

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur deux estimations d'intégrales multiples

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 425-426

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__425_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR DEUX ESTIMATIONS D'INTÉGRALES MULTIPLES

par P.A. Meyer

Cette note contient une démonstration plus simple d'un lemme de Ben Arous sur les intégrales multiples d'Ito et de Stratonovich (cf. *Flots et séries de Taylor stochastiques*, ZW 81, 1989, p.29-77).

Nous considérons un mouvement brownien N -dimensionnel (X_t^i) , $i = 1, \dots, N$, et nous posons $X_t^0 = t$. Soit λ une application de $1, \dots, m$ dans $\{0, \dots, N\}$. Nous considérons l'intégrale multiple d'Ito arrêtée à t , sur le m -simplexe croissant

$$I_\lambda(t) = \int_{\Sigma_m(t)} dX_{s_1}^{\lambda(1)} \dots dX_{s_m}^{\lambda(m)}$$

et l'intégrale analogue de Stratonovich $S_\lambda(t)$. Nous appelons n le nombre des indices λ_i non nuls, p le nombre des indices nuls. Ceux ci se présentent en blocs de p_0, \dots, p_k zéros, entre lesquels s'intercalent des blocs $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ d'indices non nuls. Les entiers p_0 et p_k peuvent être nuls, mais on peut imposer aux autres d'être > 0 . Nous avons $p = p_0 + \dots + p_k$. Le premier résultat de Ben Arous calcule la norme² de l'intégrale d'Ito :

$$(1) \quad \|I_\lambda(t)\|^2 = \frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!} \prod_i \frac{(2p_i)!}{(p_i!)^2} \leq 2^{2p} \frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!}.$$

DÉMONSTRATION. Nous commençons par effectuer les intégrations déterministes, ce qui nous donne pour $I_\lambda(t)$

$$\int_{\frac{t_0^{p_0}}{p_0!}}^{t_1} \int_{t_0}^{t_1} dX_{s_1}^{\alpha_1(1)} \dots dX_{s_{n_1}}^{\alpha_1(n_1)} \frac{(t_2 - t_1)^{p_1}}{p_1!} \int_{t_1}^{t_2} dX_{s_1}^{\alpha_2(1)} \dots dX_{s_{n_2}}^{\alpha_2(n_2)} \dots$$

Nous calculons le carré de la norme de I_λ par la formule d'isométrie ordinaire, ce qui remplace les exposants p_0, \dots, p_k par $2p_0, \dots, 2p_k$, et fait apparaître au dénominateur le facteur $\prod_i (p_i!)^2$. Chaque dX_s est remplacé par le ds correspondant.

On remplace alors à nouveau $(t_{i+1} - t_i)^{2p_i}$ par $(2p_i)! \int_{t_i}^{t_{i+1}} du_1 \dots du_{2p_i}$, ce qui fait apparaître le produit des $(2p_i)!$ au numérateur. Il reste alors une intégrale multiple déterministe étendue à un simplexe de dimension $n + 2p = m + p$, dont la valeur est $t^{n+2p}/(n+2p)!$.

Posons $c(p) = (2p)!/(p!)^2$. Pour passer de $c(p)$ à $c(p+1)$ on le multiplie par $2(2-1/p+1) \leq 4$, d'où la majoration de (1). De plus ce facteur est fonction croissante de p , donc l'inégalité $p \leq q$ entraîne $c(p)c(q) \leq c(p-1)c(q+1)$. On en déduit que la norme est maximale lorsque l'intégrale contient un seul bloc de p zéros, placé n'importe où.

Passons à la majoration de la norme de $S_\lambda(t)$

$$(2) \quad \|S_\lambda(t)\|^2 \leq 2^{2m} \frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!}.$$

On sait que l'intégrale de Stratonovich se déduit de l'intégrale d'Ito en ajoutant à celle-ci des termes contractés. Ceux-ci étant affectés de coefficients positifs, on a avantage à augmenter le nombre des contractions, donc la norme est maximale lorsque tous les indices non nuls sont identiques, et on est ramené à considérer un seul mouvement brownien X . D'autre part, la remarque faite plus haut dit que les normes augmentent lorsqu'on regroupe tous les zéros. On a donc une norme maximale en évaluant la norme² de l'intégrale de Stratonovich

$$\oint_{0 < s_1 \dots < s_n < u_1 \dots < u_p < t} dX_{s_1} \dots dX_{s_n} du_1 \dots du_p = \frac{1}{n!} \frac{1}{(p-1)!} \int_0^t X_u^n du (t-u)^{p-1}$$

Nous évaluons la norme² de la dernière intégrale par l'inégalité de Schwarz

$$\left(\int_0^t (t-u)^{p-1} du \right) \left(\int_0^t (t-u)^{p-1} \mathbb{E}[X_u^{2n}] du \right)$$

et comme $\mathbb{E}[X_u^{2n}] = u^n (2n)! / 2^n n!$ on obtient en fin de compte une majoration de $\|S_\lambda(t)\|^2$ en

$$\frac{t^{n+2p}}{(n+2p)!} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \frac{(n+2p)!}{p!(n+p)!}$$

Le second facteur peut être majoré par 2^n d'après la formule de Stirling et le dernier par 2^{n+2p} , ce qui donne une croissance totale en 2^{2m} , un peu meilleure que la croissance en $(5/2)^{2m}$ indiquée par Ben Arous.