribution ω du premier chaos est bien une distribution, de fonction caractéristique $e^{(\xi,\omega)}$. Il est naturel de la noter $\mathcal{E}(\omega)$, et plus généralement de noter $\mathcal{E}(\Lambda)$ l'exponentielle de Wick de la distribution $\Lambda \in \mathcal{S}'(\Omega)$ lorsque c'est une distribution de Hida.

Voici un exemple important où c'est le cas : rappelons que la v.a. généralisée $\dot{X}_t$ a pour fonction caractéristique $\xi \longmapsto \xi(t)$. Nous désignerons par $\mathbb{D}$ la v.a. généralisée $\int \dot{X}_t^{:2}\,dt$, de fonction caractéristique $\int \xi^2(t)\,dt = |\xi|^2$ (pour ξ réel!). La notation $\mathbb{D}$ signifie "diagonale" ; la notation usuelle Δ suggérerait trop un laplacien. Cette distribution appartient au second chaos, avec comme coefficient d'Ito la mesure portée par la diagonale $f \longmapsto 2\int f(u,u)\,du$. Alors l'exponentielle de Wick $\mathcal{E}(c\mathbb{D})$ admet, pour tout c réel, la fonction caractéristique $e^{c|\xi|^2}$ (ξ réel), et celle-ci est bien de type $(2,0)$ (et donc de type $(2,\alpha)$ pour $\alpha > 0$). Pour $c = (\sigma^2-1)/2$ on peut interpréter cette distribution comme la mesure gaussienne du bruit blanc de variance σ^2. Le théorème de Potthoff–Streit montre de plus que le produit de Wick avec $\mathcal{E}(c\mathbb{D})$ préserve les espaces de distributions dont la fonction caractéristique est de type $(2,\alpha)$, $\alpha \geq 0$.

REMARQUE. La notation des physiciens $:\;:$ est parfois utilisée de manière informelle, en plaçant au milieu de ce symbole tout objet que l'on a "renormalisé". Il y a aussi une certaine confusion avec l'emploi du nom de Wick pour désigner le "Wick ordering" (ou ordre normal) qui concerne les opérateurs de création et d'annihilation et n'a rien à faire ici. Nous allons décrire maintenant le sens que Potthoff–Yan [1] et divers autres articles donnent au symbole $:\omega^{\otimes n}:$ où $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et expliquer, en anticipant un peu sur la théorie de la valeur fonctionnelle des fonctions-test (n° 8 ci-dessous), la différence entre cette notation et la puissance de Wick $\omega^{:n}$.

Ce que ces articles notent $< f_n\,,\,:\omega^{\otimes n}:\, >$ est la *valeur de la v.a.* $I_n(f_n)$ *au point* $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ainsi, si $F = \sum_n I_n(f_n)/n!$ est une fonction-test, on a $F(\omega) = \sum_n (f_n,\,:\omega^{\otimes n}:\,)/n!$. Prenant $F = \mathcal{E}(\xi)$ nous avons du côté gauche $\exp((\xi,\omega) - |\xi|^2/2)$, qui apparaît comme la fonction caractéristique de la distribution $\sum_n :\omega^{\otimes n}:/n! = \,:\mathrm{Exp}\,\omega:$. Il est clair que celle-ci *n'est pas* l'exponentielle de Wick $\mathcal{E}(\omega)$, dont la f.c. est $e^{(\xi,\omega)}$: il s'agit en fait de la distribution notée ϵ_ω en (11) ci-dessous. Plus précisément, la f.c. de la distribution $:\omega^{\otimes n}:$ est $|\xi|^n h_n((\xi,\omega)/|\xi|)$ et non $(\xi,\omega)^n$. Il est clair sur cette expression que l'on n'a pas $:(t\omega)^{\otimes n}: \,=\, t^n :\omega^{\otimes n}:$.

6. Distributions élargies. A propos de l'exponentielle de Wick, nous pouvons nous demander si l'on peut choisir un espace de vecteurs-test un peu plus petit, mais contenant encore les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(\xi)$, de telle sorte que *toutes les fonctions entières* apparaissent comme fonctions caractéristiques des éléments du dual, et que l'exponentielle de Wick soit permise sans restriction. Il est classique que l'espace des fonctions entières (d'une variable complexe) muni de la convergence compacte admet pour dual l'espace des fonctions entières de type exponentiel. Il est donc naturel de choisir un espace de fonctions-test dont la f.c. soit de type exponentiel. Cette idée a déjà été utilisée par Lee [1], avec un système différent de semi–normes.

Rappelons qu'une fonction entière $V(z) = \sum_n v_n z^n/n!$ est dite *de type exponentiel* si elle satisfait pour un $K>0$ à une majoration de la forme $|V(z)| = O(e^{K|z|})$, et que cela se traduit sur la suite des coefficients $v = (v_n)$ par une propriété de croissance au plus exponentielle

$$\exists C \exists M \quad |v_n| \leq CM^n .$$

Nous aurons besoin de traduire cette propriété en une propriété faisant intervenir un quantificateur universel, de la manière suivante :

$$\forall i \quad q_i(v) = \sum_n \kappa_n(i)|v_n|^2 < \infty ,$$

où q_i est une famille (non dénombrable) de formes quadratiques positives. Un raisonnement initial faisant appel à beaucoup d'"abstract nonsense" nucléaire a été réduit par M. Emery au petit lemme suivant :

Pour que la suite (v_n) soit à croissance exponentielle, il faut et il suffit que l'on ait $\sum_n a_n |v_n|^2 < \infty$, pour tout suite (a_n) de nombres positifs à décroissance plus qu'exponentielle, au sens suivant

$$|a_n| = O(R^{-n}) \quad \textit{pour tout} \quad R > 1 .$$

En effet, cette condition est évidemment nécessaire. Dans l'autre sens, supposons que la suite (v_n) ne soit pas à croissance exponentielle : la suite $\log |v_n|/n$ n'est pas bornée, donc il existe des indices $n_k \uparrow \infty$, des nombres $c_k \uparrow \infty$ tels que $|v_{n_k}| = c_k^{n_k}$. Si l'on pose alors $a_{n_k} = c_k^{-2n_k}$ (et $a_n = 0$ si n n'est pas de la forme n_k), la série $\sum a_n |v_n|^2$ diverge alors que la suite (a_n) est à décroissance plus qu'exponentielle.

La condition de décroissance plus qu'exponentielle signifie aussi que la fonction $\sum_n a_n z^n$ est entière.

Revenons maintenant à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Nous dirons que la v.a. (réelle) $F = \sum_n I_n(f_n)/n!$ est un *vecteur-test de type exponentiel* si, pour tout α, la suite des normes$_\alpha$ des f_n est à croissance au plus exponentielle :

$$\| f_n \|_\alpha \leq CM^n .$$

Cet espace contient les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(\xi)$ ($\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$), mais il est plus petit que l'espace de Kubo–Yokoi. Compte tenu du lemme précédent, on peut le munir de la topologie définie par la famille filtrante croissante de formes quadratiques positives

$$q_{\kappa,\alpha}(F) = \sum_n \kappa_n \| f_n \|_\alpha^2 ,$$

où la suite $\kappa = (\kappa_n)$ de nombres positifs est à décroissance plus qu'exponentielle.

Le dual de l'espace des vecteurs-test de type exponentiel est alors formé de "distributions de Hida élargies" $\Lambda = \sum_n I_n(\lambda_n)/n!$ telles que, pour au moins une suite κ à décroissance plus qu'exponentielle, et au moins un α, on ait

$$\sup |\sum_n (f_n, \lambda_n)/n!| < \infty$$

le sup étant pris sur les suites $f = (f_n)$ telles que $q_{\kappa,\alpha}(f) \leq 1$. Cela s'écrit encore

$$\sum_n \frac{\|\lambda_n\|_{-\alpha}^2}{(n!)^2 \kappa_n} < \infty$$

Si la suite κ est à décroissance plus qu'exponentielle, il en est de même de la suite $2^n \kappa_n^2$. On peut alors remplacer la condition précédente par l'existence d'une suite à décroissance plus qu'exponentielle (encore notée κ) telle que l'on ait

$$\|\lambda_n\|_{-\alpha} \leq \kappa_n n!$$

ce qui est plus faible que la condition imposée aux distributions de Hida ordinaires, qui s'écrit $\|\lambda_n\|_{-\alpha} \leq \theta_n \sqrt{n!}$ avec une suite (θ_n) à croissance au plus exponentielle.

On peut alors reprendre le raisonnement menant au théorème de Kuo–Potthoff–Streit, et vérifier

— que les fonctions caractéristiques des distributions de Hida élargies sont toutes les fonctions entières sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, sans restriction de croissance;

— que les fonctions caractéristiques des vecteurs-test de type exponentiel sont toutes les fonctions entières $V(\xi)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ qui sont de type $(1, \alpha)$ pour tout α, autrement dit telles que

$$M(R, \alpha) = \sup_{\|\xi\|_\alpha \leq R} |V(\xi)| \leq Ce^{KR}.$$

Ici ξ est un élément complexe de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ mais on peut, comme dans la démonstration précédente, se ramener à majorer $V(z\xi)$ pour ξ réel et z complexe.

EXEMPLE. Pour comprendre à quoi ressemblent les vecteurs-test de type exponentiel, revenons au cas d'un espace de dimension 1, pour lequel les fonctions-test de Kubo-Yokoi constituent, dans l'interprétation "plate", l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(t)$ sont de la forme $e^{tx-t^2/2}\sqrt{\gamma}$. Les nouvelles fonctions-test F sont donc caractérisées par la propriété que $\int e^{tx-t^2/2}\sqrt{\gamma(x)}F(x)\,dx$ est prolongeable en une fonction entière de type exponentiel. Changeant t en it, et appliquant le théorème de Paley–Wiener, cela signifie que l'on a une relation de la forme

$$\int e^{itx} F(x)\sqrt{\gamma(x)}\,dx = e^{-t^2/2}\widehat{\lambda}(t) = (\gamma * \lambda)\widehat{}$$

où λ est une distribution à support compact et $\widehat{}$ désigne la transformée de Fourier. Autrement dit, on a $F\sqrt{\gamma} = \gamma * \lambda$. Lorsque λ est une masse unité ε_t, on a $F(x) =$

$\gamma(x)^{-1/2}\gamma(x-t) = \mathcal{E}_t(x)$ (dans l'interprétation plate). Finalement, les fonctions-test de type exponentiel sont de la forme

$$F(x) = \int \mathcal{E}_t(x)\,\lambda(dt)$$

où λ est une distribution à support compact.

7. Traces. Nous rappelons ici un certain nombre de définitions et résultats concernant les traces ([MY] p. 390).

L'opérateur de trace Tr transforme la fonction symétrique $f_n(s_1,\ldots,s_n)$ de n variables (assez régulière) en la fonction symétrique de $n-2$ variables $\int f_n(s_1,\ldots,s_{n-2},s,s)\,ds$ (si $n=0,1$, en la fonction 0). On prolonge ensuite Tr en un opérateur sur les suites $f=(f_n)$ de coefficients.

Par exemple ([MY] p. 391), dans le cas de la dimension 1, la "trace" de la suite (u_n) est la suite (u_{n+2}). Dans l'interprétation gaussienne, la fonction $\sum_n u_n h_n(x)/n!$ est ainsi transformée en la fonction $\sum_n u_{n+2} h_n(x)/n!$, qui peut s'écrire $\sum_p u_p h_p''(x)/p!$ si l'on se rappelle que $h_n' = nh_{n-1}$. Autrement dit, l'opérateur de trace est la dérivée seconde en dimension 1, et en dimension finie >1 c'est le laplacien ordinaire. En dimension infinie, c'est un opérateur non fermable, qui est encore sur $\mathcal{S}(\Omega)$ (à un facteur 2 près) le générateur du semi-groupe de Wiener (*cf.* Yan [2]).

On trouve dans l'article de Kubo–Yokoi le résultat suivant (*cf.* [MY] p. 385) : l'opérateur Tr sur les suites de coefficients $f=(f_n)$ satisfait pour $\alpha > 1/4$, $\varepsilon > 0$ à une inégalité

$$\|\operatorname{Tr}(f)\|_\alpha \le k(\alpha,\varepsilon)\,\|f\|_{\alpha+\varepsilon}\,. \tag{9}$$

Pour un résultat plus précis, voir Yan [2]. Il en résulte que l'opérateur Tr préserve les vecteurs-test. Nous allons dans un instant retrouver cela d'une autre manière.

Si l'on passe des suites de coefficients aux vecteurs-test ou distributions correspondants, on a la relation (F, G désignant deux vecteurs-test)

$$(F, \operatorname{Tr} G) = (\mathbb{D} : F, G)\,, \tag{10}$$

de sorte que Tr apparaît comme le transposé du produit de Wick avec $\mathbb{D}$. Cela se voit très simplement pour $F=\mathcal{E}(\xi)$, $G=\mathcal{E}(\eta)$, car alors $\operatorname{Tr} G = |\eta|^2 G$, tandis que du côté droit de (10) nous avons la f.c. de $\mathbb{D} : \mathcal{E}(\xi)$ calculée en η, ce qui vaut bien $|\eta|^2 e^{(\xi,\eta)}$.

La distribution $\mathbb{D}$ ayant pour f.c. un polynôme (croissance du type $(0,0)$), le produit de Wick avec $\mathbb{D}$ préserve les distributions de Hida (ordinaires ou élargies), mais on constate qu'il ne préserve pas les vecteurs-test de Kubo–Yokoi. Par transposition, l'opérateur Tr préserve les vecteurs-test (de Kubo–Yokoi ou de type exponentiel), mais on ne peut pas toujours définir la trace d'une distribution. De même, le produit de Wick avec $e^{:\lambda\mathbb{D}}$, dont la fonction caractéristique est de type $(2,0)$, préserve les distributions de Hida ordinaires ou élargies. Par transposition, on voit que les opérateurs $e^{\lambda \operatorname{Tr}}$ préservent les vecteurs-test de Kubo–Yokoi (résultat dû à Potthoff–Yan), et les vecteurs-test de type exponentiel.

8. Valeur fonctionnelle. Dans l'interprétation gaussienne, nous avons dit que le vecteur–test $F = \mathcal{E}(\eta)$, de fonction caractéristique $e^{(\xi,\eta)}$, s'interprète comme la *fonction* $e^{(\eta,\omega)-|\eta|^2/2}$ sur l'espace de Wiener Ω, (η,ω) étant l'intégrale stochastique $\int \eta(s)\,dX_s(\omega)$. Cette expression a alors un sens pour tout $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, et nous l'appellerons la *valeur fonctionnelle* du vecteur exponentiel $F = \mathcal{E}(\xi)$, ou l'*évaluation* $F(\omega)$ de F au point $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Nous allons calculer cette valeur fonctionnelle comme valeur ordinaire (=dualité) de F et d'une autre distribution, la *masse unité* ε_ω *au point* ω

$$F(\omega) = (F, \varepsilon_\omega)\,, \tag{11}$$

qui se calcule par la formule fondamentale suivante

$$\varepsilon_\omega = e^{:-\mathbb{D}/2} : \mathcal{E}(\omega) = \varepsilon_0 : \mathcal{E}(\omega)\,. \tag{12}$$

En effet, la formule (11) nous donne la fonction caractéristique de ε_ω, qui est $e^{(\xi,\omega)-|\xi|^2/2}$. D'autre part, si l'on identifie ω à une distribution du premier chaos, sa fonction caractéristique est (ξ,ω) et celle de $\mathcal{E}(\omega)$ est $e^{(\xi,\omega)}$, tandis que la f.c. de l'exponentielle de Wick $e^{:-\mathbb{D}/2}$ est $e^{-|\xi|^2/2}$. Il ne reste plus qu'à multiplier les f.c., ce qui revient à faire un produit de Wick. Prenant $\omega = 0$, on voit que l'exponentielle de Wick précédente n'est rien d'autre que la distribution ε_0, d'où la seconde partie de la formule (12).

Ainsi, un vecteur–test s'interprète comme une fonction partout définie, non seulement sur l'espace de Wiener classique, mais sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Kubo–Yokoi montrent que cette fonction est continue sur $\mathcal{S}'$ (pour la topologie forte). L'article de Potthoff–Yan montre qu'elle est, en un certain sens, indéfiniment différentiable et même analytique.

Le fait de travailler avec des fonctions partout définies permet de donner un sens à certaines transformations sur les fonctions–test, telles que les dilatations, ou les translations arbitraires. L'étude de la régularité de ces opérations est due à Potthoff–Yan. Commençons par les dilatations, en définissant $D_{1/\lambda}F = G$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ par

$$G(\omega) = F(\lambda\omega)\,.$$

Lorsque $F = \mathcal{E}(\eta)$, on a en remplaçant ω par $\lambda\omega$ dans l'expression de F

$$G = e^{(\lambda^2-1)\,|\eta|^2/2}\mathcal{E}(\lambda\eta)$$

donc $g_n = \lambda^n e^{(\lambda^2-1)\,|\eta|^2/2}\eta^{\otimes n}$. ce qui peut se traduire par l'application successive, à la suite de coefficients $\eta^{\otimes n}$, de deux opérateurs successifs : d'abord $e^{(\lambda^2-1)/2\,\mathrm{Tr}}$, qui multiplie toute la suite par $e^{(\lambda^2-1)\,|\eta|^2/2}$, puis l'opérateur de seconde quantification $\Gamma(\lambda I)$, qui multiplie par λ^n le coefficient du n–ième chaos. Ainsi

$$D_{1/\lambda} = \Gamma(\lambda I)\, e^{(\lambda^2-1)/2\,\mathrm{Tr}} \tag{13}$$

et d'après ce que nous avons vu plus haut, cette opération préserve les vecteurs–test de type exponentiel.

Les translations sont étudiées au n° 11.

9. Intégrales multiples de Stratonovich. Soit $F = I(f) = \sum_n I_n(f_n)/n!$ une fonction–test. Nous définirons la suite $\tilde{f} = (\tilde{f}_n)$ des *coefficients de Stratonovich* de F, et nous écrirons $F = S(\tilde{f})$, par la condition que, pour $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$F(\omega) = (F, \varepsilon_\omega) = \sum_n (\tilde{f}_n\, , \, \omega^{\otimes n})/n!\ . \tag{14}$$

Autrement dit, la valeur fonctionnelle de l'intégrale de Stratonovich $S(\tilde{f})$ au point ω se calcule simplement par la formule

$$(\, S(f)(\omega) = \sum_n (\tilde{f}_n\, , \, \omega^{\otimes n})/n!\ . \tag{15}$$

Utilisant dans la formule (14) la relation $\varepsilon_\omega = e^{:\mathbb{D}/2}:\mathcal{E}(\omega)$ et le fait que le produit de Wick avec $\mathbb{D}$ est le transposé de l'opérateur Tr, on a

$$\tilde{f} = e^{-1/2\ \mathrm{Tr}} f\ . \tag{16}$$

Nous avons vu plus haut que cette opération préserve les vecteurs–test de type exponentiel. En inversant l'exponentielle, on peut définir l'*intégrale de Stratonovich* $S(f)$ d'une suite $f = (f_n)$ suffisamment régulière par la propriété

$$S(f) = I(e^{1/2\ \mathrm{Tr}} f)\ . \tag{17}$$

Par exemple, l'intégrale de Stratonovich $\frac{1}{2}\int_{(S)} f(s)f(t)\,dX_s(\omega)\,dX_t(\omega)$ vaut

$$\frac{1}{2}\int f(s)f(t)\,dX_s(\omega)\,dX_t(\omega) + \frac{1}{2}\int f(s)^2\,ds\ ,$$

et l'intégrale de Stratonovich de la suite $f_n = \xi^{\otimes n}$ vaut $e^{(\xi,\omega)}$ au point ω.

REMARQUES. a) Soit (f_n) une suite suffisamment régulière, dont nous considérons l'intégrale d'Ito $F = I(f) = \sum_n I_n(f_n)/n!$ et l'intégrale de Stratonovich $S(f)$. La valeur fonctionnelle de $S(f)$ au point $\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vaut $\sum_n (\xi^{\otimes n}, f_n)/n!$, ce qui est aussi la f.c. $U_F(\xi)$.

b) En dimension 1 et dans l'interprétation gaussienne, "l'intégrale d'Ito" de la suite (u_n) est la série de polynômes d'Hermite $\sum_n a_n h_n(x)/n!$, tandis que "l'intégrale de Stratonovich" est la série de Taylor $\sum_n a_n x^n/n!$.

10. Produit de Wiener. La multiplication ordinaire des v.a. représentatives sera appelée *produit de Wiener* ci-dessous, lorsqu'il sera nécessaire de l'opposer au produit de Wick, ou éventuellement à d'autres multiplications possibles. On peut définir le produit de Wiener de deux fonctions–test (qui est une fonction–test), le produit de Wiener d'une fonction–test par une distribution de Hida (qui est une distribution de Hida). Tous ces calculs reposent sur la *formule de multiplication des intégrales stochastiques*. Des résultats précis sur le produit de Wiener sont ceux de Potthoff–Yan [1] et de Yan [1].

Reproduisons le passage de [MY] qui décrit ces calculs : si l'on pose

$$f = \sum_m \frac{1}{m!} I_m(f_m)\ , \quad g = \sum_n \frac{1}{n!} I_n(g_n)\ , \quad h = fg = \sum_p \frac{1}{p!} I_n(h_p)\ ,$$

la fonction h_p est donnée par

$$h_p = \sum_{\mu+\nu=p} \frac{p!}{\mu!\,\nu!} \sum_k \frac{1}{k!}(f_{\mu+k} \underset{k}{=} g_{\nu+k}) \tag{18}$$

Ce dernier symbole est une *contraction d'ordre* k. Etant donnés trois espaces de Hilbert H, K et E, f et g deux éléments de $H \otimes E$ et $E \otimes K$ respectivement, on peut définir leur contraction $f \underset{E}{=} g \in H \otimes K$, de telle sorte que

$$(f \otimes x) \underset{E}{=} (y \otimes g) = (x, y) f \otimes g$$

(pour des Hilbert complexes, le second espace serait $E' \otimes K$ et non $E \otimes K$ afin que la contraction soit une opération bilinéaire). On a $\|f \underset{E}{=} g\| \leq \|f\|\,\|g\|$.

A partir de ces résultats, nous allons établir la stabilité par produit de l'espace des fonctions-test de type exponentiel. Avec les notations ci-dessus, nous avons pour tout α

$$\|f_n\|_\alpha\,,\ \|g_n\|_\alpha \leq CM^n$$

et par conséquent $\|f_{\mu+k} \underset{k}{=} g_{\nu+k}\|_\alpha \leq C^2 M^{\mu+\nu+2k}$; on voit ensuite que la norme$_\alpha$ de la somme en k de (18) est majorée par $C'M^{\mu+\nu}$, après quoi on obtient $\|h_p\|_\alpha \leq C'(2M)^p$, prouvant que h est aussi de type exponentiel.

11. Translations, etc. La translation τ_ξ ($\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$) consiste à ajouter ξ à la dérivée du mouvement brownien (et non au mouvement brownien lui même). On vérifie aussitôt que $\tau_\xi \mathcal{E}(\eta) = e^{(\xi,\eta)}\mathcal{E}(\eta)$, et on en déduit

$$(\tau_\xi \mathcal{E}(\eta), \mathcal{E}(\zeta)) = e^{(\xi+\zeta,\eta)} = (\mathcal{E}(\eta), \mathcal{E}(\xi+\zeta)) = (\mathcal{E}(\eta), \mathcal{E}(\xi) \,{:}\, \mathcal{E}(\zeta))\,. \tag{19}$$

On peut alors étendre cette formule en remplaçant $\mathcal{E}(\eta)$ par un vecteur-test, de sorte que que la translation par ξ et le produit de Wick par $\mathcal{E}(\xi)$ restent adjoints l'un de l'autre. La translation τ_ξ préserve les fonctions-test et on peut ensuite l'étendre à nouveau, cette fois aux distributions Λ. La fonction caractéristique de $\tau_\xi\Lambda$ vaut alors

$$(\tau_\xi\Lambda, \mathcal{E}(\eta)) = (\Lambda, \mathcal{E}(\xi) \,{:}\, \mathcal{E}(\eta)) = U_\Lambda(\xi+\eta)\,. \tag{20}$$

On en déduit que la translation préserve les espaces de vecteurs-test et de distributions que nous avons définis plus haut. Une autre expression utile de la translation des distributions est

$$\tau_\xi\Lambda = (\mathcal{E}(\xi)\Lambda) \,{:}\, \mathcal{E}(-\xi)\,. \tag{21}$$

On peut utiliser cela pour calculer la fonction caractéristique du produit de Wiener d'une fonction-test f par une distribution Λ. Nous avons

$$U_{f\Lambda}(\xi) = (f\Lambda, \mathcal{E}(\xi)) = (\Lambda, f\mathcal{E}(\xi)) = (\Lambda, (f\mathcal{E}(\xi)) \,{:}\, \mathcal{E}(-\xi) \,{:}\, \mathcal{E}(\xi)) = (\tau_\xi\Lambda, \tau_\xi f)$$

REMARQUE. Cette dernière formule est étroitement liée à une expression, due à Krée, qui donne la f.c. W d'un produit de Wiener en fonction des f.c. U, V des facteurs.

Cette expression utilise un produit scalaire de deux fonctions entières U, V sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui n'est pas toujours défini, mais qui se calcule ainsi : on prend une base orthonormale (e_i) de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ comme au début, et on développe dans cette base $\xi = \sum_i \xi^i e_i$, puis $U(\xi) = \sum_a u_a \xi^a / a!$ (rappelons que $\xi^a = \prod_{i \in a} \xi^i$, en comptant les multiplicités). Avec ces notations

$$(U, V) = \sum_a u_a v_a / a! \, .$$

Par exemple, si $U(\xi) = e^{(\xi,\rho)}$ ($\rho \in \mathcal{S}$), fonction caractéristique de $\mathcal{E}(\rho)$, on a $u_a = \rho^a$ et alors

$$(e^{(\cdot,\rho)}, e^{(\cdot,\sigma)}) = \sum_a \rho^a \sigma^a / a! = e^{(\rho,\sigma)} = (\mathcal{E}(\rho), \mathcal{E}(\sigma)) \, ,$$

comme il convient pour que le produit scalaire de deux fonctions-test soit le même que celui de leurs fonctions caractéristiques. Dans ces conditions, la formule de Krée est

$$W(\xi) = (U(\xi + \eta), V(\xi + \eta))_\eta \tag{22}$$

où le produit scalaire est pris en la variable η. On trouvera dans les articles de Potthoff-Yan [1], Yan [1][2], des conditions plus précises assurant que le produit de Wiener d'éléments des classes Γ_α et Γ_β est une distribution bien définie.

12. Mesures positives. Le problème de construction de mesures positives sur l'espace de Wiener a été considéré par de nombreux auteurs. Ce que nous allons dire ici est emprunté à Yokoi [1], avec la petite modification consistant à utiliser l'espace des fonctions-test de type exponentiel au lieu des fonctions-test de Kubo-Yokoi.

Considérons d'abord une mesure positive bornée μ sur $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Depuis le début de la théorie des distributions aléatoires, on utilise l'outil fondamental qu'est la transformée de Fourier de μ, c'est à dire

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int e^{i(\xi,\omega)} \, \mu(d\omega) \, .$$

Si μ est aussi une distribution de Hida (au sens large), nous pouvons aussi considérer la fonction caractéristique de μ

$$U_\mu(\xi) = (\mathcal{E}(\xi), \mu) = \int e^{(\xi,\omega) - |\xi|^2/2} \, \mu(d\omega)$$

Cette fonction caractéristique étant entière, on a

$$\widehat{\mu}(\xi) = e^{-|\xi|^2/2} \, U_\mu(i\xi)$$

qui est une fonction complexe sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, continue à l'origine en vertu des majorations que nous avons imposées aux fonctions entières. Cette remarque simple donne deux résultats très utiles.

1) D'après le théorème de Minlos, pour exprimer qu'une distribution de Hida élargie Λ est une mesure positive, on écrit que la fonction $e^{-|\xi|^2/2} \, U_\Lambda(i\xi)$ est de type positif sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

2) Inversement, une mesure positive bornée μ sur $S'(\mathbb{R})$ est représentable comme distribution de Hida élargie si et seulement si sa transformée de Fourier se prolonge en une fonction entière sur le complexifié de $S(\mathbb{R})$.

Lindstrøm, Øksendal et Ubøe [1] ont fait la remarque intéressante que, si deux distributions de Hida élargies, de fonctions caractéristiques U et V, sont des mesures positives μ et ν, leur produit de Wick est aussi une mesure positive. En effet, la fonction $U(i\xi)V(i\xi)e^{-|\xi|^2}$ est alors de type positif, et le reste après multiplication par la fonction de type positif $e^{|\xi|^2/2}$. D'autre part, la convolution $\mu * \nu$ a pour fonction caractéristique $U_\mu(\xi)U_\nu(\xi)e^{-\|\xi\|^2/2}$, et on voit que c'est une distribution de Hida élargie.

RÉFÉRENCES

HU (Y.Z.) et MEYER (P.A.) [1]. Chaos de Wiener et intégrales de Feynman; Sur les intégrales multiples de Stratonovitch, *Sém. Prob. XXII*, Lect. Notes in M. **1321**, 1988, p. 51-71.

KONDRATIEV (Yu. V.) et SAMOILENKO (Yu. S.) [1]. Integral representation of generalized positive definite kernels of an infinite number of variables. *Soviet Math. Dokl.*, **17 (227)**, 1976, p. ▯ .

KONDRATIEV (Yu. V.) et SAMOILENKO (Yu. S.) [2]. The spaces of trial and generalized functions of an infinite number of variables. *Reports Math. Phys.*, 14, 1978, p. 325-350.

KONDRATIEV (Yu. V.) et SAMOILENKO (Yu. S.) [3]. Nuclear spaces of entire functions in problems of infinite dimensional analysis. *Soviet Math. Dokl.*, **22 (254)**, 1980, p. 588-592.

KOREZLIOGLU (H.) et USTUNEL (A.S.) [1]. A new class of distributions on Wiener spaces. *Stochastic Analysis and Related Topics II, Silivri 1988*, LN **1444**, p. 106-121, Springer 1990.

KRÉE (P.) [1]. *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles en dimension infinie*, exposés 3–4, 1976–77. Institut Henri–Poincaré, Paris, 1978.

KRÉE (P.) [2]. La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique. *Proc. of the 1986 Silivri Conference*, H. Korezlioglu et S. Ustunel, ed.. Lect. Notes in M. **1316**, Springer 1988.

KUBO (I.) et YOKOI (Y.) [1]. A remark on the space of testing random variables in the white noise calculus, *Nagoya Math. J.*, **115**, 1989, p. 139-149.

KUO (H.H.), POTTHOFF (J.) et STREIT (L.) [1]. A characterization of white noise test functionals. *Prépublication*, BiBoS Bielefeld, 1990.

LEE (Y.J.) [1]. Generalized functions on infinite dimensional spaces and its application to white noise calculus, *J. Funct. Anal.*, **82**, 1989, p. 429-464.

LEE (Y.J.) [2]. Analytic version of test functionals, Fourier transforms, and a characterization of measures in white noise calculus. *Prépublication*, 1990.

LINDSTRØM (T.), ØKSENDAL (B.) et UBØE (J.) [1]. Dynamical systems in random media : a white noise functional approach. *Prépublication*, Université d'Oslo, 1990.

MEYER (P.A.) et YAN (J.A.) [1]. Distributions sur l'espace de Wiener (suite) d'après Kubo et Yokoi. *Sém. Prob. XXIII,* Lect. Notes in M. **1372**, 1989, p. 382-392.

POTTHOFF (J.) et STREIT (L.) [1]. A characterization of Hida distributions. *Prépublication* n° 406, BiBoS Bielefeld, 1989.

POTTHOFF (J.) et YAN (J.A.) [1]. Some results about test and generalized functionals of white noise. *Proc. Singapore Prob. Conference,* L.H.Y. Chen ed., 1989.

YAN (J.A.) [1]. Products and transforms of white noise functionals. A paraître.

YAN (J.A.) [2]. Notes on the Wiener semigroup and renormalization. Ce volume.

YOKOI (I.) [1]. Positive generalized white noise functionals, *Hiroshima Math. J.*, **20**, 1990, p. 137-157.

ERRATA A L'ARTICLE [MY]. Page 384, ligne -12, lire $K = \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Dans les formules centrées lire $|a_n|^2$ au lieu de $\|a_n\|^2$ et de même $|\varphi_n|^2$ p. 385 ligne 11. Dans la formule (9), lire $c_n^{-2\alpha}$. Deux lignes plus bas lire $\delta(\alpha)$. Page 386 ligne -2 lire $\mathcal{Y}(\Omega)$ au lieu de $\mathcal{S}(\Omega)$.

Added in press:

Correction à Meyer–Yan, "sur les fonctions caractéristiques..." J. Potthoff nous a signalé que l'article de Potthoff–Streit présenté ici contient une imprécision (découverte par N. Obata). Il ne suffit pas de supposer que les fonctions $z \longmapsto F(z\xi)$ sont prolongeables en fonctions entières de z, car la linéarité en ξ de la dérivée en 0 (qui est utilisée dans les démonstrations) n'est pas automatique, mais exige un minimum de régularité. Nous avons suivi l'article de Potthoff–Streit sur ce point sans remarquer la difficulté. Il n'y a aucun problème si l'on suppose que les fonctions $F(z_1\xi_1 + z_2\xi_2)$ sont prolongeables, et cela fait qu'en pratique le théorème de Potthoff–Streit s'applique sans modification.