Jean Bertoin

Décomposition du mouvement brownien avec dérive en un minimum local par juxtaposition de ses excursions positives et négatives

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 330-344
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__330_0>

DECOMPOSITION DU MOUVEMENT BROWNIEN AVEC DÉRIVE EN UN MINIMUM LOCAL PAR JUXTAPOSITION DE SES EXCURSIONS POSITIVES ET NÉGATIVES

Jean BERTOIN

Laboratoire de Probabilités (L.A. 224), Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, Place Jussieu, 75252 PARIS Cédex 05

D'après les lois de l'arc-sinus dûes à P. Lévy (voir [10] et [11, Chap. VI]), le temps total passé avant l'instant 1 dans $]-\infty,0[$ par un mouvement brownien réel X, a même loi que le dernier instant avant 1 en lequel X atteint son minimum (c.f. Pitman-Yor [14] pour une explication de cette relation et Bingham-Doney [4] pour de plus amples références sur les lois de l'arc-sinus). Plus généralement, nous nous intéressons ici au cas où X est un mouvement brownien avec dérive. Le principal objet de cet article est de mettre en évidence l'identité en loi entre, d'une part, le couple des processus obtenus en *juxtaposant* respectivement les excursions positives et négatives de X sur $[0,1]$, et d'autre part, le couple des processus obtenus en décomposant la trajectoire de X à l'instant en lequel elle atteint son minimum sur $[0,1]$. Le sens du terme *juxtaposition* dans ce travail est précisé à la section 1. On retrouve alors le résultat de P. Lévy tout simplement en comparant les durées de vie des différents processus.

Nous insistons sur le caractère élémentaire de cette identité, qui ne repose que sur des arguments très simples de théorie des excursions. Le point essentiel consiste à comprendre comment reconstruire le processus initial à partir des deux processus obtenus en juxtaposant les excursions suivant leurs signes. Les descriptions de la mesure des excursions browniennes données par exemple dans le Théorème 6.1 de [2], permettent une démonstration plus rapide dans le cas où la dérive est nulle, mais n'éclairent pas vraiment le résultat.

Dans le cas brownien (i.e. sans dérive), cette relation nous permet d'étudier asymptotiquement la décomposition de la trajectoire en un minimum local. Nous donnons également une construction du processus de Bessel de dimension 3 sur l'intervalle de temps $[0,1]$, à partir de la décomposition de X en son minimum sur $[0,1]$. Enfin, nous établissons une nouvelle relation entre le pont brownien et le méandre brownien qui complète celles de Vervaat [15] et Biane [1] entre le pont brownien et l'excursion brownienne normalisée.

1. NOTATIONS ET RÉSULTAT PRINCIPAL

Désignons par Ω , l'espace des trajectoires $\omega : [0,\infty[\to \mathbb{R} \cup \{\Delta\}$ continues jusqu'en leurs temps de mort $\zeta = \inf\{t : \omega(t) = \Delta\}$, $\omega(t) = \Delta$ pour tout $t > \zeta$. Notons $X(t) = X_t(\omega) = \omega(t)$, le processus canonique, et, pour tout $t \le \zeta$

$$\overline{X}(t) = \sup\{X(s) : 0 \le s \le t\} , \ \overline{\overline{X}}(t) = \sup\{X(s) : t \le s < \zeta\},$$
$$\underline{X}(t) = \inf\{X(s) : 0 \le s \le t\} , \ \underline{\underline{X}}(t) = \inf\{X(s) : t \le s < \zeta\}.$$

La trajectoire ω étant supposée fixée, on considère $\rho = \sup\{s < \zeta : X(s) = \underline{\underline{X}}(0)\}$, le dernier instant en lequel X atteint son minimum. Quand $\rho < \zeta$, on appelle processus post-minimum

$$\underset{\rightarrow}{X} = (\underset{\rightarrow}{X}(t) : = X(t + \rho) - X(\rho) \ , \ 0 \le t < \zeta - \rho),$$

et processus retourné du processus pré-minimum

$$\underset{\leftarrow}{X} = (\underset{\leftarrow}{X}(t) : = X(\rho - t) - X(\rho) \ , \ 0 \le t < \rho).$$

Nous désignons par $A^{+/-}(t) = \displaystyle\int_0^t 1_{\{X(s) \in \mathbb{R}_{+/-}\}} ds$, le temps passé dans $\mathbb{R}_{+/-}$,

et par $\alpha^{+/-}(t) = \inf\{s : A^{+/-}(s) > t\}$, l'inverse continu à droite de $A^{+/-}$.

Quand $\{s < \zeta : X(s) = 0\}$ est un fermé parfait non vide de $[0,\zeta[$, on appelle pseudo-temps-local en 0 toute fonction continue croissante $L : [0,\zeta[\to \mathbb{R}_+$ satisfaisant $L(0) = 0$ et telle que le support de la mesure dL soit exactement $\{s < \zeta : X(s) = 0\}$. Une fois choisi un pseudo-temps-local en 0 , on pose

$$Y^+ = \left(Y^+(t) : = (X + \tfrac{1}{2} L) \circ \alpha^+(t) \ , \ t < A^+(\zeta)\right),$$

$$Y^- = \left(Y^-(t) : = (X - \tfrac{1}{2} L) \circ \alpha^-(t) \ , \ t < A^-(\zeta)\right).$$

Nous dirons que $Y^{+/-}$ est construit par juxtaposition des excursions positives/négatives de X .

Nous notons $\mathbb{P}$, la mesure de probabilité sur Ω qui fait de X un mouvement brownien avec dérive $\delta \in \mathbb{R}$, i.e. $(X_t - \delta t \ ; \ t \geq 0)$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{P}$. On appelle alors temps local standard, le pseudo-temps-local en 0 spécifié par les formules de Tanaka (nous parlerons par la suite, de première et de seconde formule de Tanaka):

$$X^+(t) = \int_0^t 1_{\{X(s) > 0\}} \, dX(s) + \frac{1}{2} L(t),$$

$$X^-(t) = - \int_0^t 1_{\{X(s) < 0\}} \, dX(s) + \frac{1}{2} L(t),$$

où $X^{\pm}$ est la partie positive de $\pm X$. Enfin, pour tout $t > 0$, nous notons $\mathbb{P}^t$, la loi du processus canonique tué au temps t sous $\mathbb{P}$. Nous énonçons le

Théorème . *Pour tout* $t > 0$ *fixé, les couples de processus* $(\underset{\rightarrow}{X} , \underset{\leftarrow}{X})$ *et* $(Y^+ , -Y^-)$ *ont même loi sous* $\mathbb{P}^t$ *lorsque* L *est le temps local standard.*

Remarque. On déduit en particulier du théorème que, sous $\mathbb{P}^1$, conditionnellement à $X(1) > 0$, les triplets $(A^-(1) , \frac{1}{2} L(1) , X(1))$ et $(\rho , -X(\rho) , X(1))$ ont même loi. Cette identité a été découverte et expliquée par Karatzas-Shreve [9].

2. PRELIMINAIRES

Nous commençons par rappeler quelques propriétés bien connues des excursions du mouvement brownien avec dérive. Les preuves sont esquissées pour la commodité du lecteur.

Considérons une trajectoire fixée $\omega \in \Omega$, et supposons qu'il existe un pseudo-temps-local en 0 (au sens défini dans la section 1) noté L. Nous appelons fonction d'excursion de (X,L), la fonction

$$e : t \mapsto e(t) = (1_{\{s < L^{-1}(t) - L^{-1}(t-)\}} X(L^{-1}(t-) + s) \ , \ s \geq 0) \ ,$$

où L^{-1} est l'inverse continu à droite de L. Si L' est un second pseudo-temps-local en 0, alors la fonction d'excursion de (X,L') est simplement la fonction d'excursion de (X,L) changée de temps par $L' \circ L^{-1}$. Une excursion $e(t)$ est dite complète quand $t < L(\zeta)$. Nous appelons $e(L(\zeta))$, la dernière excursion de X (elle ne dépend bien sûr pas du choix de L). Dès que l'ensemble $\{t : X(t) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, on peut reconstruire X et L à partir de la fonction d'excursion e (formellement, on obtient X en recollant bout-à-bout les excursions, et L est déterminé par la vitesse à laquelle apparaissent les excursions dans e).

Quand on munit Ω d'une probabilité P qui fait de X un processus de Markov standard issu de 0 et tel que $\{t : X(t) = 0\}$ est P - p.s. un fermé parfait non vide de $[0,\zeta[$ de mesure de Lebesgue nulle, et quand le pseudo-temps-local en 0, L, est une fonctionnelle additive, alors le processus des excursions complètes de (X,L) , $(e(t), t<L(\zeta))$ est un processus de Poisson ponctuel, tué au temps exponentiel indépendant $L(\zeta)$ ($L(\zeta) \equiv \infty$ si 0 est récurrent). Nous désignons sa mesure caractéristique par m_{comp} . La dernière excursion $e(L(\zeta))$ est indépendante du processus des excursions complètes, nous notons Q sa loi. Nous appelons mesure d'excursion de (X,L) sous P , la mesure $m = m_{comp} + cQ$, où $1/c = E(L(\zeta))$. La mesure d'excursion m caractérise la loi P et le choix du temps local L. Voir Itô [7]. Rappelons que pour t fixé, P^t (respectivement m^t) désigne la loi du processus canonique tué au temps t sous P (respectivement m). Soient $P^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} dt\ e^{-t}.P^t$ et $m^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} dt\ e^{-t}.m^t$ (i.e. on tue le processus en un temps exponentiel indépendant de paramètre 1). Alors, la mesure d'excursion de (X,L) sous P^{ε} est m^{ε}.

Le temps local en 0, L, étant spécifié par les formules de Tanaka, nous notons n $\left(\text{respectivement } n^{\varepsilon} = \int_0^{\infty} dt\ e^{-t}.n^t\right)$, la mesure d'excursion de (X,L) sous $\mathbb{P}$ (respectivement sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$). La loi de la dernière excursion sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$, conditionnée à être positive est donc

$$\mathbb{Q}^{\varepsilon,+} = a^+ \int_0^{\infty} dt\ e^{-t}\ 1_{\{X_t \geq 0\ ,\ \sigma > t\}}.n^t\ ,$$

où a^+ est la constante de normalisation et $\sigma = \inf\{s > 0 : X_s = 0\}$. De même, la loi de la dernière excursion sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$, conditionnée à être négative, est

$$\mathbb{Q}^{\varepsilon,-} = a^- \int_0^\infty dt\ e^{-t}\ 1_{\{X_t \le 0\ ,\ \sigma > t\}} . n^t .$$

Rappelons que $\mathbb{E}^\varepsilon(L(\zeta)) = (2 + \delta^2)^{-1/2}$ et $\mathbb{P}^\varepsilon(X(\zeta) > 0) = \frac{1}{2}\,(1 + \delta(2 + \delta^2)^{-1/2})$ (utiliser par exemple la formule de Cameron-Martin). On a finalement

$$n^\varepsilon = e^{-\sigma} n + \beta^+\ \mathbb{Q}^{\varepsilon,+} + \beta^-\ \mathbb{Q}^{\varepsilon,-}\ ,$$

$$\text{avec}\quad \beta^{+/-} = \frac{1}{2}\,((2 + \delta^2)^{1/2} \pm \delta) \qquad (1).$$

Comme le temps local standard ne croît que quand X est nul, il découle de la première formule de Tanaka et du lemme de Skorokhod que

$$\frac{1}{2}\,L(t) = -\ \inf\left\{\int_0^s 1_{\{X(r) > 0\}}\ dX(r)\ :\ 0 \le s \le t\right\}.$$

De plus, la caractérisation de P. Lévy de la loi brownienne entraîne que, sous $\mathbb{P}$,

$$\left(\int_{[0,\alpha^+(t)]} 1_{\{X(s) > 0\}}\ dX(s)\ :\ 0 \le t < A^+(\infty)\right)$$

est un mouvement brownien avec dérive δ , tué au premier temps d'atteinte de l'opposé d'une v.a. exponentielle indépendante de paramètre -2δ dès que $\delta < 0$. Voir par exemple Doney-Grey [6]. Nous en déduisons que sous $\mathbb{P}$, $X-\underline{X}$ est un processus de Markov, que $-2\underline{X}$ est un temps local en 0 pour $X-\underline{X}$, et que la mesure d'excursion correspondante est $n^+ = 1_{\{X \ge 0\}}.n$. De même, on montre à l'aide de la seconde formule de Tanaka, que sous $\mathbb{P}$, $X-\overline{X}$ est un processus de Markov, que $2\overline{X}$ est un temps local en 0 pour $X-\overline{X}$, et que la mesure d'excursion correspondante est $n^- = 1_{\{X \le 0\}}.n$.

Rappelons que sous $\mathbb{P}^\varepsilon$, $2\overline{X}(\zeta)$ (respectivement $-2\underline{X}(\zeta)$) suit une loi exponentielle de paramètre β^- (respectivement β^+). Par conséquent, la mesure d'excursion de $(X-\overline{X}\ ,\ 2\overline{X})$ sous $\mathbb{P}^\varepsilon$ est

$$n^{-,\varepsilon} = e^{-\sigma}\ 1_{\{X \le 0\}}.n + \beta^-\ \mathbb{Q}^{\varepsilon,-} \qquad (2).$$

De même, la mesure d'excursion de $(X-\underline{X}\ ,\ -2\underline{X})$ sous $\mathbb{P}^\varepsilon$ est

$$n^{+,\varepsilon} = e^{-\sigma}\, 1_{\{X \geq 0\}}.n + \beta^{+}\, \mathbb{Q}^{\varepsilon,+} \qquad (2').$$

En retournant le temps, on déduit immédiatement le

Lemme 1. *i) Sous* $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$ *,* $X-\underline{\underline{X}}$ *est un processus de Markov,* $2\underline{\underline{X}}$ *est un temps local en* 0 *(au sens Markovien) de* $X-\underline{\underline{X}}$ *, et la mesure d'excursion de* $(X-\underline{\underline{X}}\ ,\ 2\underline{\underline{X}})$ *est* $e^{-\sigma}\, 1_{\{X \geq 0\}}.n + \beta^{-}\, \varepsilon_{\Delta}$ *, où* ε_{Δ} *désigne la masse de Dirac en la trajectoire* $\omega \equiv \Delta$.

ii) Sous $\mathbb{Q}^{\varepsilon,-}$ *,* $X-\overline{\overline{X}}$ *est un processus de Markov ,* $-2\overline{\overline{X}}$ *est un temps local en* 0 *(au sens Markovien) de* $X-\overline{\overline{X}}$ *, et la mesure d'excursion de* $(X-\overline{\overline{X}}\ ,\ 2\overline{\overline{X}})$ *est* $e^{-\sigma}\, 1_{\{X \leq 0\}}.n + \beta^{+}\, \varepsilon_{\Delta}$.

Preuve du lemme 1. D'après (2'), sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$, le processus post-minimum $\underset{\rightarrow}{X}$ a pour loi $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$. La loi $\mathbb{P}^{\varepsilon}$ étant invariante par l'application $\omega \mapsto \check{\omega}$, où $\check{\omega}(t) = \omega(\zeta) - \omega(\zeta-t)$ (car les accroissements de X sont indépendants et homogènes), on en déduit que sous $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$, $X-\underline{\underline{X}}$ a même loi que le processus $\overline{X}-X$ retourné en son dernier zéro sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$. En particulier, sous $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$, le processus $X-\underline{\underline{X}}$ est Markovien, et $2\underline{\underline{X}}$ est un temps local (Markovien) en 0. Or un processus de Poisson ponctuel tué en un temps indépendant fini a même loi que son retourné. Par conséquent, sous $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$, le processus d'excursion de $(X-\underline{\underline{X}}\ ,\ 2\underline{\underline{X}})$ a même loi que l'image du processus des excursions complètes de $(X-\overline{X},\ 2\overline{X})$ par l'application $\omega \mapsto \check{\omega}$ sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$. L'assertion i) découle alors de (2), et du fait que la mesure $e^{-\sigma}.n$ est invariante par retournement du temps (puisqu'il en est de même pour $\mathbb{P}^{\varepsilon}$). On montre ii) de façon analogue.□

3. PREUVE DU THEOREME

Le théorème découle maintenant des arguments suivants: en utilisant la propriété d'invariance de $\mathbb{P}^{\varepsilon}$ sous l'application $\omega \mapsto \check{\omega}$, $\check{\omega}(t) = \omega(\zeta) - \omega(\zeta-t)$, on montre aisément que sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$, le processus post-minimum, $\underset{\rightarrow}{X}$, et l'opposé du processus pré-minimum retourné, $-\underset{\leftarrow}{X}$, sont indépendants, que le premier a pour loi $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$, et que le second a pour loi $\mathbb{Q}^{\varepsilon,-}$. Nous allons voir d'autre part que:

sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$, si L désigne le temps local standard, les processus Y^+ et Y^- sont indépendants et leurs lois respectives sont $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$ et $\mathbb{Q}^{\varepsilon,-}$ (3).

En particulier, (3) entraîne que les triplets $(Y^+ , Y^- , A^+(\zeta) + A^-(\zeta))$ et $(\underset{\rightarrow}{X} , \underset{\leftarrow}{X} , \zeta-\rho+\rho)$ ont même loi sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$. Or $\zeta = \zeta-\rho+\rho = A^+(\zeta) + A^-(\zeta)$, et le théorème est obtenu en conditionnant cette identité par $\zeta = t$.

Remarque. Les processus $X \circ \alpha^+$ et $X \circ \alpha^-$ ne sont pas indépendants sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$, puisque leurs temps locaux au niveau 0 et en leurs temps de mort respectifs coïncident (avec $L(\zeta)$). Au cours de la preuve de (3), nous verrons que la tribu engendrée par Y^+ est strictement incluse dans la tribu engendrée par $X \circ \alpha^+$, mais que néanmoins, on peut reconstruire X à partir de Y^+ et Y^-.

La preuve de (3) est divisée en deux lemmes :

Lemme 2. *Il existe une unique loi de probabilité* P *sur* Ω *telle que*
i) P - *p.s.* , $\{t : X(t) = 0\}$ *est de mesure de Lebesgue nulle, et* X *admet un temps local en* 0 , L.
ii) *Sous* P , (Y^+ , Y^-) *a pour loi* $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+} \otimes \mathbb{Q}^{\varepsilon,-}$.

Lemme 3. P *et* L *étant définis par le lemme* 2, $P = \mathbb{P}^{\varepsilon}$ *et* L *est le temps local standard.*

Preuve du lemme 2. Commençons par reconstruire X à partir de Y^+ et Y^- . Fixons une trajectoire $\omega \in \Omega$ telle que $\zeta(\omega) < \infty$, $\{t : X_t(\omega) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, et $X(\omega)$ admet un pseudo-temps-local en 0 , $L(\omega)$. Supposons de plus que $L \circ \alpha^+$ et $L \circ \alpha^-$ sont deux fonctions continues jusqu'en leurs temps de mort respectifs $\zeta^{+/-} := A^{+/-}(\zeta)$. Désignons par $\ell^{+/-} = \sup\{t : X \circ \alpha^{+/-}(t) = 0\}$, le dernier zéro de $X \circ \alpha^{+/-}$, et par

$$\underline{\underline{Y}}^+(t) = \inf\{Y^+(s) : t \le s < \zeta^+\} , \ \overline{\overline{Y}}^-(t) = \sup\{Y^-(s) : t \le s < \zeta^-\}.$$

Nous déduisons de la définition même de $Y^{+/-}$ les identités :

$$L \circ \alpha^+(t) = 2\underline{\underline{Y}}^+(t) \quad \text{si} \quad t < \ell^+ \ , \quad L \circ \alpha^+(t) = L(\zeta) \quad \text{si} \quad t \in [\ell^+ , \zeta^+[\ ,$$

$$L \circ \alpha^-(t) = -2\overline{\overline{Y}}^-(t) \quad \text{si} \quad t < \ell^- \ , \quad L \circ \alpha^-(t) = L(\zeta) \quad \text{si} \quad t \in [\ell^- , \zeta^-[\ .$$

Comme, soit $X \circ \alpha^+(\zeta^+) = 0$, soit $X \circ \alpha^-(\zeta^-) = 0$, on a

$$L(\zeta) = \inf\{2Y^+(\zeta^+)\ ,\ -\ 2Y^-(\zeta^-)\}$$

Ainsi, on peut reconstruire $(X \circ \alpha^+\ ,\ L \circ \alpha^+)$ et $(X \circ \alpha^-\ ,\ L \circ \alpha^-)$ à partir de Y^+ et Y^-. La reconstruction de la fonction d'excursion e de (X,L) à partir des fonctions d'excursion respectives e^+ et e^- de $(X \circ \alpha^+\ ,\ L \circ \alpha^+)$ et de $(X \circ \alpha^-,\ L \circ \alpha^-)$ est classique :

$$e(t) = \begin{cases} e^+(t) & \text{si} \quad e^+(t) \neq \Delta \\ e^-(t) & \text{si} \quad e^-(t) \neq \Delta \\ \Delta & \text{si} \quad e^+(t) = e^-(t) = \Delta \end{cases} \qquad (4),$$

où on a noté Δ la trajectoire identiquement égale à Δ. Comme nous savons reconstruire (X,L) à partir de e, nous savons le reconstruire à partir de Y^+ et Y^-.

Considérons maintenant deux fonctions continues issues de 0 $Z^{+/-} : [0,\ \xi^{+/-}[\ \to \mathbb{R}$, $Z^+ \geq 0$, $Z^- \leq 0$, et telles que, avec des notations évidentes

(a) $\{t : Z^+(t) = \underline{\underline{Z}}^+(t)\}$ et $\{t : Z^-(t) = \overline{\overline{Z}}^-(t)\}$ sont de mesure de Lebesgue nulle.

(b) $\underline{\underline{Z}}^+$ et $-\overline{\overline{Z}}^-$ croissent respectivement exactement sur $\{t : Z^+(t) = \underline{\underline{Z}}^+(t)\}$ et $\{t : Z^-(t) = \overline{\overline{Z}}^-(t)\}$.

(c) Les temps de saut des inverses respectifs de $\underline{\underline{Z}}^+$ et $-\overline{\overline{Z}}^-$ sont distincts.

On peut alors trouver une trajectoire $\omega \in \Omega$, $\zeta < \infty$, telle que $X(\omega)$ admet un pseudo-temps-local en 0 , $L(\omega)$, $\{t : X_t(\omega) = 0\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, et $Y^{+/-}(\omega) = Z^{+/-}$. En effet, on introduit

$$L(\zeta) = \inf\{2Z^+(\xi^+),\ 2Z^-(\xi^-)\}\ ,$$

$$\ell^+ = \sup\{t : \underline{\underline{Z}}^+(t) = \frac{1}{2} L(\zeta)\}\ , \text{ et } \ \ell^- = \sup\{t : -\overline{\overline{Z}}^-(t) = \frac{1}{2} L(\zeta)\}.$$

On pose $L \circ \alpha^+(t) = 2\underline{\underline{Z}}^+(t)$ si $t < \ell^+$, $L \circ \alpha^+(t) = L(\zeta)$ sinon , et on introduit de même $L \circ \alpha^-$. On note e^+ la fonction d'excursion de $(Z^+ - \frac{1}{2} L \circ \alpha^+\ ,\ L \circ \alpha^+)$, et e^- celle de $(Z^- + \frac{1}{2} L \circ \alpha^-\ ,\ L \circ \alpha^-)$. On construit la fonction d'excursion e par la formule (4) (grâce à (c), il n'y a pas d'ambigüité dans cette définition), et à partir de e , on peut construire une (unique) trajectoire ω ayant les propriétés annoncées.

Enfin, si Z^+ et Z^- sont deux processus indépendants, de lois respectives $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$ et $\mathbb{Q}^{\varepsilon,-}$, les conditions (a), (b) et (c) sont vérifiées p.s., et le lemme 2 est établi.□

Preuve du lemme 3. Pour montrer que $P = \mathbb{P}^{\varepsilon}$ et que L est le temps local standard, il suffit de montrer que le processus des excursions de (X,L) sous P a même loi que celui de (X,L') sous $\mathbb{P}^{\varepsilon}$, où L' est le temps local standard. Nous travaillons sous P, et les notations sont celles du lemme 2.

Pour simplifier, posons $e^+ = 2Y^+(\zeta^+)$, $e^- = -2Y^-(\zeta^-)$. Grâce au lemme 1, e^+ et e^- sont deux v.a. exponentielles indépendantes, de paramètres respectifs β^- et β^+ (les signes ont changé !). Les propriétés des lois exponentielles entraînent que

(i) $e^+ \wedge e^-$ est indépendant de $e^+ - e^-$ et suit une loi exponentielle de paramètre $\beta^+ + \beta^-$.

(ii) $P(e^+ < e^-) = \beta^- / (\beta^+ + \beta^-)$.

(iii) Sous $P(\cdot|e^+ < e^-)$, $e^- - e^+$ suit une loi exponentielle de paramètre β^+.

(iv) Sous $P(\cdot|e^- < e^+)$, $e^+ - e$ suit une loi exponentielle de paramètre β^-. **(5)**

Souvenons-nous comment on reconstruit $X \circ \alpha^+$, $X \circ \alpha^-$, $L \circ \alpha^+$ et $L \circ \alpha^-$ à partir de Y^+ et Y^-. Le processus des excursions complètes de $(X \circ \alpha^+ , L \circ \alpha^+)$ est le processus des excursions de $(Y^+ - \underline{\underline{Y}}^+ , 2\underline{\underline{Y}}^+)$ tué au temps $e^+ \wedge e^-$, et de même, le processus des excursions complètes de $(X \circ \alpha^- , L \circ \alpha^-)$ est le processus des excursions de $(Y^- - \overline{\overline{Y}}^- , - 2\overline{\overline{Y}}^-)$ tué au temps $e^+ \wedge e^-$. Rappelons que le processus des excursions complètes de (X,L), $(e(t) , t < L(\zeta))$, est obtenu au moyen de (4). Nous déduisons alors de (5-i) et du lemme 1 que $(e(t), t < L(\zeta))$ est un processus de Poisson ponctuel de mesure caractéristique $e^{-\sigma}.n$ tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $\beta^+ + \beta^-$, et est indépendant de la dernière excursion $e(L(\zeta))$.

D'autre part, la dernière excursion de $X \circ \alpha^+$ est Δ quand $e^+ < e^-$, et d'après (5-iv) et le lemme 1-i, sa loi conditionnellement à $e^- < e^+$ est $\mathbb{Q}^{\varepsilon,+}$. De même, la dernière excursion de $X \circ \alpha^-$ est Δ quand $e^- < e^+$, et sa loi conditionnellement à $e^+ < e^-$ est $\mathbb{Q}^{\epsilon,-}$. Grâce à (5-ii) et à (4), la loi de la dernière excursion de X est donc $(\beta^+ \mathbb{Q}^{\epsilon,+} + \beta^- \mathbb{Q}^{\epsilon,-})/(\beta^+ + \beta^-)$.

La comparaison avec (1) établit maintenant le lemme 3. □

Remarque. Nous avons signalé en Introduction que dans le cas brownien, on peut montrer le théorème à l'aide des descriptions bien connues de la mesure des excursions browniennes. Plus précisément, le théorème découle des résultats de Bismut sur la décomposition de la trajectoire brownienne en son minimum [5, théorème 2.16] et en son dernier zéro [5, théorème 2.17], de l'indépendance des excursions positives et négatives, et du théorème de Pitman [12]. Cette démonstration (qui repose sur des propriétés des excursions browniennes bien plus fines que celles que nous avons utilisées) éclaire toutefois moins bien le théorème que la preuve élémentaire. En particulier, le fait assez surprenant que sous $\mathbb{P}^\epsilon$, Y^+ et Y^- sont indépendants n'est pas expliqué.

4. QUELQUES APPLICATIONS AU MOUVEMENT BROWNIEN.

Nous supposons dans cette section que la dérive δ est nulle, et nous désignerons dorénavant par L le temps local en 0 standard. Nous donnons maintenant quelques applications de notre résultat principal.

a) Etude asymptotique de la décomposition au minimum : Quand on fait tendre t vers l'infini dans le théorème, on obtient facilement le

Corollaire 1. *Pour tout* $T > 0$ *fixé, et toute fonction bornée* $\Phi : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{F}_T$ *-mesurable, on a*

$$\lim_{t \uparrow \infty} \mathbb{E}^t\left(\Phi(\underset{\rightarrow}{X}, \underset{\leftarrow}{X})\right) = \mathcal{E}(\Phi(R, R')) ,$$

où, sous $\mathcal{P}$, R *et* R' *sont deux processus de Bessel de dimension 3 issus de* 0 *et indépendants.*

Preuve : Nous savons que sous $\mathbb{P}$, il existe deux mouvements browniens indépendants B et B', de processus maximum respectifs $\overline{B}$ et $\overline{B}'$, tels que

$$\left(X \circ \alpha^+ , \frac{1}{2} L \circ \alpha^+\right) = (\overline{B} - B, \overline{B}) , \quad \left(-X \circ \alpha^- , \frac{1}{2} L \circ \alpha^-\right) = (\overline{B}' - B', \overline{B}') .$$

Voir par exemple Pitman-Yor [14]. D'après le théorème de Pitman, Y^+ et $-Y^-$ sont deux processus de Bessel de dimension 3 indépendants. □

Remarque. Quand $\delta > 0$, on retrouve de même la description de Williams [16] de la décomposition au minimum absolu en faisant tendre t vers ∞ dans le théorème et en appliquant le théorème de Pitman pour le brownien avec dérive (c.f. Pitman-Rogers [13])

En utilisant la propriété dite de scaling du mouvement brownien, on obtient que (les notations étant les mêmes que dans le corollaire 1), pour tout $t > 0$ fixé

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}^t\left[\Phi(\varepsilon^{-1/2} \underset{\rightarrow}{X} (\varepsilon\cdot) , \varepsilon^{-1/2} \underset{\leftarrow}{X} (\varepsilon\cdot))\right] = \mathcal{E}(\Phi(R, R')).$$

Notons encore que Jeulin [8, théorème 6,41] obtient un résultat similaire relatif à l'excursion brownienne normalisée. On passe de l'identité précédente au théorème de Jeulin à l'aide du résultat de Vervaat [15] qui donne une construction de l'excursion brownienne normalisée à partir du pont brownien.

b) Une construction du processus de Bessel de dimension 3 *:* Notons $\mathcal{P}$ la loi du processus de Bessel de dimension 3 (en abrégé BES(3)). Nous allons construire ici la loi du BES(3) sur l'intervalle de temps $[0,1]$ à partir de la décomposition de X en son minimum sur $[0,1]$. Pour cela, nous introduisons les notations suivantes:

si $(\omega(t) , t \le \zeta)$ et $(\omega'(t) , t \le \zeta')$ sont deux trajectoires dans Ω, et que ω' est issue de 0 , nous posons

$$\omega \odot \omega'(t) = \begin{cases} \omega(t) & \text{si} \quad t \le \zeta \\ \omega(\zeta) + \omega(t-\zeta) & \text{si} \quad \zeta < t \le \zeta' \end{cases} ,$$

c'est-à-dire que $\omega \odot \omega'$ est la trajectoire obtenue en recollant bout-à-bout ω et ω'.

On pose $\frac{1}{2}\chi = (0 \wedge X(\zeta)) - X(\rho)$.

Nous énonçons le

Corollaire 2. *Sous* $\mathbb{P}^1$ *,* $(\underset{\leftarrow}{X} \odot \underset{\rightarrow}{X} , \chi)'$ *est indépendant de* $\operatorname{sgn}(X(1))$ *et a même loi que* $((X(t) , t \le 1) , \underline{\underline{X}}(1))$ *sous* $\mathcal{P}$ *.*

Preuve. Sous $\mathbb{P}^{e}$, le processus des excursions complètes positives est indépendant du processus des excursions complètes négatives. De plus, l'image de la mesure $e^{-\sigma}\,1_{\{X\le 0\}}.n$ par l'application $\omega\mapsto -\omega$ est $e^{-\sigma}\,1_{\{X\ge 0\}}.n$. En comparant (1) et (2'), on montre aisément que sous $\mathbb{P}^{e}$, conditionnellement à $X(\zeta)>0$, le couple $((-X\circ\alpha^{-})\odot(X\circ\alpha^{+})\ ,\ (L\circ\alpha^{-})\odot(L\circ\alpha^{+}))$ a même loi que le couple $(X-\underline{X}\ ,\ -2\underline{X})$ sous $\mathbb{P}^{e}$. En appliquant le théorème de Pitman [12], puis le théorème, on obtient alors que sous $\mathbb{P}^{e}(.\,|X(\zeta)>0)$, $(\underset{\leftarrow}{X}\odot\underset{\rightarrow}{X}\ ,\ \chi)$ a même loi que $(\,(X_t,\ t\le e)\ ,\ \underline{\underline{X}}(e)\,)$ sous $\mathcal{P}$, où e est une v.a. exponentielle de paramètre 1 indépendante de X sous $\mathcal{P}$.

Intéressons-nous maintenant à la loi $\mathbb{P}^{e}(.\,|X(\zeta)<0)$. Notons $\tau=\inf\{t : X(t)=X(\zeta)\}$, et décomposons $\underset{\leftarrow}{X}$ en $\underset{\leftarrow}{X}^{2}\odot\underset{\leftarrow}{X}^{1}$, où

$$\underset{\leftarrow}{X}^{1}(t)=X(\tau-t)-X(\tau)\quad\text{pour}\quad t\in[0,\tau]\ ,$$
$$\underset{\leftarrow}{X}^{2}(t)=X(\rho-t)-X(\rho)\quad\text{pour}\quad t\in[0,\rho-\tau]\ .$$

Rappelons que sous $\mathbb{P}^{e}$, $-\underset{\leftarrow}{X}$ et $\underset{\rightarrow}{X}$ sont indépendants et ont pour lois respectives $\mathbb{Q}^{e,-}$ et $\mathbb{Q}^{e,+}$. On montre alors grâce au lemme 1 et à (5), que sous $\mathbb{P}^{e}(.\,|X(\zeta)<0)$, le couple $(\underset{\leftarrow}{X}^{2}\ ,\ \underset{\leftarrow}{X}^{1}\odot\underset{\rightarrow}{X})$ a même loi que le couple $(\underset{\leftarrow}{X}\ ,\ \underset{\rightarrow}{X})$ sous $\mathbb{P}(.\,|X(\zeta)>0)$. Il ne reste plus qu'à conditionner par $\zeta=1$ pour obtenir le corollaire. □

Remarques. 1- On peut aussi prouver l'identité $\underset{\leftarrow}{X}\odot\underset{\rightarrow}{X}\overset{\mathcal{L}}{=}BES(3)$ sous $\mathbb{P}^{1}$ en montrant d'abord que sous $\mathbb{P}^{1}$, $\underset{\leftarrow}{X}\overset{\mathcal{L}}{=}((X-2\underline{X})_t\ ,\ 0\le t<\rho)$, puis en appliquant le théorème de Pitman.

2- On notera qu'on peut reconstruire X à partir de $\underset{\leftarrow}{X}\odot\underset{\rightarrow}{X}$, χ et $\mathrm{sgn}(X(1))$.

c) Pont brownien : Notons $P=\mathbb{P}^{1}(\cdot\,|X(1)=0)$, la loi du pont brownien. Nous donnons tout d'abord la version conditionnelle du théorème:

Corollaire 3. *L'énoncé du théorème reste vrai quand on remplace* $\mathbb{P}^{t}$ *par* P.

Preuve : Remarquons que le couple des valeurs prises par $X \circ \alpha^+$ et $X \circ \alpha^-$ en leurs temps de mort respectifs est $(X(\zeta), 0)$ si $X(\zeta) \geq 0$, et $(0, X(\zeta))$ si $X(\zeta) \leq 0$. Par conséquent $X(\zeta) = Y^+(A^+(\zeta)) + Y^-(A^-(\zeta))$. D'autre part, on a également $X(\zeta) = \underset{\rightarrow}{X}(\zeta-\rho) - \underset{\leftarrow}{X}(\rho)$. D'après le théorème, sous $\mathbb{P}^t$, $(\underset{\rightarrow}{X} , \underset{\leftarrow}{X} , X(\zeta))$ et $(Y^+ , -Y^- , X(\zeta))$ ont donc même loi. Il ne reste qu'à conditionner par $X(\zeta) = 0$. □

Remarque. Les processus $X \circ \alpha^+$ et $X \circ \alpha^-$ étant P - p.s. tous deux nuls en leurs temps de mort respectifs, on a

$$\frac{1}{2} L \circ \alpha^+(t) = \inf\{Y^+(s) : t \leq s < A^+(1)\} ,$$

$$-\frac{1}{2} L \circ \alpha^-(t) = \sup\{Y^-(s) : t \leq s < A^-(1)\}.$$

La version conditionnelle du corollaire 2 complète un résultat de Vervaat [15] qui donne une construction de l'excursion brownienne normalisée à partir du pont brownien (voir également Biane [1]). Ici, on obtient un méandre brownien à partir du pont brownien en notant que formellement, le méandre est un BES(3) sur l'intervalle de temps [0,1] conditionné par $X(1) = \underline{\underline{X}}(1)$ (voir [3, théorème 1]). Nous renvoyons le lecteur à Biane-Yor ([2] et [3]) pour plus d'informations sur le méandre.

Corollaire 4. *Avec les mêmes notations que dans le théorème 2 , sous* P , $\underset{\leftarrow}{X} \odot \underset{\rightarrow}{X}$ *est un méandre brownien.*

Preuve. On note d'abord que sous P , $(-X \circ \alpha^-) \odot (X \circ \alpha^+)$ est la valeur absolue d'un pont brownien, et que son temps local standard en 0 est $(\frac{1}{2}L \circ \alpha^-) \odot (\frac{1}{2}L \circ \alpha^+)$. Il suffit ensuite d'appliquer l'analogue du théorème de Pitman pour le méandre [3, théorème 8]. □

Remarques. 1- On peut reconstruire X à partir de $\underset{\leftarrow}{X} \odot \underset{\rightarrow}{X}$ en notant que $\rho = \sup\{t : \underset{\leftarrow}{X} \odot \underset{\rightarrow}{X}(t) = \frac{1}{2} \underset{\leftarrow}{X} \odot \underset{\rightarrow}{X}(1) \}$ P - p.s.

2- On peut aussi établir le corollaire 4 à l'aide du théorème 2.16 de Bismut [5] et du théorème 1 de Biane-Yor [3].

Remerciements. Ce travail a été en partie effectué durant une visite à l'Université de Floride, et a bénéficié des commentaires de J. Glover. Le corollaire 2 a été obtenu suite à une discussion avec M. Yor.

REFERENCES

[1] Ph. BIANE : Relations entre pont brownien et excursion normalisée du mouvement brownien. *Annales de l'I.H.P., vol.22-1 , p.1-7 (1986).*

[2] Ph. BIANE et M. YOR : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. *Bull. Sc. Math., 2^e série, 111, p.23-101 (1987).*

[3] Ph. BIANE et M. YOR : Quelques précisions sur le méandre brownien. *Bull. Sc. Math., 2^e série, 112, p.101-109 (1988).*

[4] N.H. BINGHAM and R.A. DONEY : On higher-dimensional analogues of the arc-sine law. *J. Appl. Prob. 25, p.120-131 (1988).*

[5] J.M. BISMUT : Last exit decompositions and regularity at the boundary of transition probabilities. Z. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 69, p.65-98 (1985).*

[6] R.A. DONEY and D.R. GREY : Some remarks on Brownian motion with drift. *J. Appl. Prob. 26, p.659-663 (1989).*

[7] K. ITÔ : Poisson point processes attached to Markov processes. *Proc. 6th Berkeley Symp. on Maths. Stat. and Prob., vol. III, p.225-239 (1970).*

[8] T. JEULIN : Semi-martingales et grossissement d'une filtration. *Lect. Notes in Maths. 833, Springer-Verlag (1980).*

[9] I. KARATZAS and S.E. SHREVE : A decomposition of the Brownian path. *Statistic Probab. Letter 5-2, p.87-94 (1987).*

[10] P. LÉVY : Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Math. 7, p.283-339 (1939).*

[11] P. LÉVY : Processus stochastiques et mouvement brownien. *Gauthier-Villars (1965).*

[12] J.W. PITMAN : One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. *Adv. Appl. Prob. 7, p.511-526 (1975).*

[13] J.W. PITMAN and L.C.G. ROGERS : Markov functions. *Ann. Probab. 9-4, p.573-582 (1981).*

[14] J.W. PITMAN and M. YOR : Asymptotic laws of planar Brownian motion. *Ann. Probab. 14-4, p.733-779 (1986).*

[15] W. VERVAAT : A relation between Brownian bridge and Brownian excursion. *Ann. Probab. 7-1 , p.141-149 (1979).*

[16] D. WILLIAMS : Path decomposition and continuity of local time for one-dimensional diffusions. *Proc. London Math. Soc. 28, p.738-768 (1974).*