

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAOLO BALDI

M. SANZ

## **Une remarque sur la théorie des grandes déviations**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 25 (1991), p. 345-348

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1991\\_\\_25\\_\\_345\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__345_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Une remarque sur la théorie des grandes déviations

P.Baldi    M.Sanz

On considère la famille d'EDS

$$(1) \quad dX_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon) dt + \varepsilon \sigma(X_t^\varepsilon) dB_t \quad X_0^\varepsilon = x$$

Le Lemme 1 ci-dessous donne une estimation du défaut de continuité du processus  $X_t^\varepsilon$  par rapport à la trajectoire brownienne. Il a été utilisé par R.Azencott ([1], voir aussi P.Priouret [3]) pour en déduire le Théorème 2, lequel fournit des estimations de grandes déviations pour le processus  $X^\varepsilon$  pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Dans cette note nous prouvons que le Lemme 1 est en effet équivalent au Théorème 2. Ceci va nous amener à donner un énoncé, dans un contexte général de grandes déviations.

Dans la suite nous supposons que  $B$  est un mouvement brownien  $k$ -dimensionnel.

(H) On dira que l'hypothèse (H) est satisfaite si les coefficients  $b$  et  $\sigma$  sont des champs de vecteurs et de matrices  $m \times k$  respectivement sur  $\mathbb{R}^m$  qui sont localement Lipschitziens.

Notons  $C_m = C([0, 1], \mathbb{R}^m)$  l'espace des trajectoires continues dans  $[0, 1]$  muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  et soit  $\mathcal{H}_k$  le sous-espace de  $C_k$  des trajectoires  $f$  nulles en 0, absolument continues et telles que

$$\int_0^1 |f'_s|^2 ds < \infty$$

pour toute  $f \in \mathcal{H}_k$  soit  $g \in C_m$  la solution de

$$(2) \quad g'_t = b(g_t) + \sigma(g_t) f'(t) \quad g_0 = x$$

Posons  $g = S_x(f)$ ; soit  $\Gamma$  un ensemble borné dans  $\mathcal{H}_k$ ; sous l'hypothèse (H) il est facile de vérifier (par une application du lemme de Gronwall) que l'application  $S_x$  est continue de  $\Gamma$  (muni de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ ) à valeurs dans  $C_m$ . Notons pour  $x \in \mathbb{R}^m$  fixé

$$|f|_1^2 = \int_0^1 |f'_s|^2 ds$$

$$\lambda(g) = \inf \frac{1}{2} |f|_1^2$$

le inf étant pris sur toutes les fonctions  $f$  telles que  $S_x(f) = g$ ; pour tout  $A \subset C_m$  posons

$$\Lambda(A) = \inf_{g \in A} \lambda(g)$$

On a alors ([1], [3])

**Lemme 1.** (Hypothèse (H)). Soient  $f \in \mathcal{X}_k$  et  $g = S_x(f)$ . Pour tout  $\alpha > 0$  et  $R > 0$  il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$(3) \quad P \{ \|X^\varepsilon - g\|_\infty \geq \alpha, \|\varepsilon B - f\|_\infty \leq \eta \} \leq \exp \left( -\frac{R}{\varepsilon^2} \right)$$

De ce Lemme 1 il est classique ([1]) de déduire les estimations de grandes déviations (Ventsel-Freidlin) suivantes :

**Théorème 2.** (Hypothèse (H)). On a

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log P(X^\varepsilon \in F) &\leq -\Lambda(F) \\ \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \log P(X^\varepsilon \in G) &\geq -\Lambda(G) \end{aligned}$$

pour tout sous-ensemble  $F \subset C_m$  fermé et tout  $G \subset C_m$  ouvert.

Dans la suite on montre que le Lemme 1 peut se déduire facilement du Théorème 2.

Considérons en effet la diffusion  $Z_t^\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon B_t \\ X_t^\varepsilon \end{pmatrix}$ ;  $Z^\varepsilon$  est solution de l'EDS

$$dZ_t^\varepsilon = \tilde{b}(Z_t^\varepsilon) dt + \varepsilon \tilde{\sigma}(Z_t^\varepsilon) dB_t \quad Z_0^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

où  $\tilde{\sigma}(x) = \begin{pmatrix} I \\ \sigma(x) \end{pmatrix}$  est la matrice  $(m+k) \times k$  que l'on obtient en superposant à  $\sigma(x)$  la matrice identité  $k \times k$  et  $\tilde{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$ . Si les coefficients  $b$  et  $\sigma$  vérifient l'hypothèse (H), alors le Théorème 2 s'applique à  $Z^\varepsilon$  car l'hypothèse (H) est satisfaite également pour les coefficients  $\tilde{b}$  et  $\tilde{\sigma}$ .

$Z^\varepsilon$  satisfait donc à des estimations de grandes déviations avec fonctionnelle d'action  $\tilde{\lambda}$  donnée par

$$\tilde{\lambda}(\gamma) = \inf \frac{1}{2} |\dot{f}|_1^2$$

le inf étant pris sur toutes les trajectoires  $f \in \mathcal{X}_k$  telles que

$$(4) \quad \gamma'_t = \tilde{b}(\gamma_t) + \tilde{\sigma}(\gamma_t) f'_t \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Si on appelle  $\tilde{S}(f)$  la solution de (4), on voit alors facilement que l'équation se décompose en deux systèmes, l'un portant sur les premières  $k$  coordonnées et l'autre sur les  $m$  dernières; donc  $\tilde{S}(f) = \begin{pmatrix} f \\ S_x(f) \end{pmatrix}$ ,  $S_x(f)$  étant la solution de (2). En particulier  $\tilde{\lambda}(\gamma) < +\infty$  si et seulement si  $\gamma$  est de la forme  $\begin{pmatrix} f \\ S_x(f) \end{pmatrix}$  et dans ce cas  $\tilde{\lambda}(\gamma) = \frac{1}{2} |f|_1^2$ .

Fixons maintenant  $\alpha > 0$  et  $R > 0$ . Alors

$$P\{\|X^\varepsilon - S_x(f)\|_\infty \geq \alpha, \|\varepsilon B - f\|_\infty \leq \eta\} = P\{Z^\varepsilon \in A\}$$

$A_\eta$  étant l'ensemble de trajectoires

$$A_\eta = \left\{ \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \in C_{k+m}; \|\gamma_1 - f\|_\infty \leq \eta, \|\gamma_2 - S_x(f)\|_\infty \geq \alpha \right\}$$

Comme l'application  $f \rightarrow S_x(f)$  est continue de  $B_R = \{f; \frac{1}{2}|f|_1^2 \leq 2R\} \cap C_k$  à valeurs dans  $C_m$  par rapport à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , il existe  $\eta > 0$  tel que si  $\gamma_1 \in B_R$  et  $\|\gamma_1 - f\|_\infty \leq \eta$  alors  $\|S_x(\gamma_1) - S_x(f)\|_\infty \leq \alpha$ . Pour une telle valeur de  $\eta$  il n'existe donc aucune trajectoire  $\gamma \in A_\eta$  telle que  $\frac{1}{2}|\gamma_1|_1^2 \leq 2R$  et  $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ S_x(\gamma_1) \end{pmatrix}$ . Donc  $\Lambda(A_\eta) \geq R$  et par le Théorème 2

$$P\{\|X^\varepsilon - S_x(f)\|_\infty \geq \alpha, \|\varepsilon B - f\|_\infty \leq \eta\} = P\{Z^\varepsilon \in A\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

Remarquons que dans la démonstration que l'on vient de faire on n'a utilisé que le fait que l'application  $S_x$  est continue sur les bornés de  $\mathcal{M}_k$ . Ceci nous amène à donner une version abstraite de notre résultat. Soient  $(E_i, d_i), i = 1, 2$  deux espaces métriques séparables complets. On se donne deux familles  $X_i^\varepsilon : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow E_i, \varepsilon > 0, i = 1, 2$  de variables aléatoires. Supposons que  $\{X_1^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$  satisfait à un principe de grandes déviations avec fonctionnelle d'action  $\lambda : E_1 \rightarrow [0, +\infty]$ . Supposons aussi qu'il existe une application  $S : \{\lambda < +\infty\} \rightarrow E_2$  telle que sa restriction aux ensembles compacts  $\{\lambda \leq a\}, a \in [0, +\infty[$  soit continue. On a alors le résultat suivant :

**Théorème 3.** *Sous les conditions explicitées ci-dessus il y a équivalence entre*

a) *La famille  $\{(X_1^\varepsilon, X_2^\varepsilon), \varepsilon > 0\}$  satisfait un principe de grandes déviations avec fonctionnelle d'action  $\lambda : E_1 \times E_2 \rightarrow [0, +\infty]$  définie par*

$$\tilde{\lambda}(f, g) = \begin{cases} \lambda(f) & \text{si } g = S(f) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

b) *pour tout  $f \in E_1$  tel que  $\lambda(f)$  soit finie et pour tout  $R > 0, \alpha > 0$  il existe  $\eta > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon_0$  on ait*

$$P\{d_2(X_2^\varepsilon, S(f)) \geq \alpha, d_1(X_1^\varepsilon, f) \leq \eta\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

Démonstration. La preuve de a)  $\Rightarrow$  b) suit exactement le même schéma que tout à l'heure.

Par contre si la propriété de quasi-continuité b) est satisfaite, considérons la distance  $d$  définie par  $d((f, g), (f', g')) = d_1(f, f') + d_2(g, g'), f, f' \in E_1, g, g' \in E_2$ . Si  $Z^\varepsilon = (X_1^\varepsilon, X_2^\varepsilon)$  il est immédiat de vérifier que la propriété b) est aussi satisfaite pour

le couple  $Z^\varepsilon = (X_1^\varepsilon, X_2^\varepsilon)$ . Plus précisément pour tout  $f \in E_1$  tel que  $\lambda(f)$  soit finie et pour tous  $R > 0$ ,  $\alpha > 0$  il existe  $\eta > 0$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que pour tout  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$P\{d(Z^\varepsilon, (f, S(f))) \geq \alpha, d_1(X_1^\varepsilon, f) \leq \eta\} \leq \exp\left(-\frac{R}{\varepsilon^2}\right)$$

Il suffit maintenant d'appliquer la méthode classique de transport des estimations de grandes déviations (voir Azencott [1], mais aussi Doss-Priouret [2], paragraphe 3).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] Azencott R. : *Grandes Déviations et applications*. In Ecole d'Été de Probabilité de St. Flour VIII 1978, Lect. Notes Math. 774, Springer : Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
- [2] Doss H. Priouret P. : *Petites perturbations de systèmes dynamiques avec réflexion*. In Séminaire de Probabilités XVII, Lect. Notes Math. 986, Springer : Berlin-Heidelberg-New York, 351-370 (1982).
- [3] Priouret P. : *Remarques sur les petites perturbations de systèmes dynamiques*. In Séminaire de Probabilités XVI, Lect. Notes Math. 920, Springer : Berlin-Heidelberg-New York (1982).

Paolo Baldi  
 Dipartimento di Matematica  
 Città Universitaria  
 Viale A.Doria 6  
 95125 Catania (Italy)

Marta Sanz  
 Facultat de Matemàtiques  
 Universitat de Barcelona  
 Gran Via 585  
 BARCELONA-7 (Espagne)