SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

Inégalités de Sobolev faibles : un critère Γ_2

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 234-261

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__234_0>

Inégalités de SOBOLEV faibles : un critère Γ_2

Dominique Bakry

Laboratoire de Statistiques et Probabilités, Université PAUL SABATIER,
118, route de Narbonne, 31062, TOULOUSE Cedex.

RÉSUMÉ

Une inégalité de SOBOLEV *faible est une inégalité équivalente (quoique plus précise) à une inégalité de* SOBOLEV *ordinaire. Nous utilisons un critère de courbure et dimension utilisant l'opérateur carré du champ itéré pour établir cette inégalité pour une classe de semigroupes de diffusions, incluant en particulier le semigroupe de la chaleur sur les sphères.*

0—Introduction.

Sur un espace mesuré $(E, \mathcal{F}, \mu)$, considérons une forme de DIRICHLET $\mathcal{E}$ de domaine $D(\mathcal{E})$. On dit que $\mathcal{E}$ satisfait une inégalité de SOBOLEV lorsque la condition suivante est réalisée :

$$\forall f \in D(\mathcal{E}),\ \|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq c_1\|f\|_2^2 + c_2\mathcal{E}(f,f). \tag{S}$$

Dans l'expression précédente, nous avons utilisé la notation $\|f\|_p$ pour désigner la norme de f dans $\mathbf{L}^p(\mu)$, et n est un réel supérieur à 2. Dans cette inégalité, le coefficient $n > 2$ joue le rôle d'une dimension : c'est ce que VAROPOULOS a appelé dans [V] la dimension du semigroupe associé à la forme $\mathcal{E}$.

Des liens étroits existent l'inégalité de SOBOLEV (S) les majorations en temps petit du semigroupe de la chaleur associé à $\mathcal{E}$. (cf [BM], [CSK], [D], [DS] ou [V] par exemple). En fait, pour avoir des renseignements précis sur le comportement du semigroupe, tant en temps petit qu'en temps grand, ce n'est pas tant d'inégalités de SOBOLEV qu'on a besoin que d'inégalités de SOBOLEV faibles, telles qu'elles ont été définies dans [BM] (mais elles sont déjà utilisées sous une forme implicite dans le travail de DAVIES et SIMON [DSi]). Une telle inégalité peut s'écrire sous la forme suivante

$$\forall f \in D(\mathcal{E}),\ \int (f^2 \log f^2)\, d\mu - \int f^2\, d\mu \log(\int f^2\, d\mu) \leq \frac{n}{2}\|f\|_2^2 \log\{c_1 + c_2\mathcal{E}(f,f)/\|f\|_2^2\}. \qquad (SF)$$

Remarquons que, pour obtenir cette inégalité, il suffit de l'obtenir pour les fonctions de $D(\mathcal{E})$ de norme 1 dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, c'est à dire

$$\forall f \in D(\mathcal{E}),\ \|f\|_2 = 1 \ \Rightarrow\ \int (f^2 \log f^2)\, d\mu \leq \frac{n}{2} \log\{c_1 + c_2\mathcal{E}(f,f)\}.$$

En fait, il est prouvé dans [BM] que l'inégalité (SF) est une conséquence de l'inégalité (S) avec les mêmes constantes n, c_1, c_2, tandis que l'inégalité (S) peut se déduire de (SF) (lorsque $n > 2$), avec la même constante n mais avec des constantes c_1 et c_2 qui peuvent être différentes. Il est toutefois intéressant de remarquer que (SF) est définie pour tout $n \geq 1$, ce qui n'est pas le cas de (S). Dans ce qui suit, nous appelerons cette constante n qui apparait dans l'inégalité (SF) la *dimension globale* du semigroupe.

L'implication (SF)$\Rightarrow$(S) n'est pas très facile à obtenir. Elle découle des majorations sur le semigroupe obtenues à partir de (SF), ainsi que du théorème d'interpolation de MARCINKIEWIECZ. C'est pourquoi il n'est pas facile de savoir comment se déduisent les constantes c_1 et c_2 de (S) à partir des constantes c_1 et c_2 de (SF)(*).

Ce nom de *dimension* provient du cas particulier suivant : lorsque l'espace $(E, \mathcal{F}, \mu)$ est une variété riemannienne compacte de dimension p muni de la mesure de RIEMANN et que $\mathcal{E}$ est la forme de DIRICHLET associée au semigroupe de la chaleur sur E :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty,\ \mathcal{E}(f,f) = \int_E |\nabla f|^2\, d\mu,$$

alors $\mathcal{E}$ satisfait à une inégalité de SOBOLEV de dimension p, et cette valeur $n = p$ est la plus petite des valeurs possibles de n pour laquelle une inégalité de SOBOLEV (ou de SOBOLEV faible) est satisfaite.

Supposons pour simplifier que la mesure μ est une mesure de probabilité : alors, on doit avoir $c_1 \geq 1$ dans les inégalités (S) et (SF). Dans l'exemple précédent, un argument simple montre qu'on a toujours une inégalité (SF) avec dimension p et $c_1 = 1$. En fait, c'est toujours le cas dès qu'on a une inégalité de SOBOLEV faible, avec $c_1 \geq 1$, et en plus un "trou spectral", c'est à dire une inégalité de la forme

$$\forall f \in D(\mathcal{E}),\ \int f^2\, d\mu \leq (\int f\, d\mu)^2 + \lambda\mathcal{E}(f,f), \quad (\lambda > 0), \quad (\text{cf [BM]}).$$

(*) Nous aimerions bien avoir une preuve directe de cette implication $(SF) \Rightarrow (S)$: en particulier nous ne savons pas à l'heure actuelle s'il est nécessaire pour avoir l'équivalence que $\mathcal{E}$ soit une forme de DIRICHLET.

Dans le cas où la forme de DIRICHLET est associée à un semigroupe de diffusion, avec $\mu(E) = 1$ et $c_1 = 1$, (c'est à dire que la constante c_1 est optimale), alors l'inégalité (SF) donne non seulement des majorations sur le semigroupe, mais également des minorations, et il est prouvé dans [BM] une relation entre la constante c_2 et le diamètre de E (qui est défini à partir de la forme de DIRICHLET elle même) :

$$4\mathrm{diam}(E)^2 \leq n^2\pi^2 c_2. \tag{D}$$

Dans [BE], une autre notion de dimension est introduite pour des semigroupes de diffusion : cette *dimension locale* est une notion définie à partir de l'opérateur carré du champ itéré : elle est locale en ce sens qu'il suffit, pour la calculer au point x de E, de se donner le générateur du semigroupe associé à $\mathcal{E}$ dans un voisinage de x (contrairement à la dimension de VAROPOULOS qui se calcule en connaissant toute la forme de DIRICHLET sur E)(**). Cette dimension est à nouveau identique à la dimension géométrique p dans le cas du semigroupe de la chaleur sur une variété riemannienne compacte.

Dans le cas général, cette définition de la *dimension locale* est inséparable de la notion de *courbure de* RICCI associée au semigroupe de diffusion, et qui prolonge la notion de courbure de RICCI habituellle en géométrie riemannienne lorque le semigroupe considéré est le semigroupe de la chaleur. Nous donnerons dans le prochain chapitre des définitions précises de ces courbures et dimensions associées à un semigroupe de diffusion général.

On trouve dans [BE2] le résultat suivant : si un semigroupe symétrique admet une dimension locale finie n et une courbure de RICCI minorée par une constante $\rho > 0$, alors la forme de DIRICHLET associée satisfait à une inégalité de SOBOLEV (S) : le seul problème dans ce cas est que la *dimension globale* m (celle associée à l'inégalité (S)) n'est pas égale à la *dimension locale* n : les auteurs obtiennent $m = (4n^2 + 2)/(4n - 1) > n$.

L'un des buts de cet article est de montrer que, quitte à remplacer l'inégalité de SOBOLEV (S) par l'inégalité de SOBOLEV faible (SF), on peut identifier *dimension locale* et *dimension globale* : plus précisément, sous les hypothèses de [BE2], on obtient une inégalité de SOBOLEV faible, avec une dimension globale n égale à la dimension locale, avec une constante c_1 optimale (c'est à dire $c_1 = 1$ lorsque $\mu(E) = 1$).

En fait, toujours sous les hypothèses de [BE2], nous obtenons toute une famille d'inégalités de SOBOLEV faibles, dépendant continuement d'un paramètre α qui varie dans un intervalle $[1, \alpha_0]$, avec une dimension globale $n(\alpha)$ et des constantes $c_1(\alpha) = 1$ (lorsque $\mu(E) = 1$) et $c_2(\alpha)$ dépendant de α, ρ et n. Pour $\alpha = 1$, on a $n(\alpha) = n$, et l'inégalité de SOBOLEV faible a une dimension optimale, tandis que pour $\alpha = \alpha_0$, l'inégalité obtenue entraîne une inégalité de SOBOLEV logarithmique optimale.

En particulier, ces résultats s'appliquent au semigroupe de la chaleur sur une variété riemannienne dont la courbure de RICCI est minorée par une constante $\rho > 0$. L'inégalité de SOBOLEV faible que nous obtenons est alors meilleure que celle qu'on peut déduire directement de l'inégalité de SOBOLEV : en effet, T.AUBIN a montré que, sous les mêmes conditions que [BE2], mais en se restreignant au cas des variétés riemanniennes,

(**) En fait, cette dimension pourrait éventuellement varier d'un point à un autre : nous nous restreindrons ici au cas des dimensions constantes.

l'inégalité de SOBOLEV optimale est obtenue pour les sphères de courbure de RICCI ρ. Pour la sphère de rayon 1 dans $\mathcal{R}^{n+1}$, dont on a normalisé le volume pour en faire une probabilité, la constante ρ vaut $n-1$ et l'inégalité de SOBOLEV optimale s'écrit

$$\forall f \in D(\mathcal{E}),\ \|f\|^2_{\frac{2n}{n-2}} \leq \|f\|_2^2 + \frac{4}{n(n-2)}\mathcal{E}(f,f).$$

L'inégalité de SOBOLEV faible que nous obtenons dans ce cas s'écrit

$$\forall f \in D(\mathcal{E}),\ \|f\|_2 = 1 \ \Rightarrow\ \int (f^2 \log f^2)\, d\mu \leq \frac{n}{2}\log\{1 + \frac{4}{n(n-1)}\mathcal{E}(f,f)\}.$$

En combinant notre résultat avec l'inégalité (D) de [BM], on obtient ainsi une version purement "semigroupes markoviens" du théorème de MYERS : si une variété riemannienne admet une courbure de RICCI minorée par $\rho > 0$, alors son diamètre est fini.

En fait, le résultat que nous obtenons ainsi est plus faible que le théorème de MYERS, qui précise qu'en plus le diamètre est majoré par celui de la sphère de courbure de RICCI ρ. Pour chaque valeur du paramètre α dans notre famille d'inégalités de SOBOLEV faible, nous obtenons une majoration du diamètre. La meilleure majoration ainsi obtenue n'est pas explicite (il faudrait pour cela savoir résoudre une équation algébrique de degré 6 qui n'a pas de racines évidentes). Néammoins, un argument simple de [BM] permet de voir que, pour les sphères, l'inégalité (D) est toujours stricte, quelle que soit l'inégalité de SOBOLEV faible dont on parte.

La méthode que nous utilisons est très proche de celle de [BE] et de [BE2]. C'est essentiellement un raffinement de la méthode utilisée dans [BE] pour obtenir des inégalités de SOBOLEV logarithmiques. Malheureusement, pour passer de la dimension globale $m > n$ de [BE2] à la dimension globale n dans l'inégalité de SOBOLEV faible, il a fallu faire des calculs sensiblement plus compliqués. Il n'est pas exclu que ce même type de raffinements permette également d'utiliser la méthode de [BE2] pour obtenir des inégalités de SOBOLEV ordinaires avec la bonne dimension, et des constantes c_1 et c_2 explicites. Nous n'y sommes pas arrivés.

1— La courbure et la dimension locale des semigroupes de diffusion.

A) Définitions.

Commençons par préciser le cadre dans lequel nous allons travailler : nous nous plaçons dans une situation plus concrète que celle de [BE2] : le gain de généralité qu'on aurait à travailler dans le cadre abstrait de [BE2] nous a semblé illusoire. Dans toute la suite, nous supposerons donc que l'espace E sur lequel nous travaillons est une variété connexe de classe $\mathcal{C}^\infty$. On se donne sur E une mesure de probabilité μ à densité $\mathcal{C}^\infty$. Cette mesure sera fixée dans toute la suite et on notera $\langle f\rangle = \int f\,d\mu$ et $\langle f,g\rangle = \int fg\,d\mu$. La norme d'une fonction f dans $\mathbf{L}^p(\mu)$ sera notée $\|f\|_p$.

La donnée fondamentale est celle d'un semigroupe de MARKOV $\mathbf{P}_t$ sur E, contractant et fortement continu sur $\mathbf{L}^2(\mu)$: ce semigroupe se représente par des noyaux $\mathbf{p}_t(x,dy)$:

$$\mathbf{P}_t f(x) = \int f(y)\,\mathbf{p}_t(x,dy), \text{ avec}$$

$$\forall x,\ \int \mathbf{p}_t(x,dy) = 1,\ \int_y \mathbf{p}_t(x,dy)\mathbf{p}_s(y,dz) = \mathbf{p}_{t+s}(x,dz),$$

$$\|\mathbf{P}_t f\|_2 \le \|f\|_2, \text{ et } \mathbf{P}_t(f) \underset{t\to 0}{\to} f \text{ (dans} \mathbf{L}^2(\mu)).$$

On dira que μ est une mesure symétrique pour $\mathbf{P}_t$ si l'on a

$$\forall (f,g) \in \mathbf{L}^2(\mu),\ \langle \mathbf{P}_t f, g\rangle = \langle f, \mathbf{P}_t g\rangle,$$

et que μ est invariante pour $\mathbf{P}_t$ si l'on a

$$\forall f \in \mathbf{L}^1(\mu), \langle \mathbf{P}_t f\rangle = \langle f\rangle.$$

Il est bien connu que si μ est invariante, alors $\mathbf{P}_t$ est une contraction dans tous les espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$, $1 \le p \le \infty$, et que si μ est symétrique alors elle est invariante. On appellera $\mathbf{L}$ le générateur de $\mathbf{P}_t$ et $D(\mathbf{L})$ son domaine dans $\mathbf{L}^2(\mu)$:

$$\mathbf{L}f := \lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{P}_t f - f}{t},$$

$D(\mathbf{L})$ étant l'espace des fonctions pour lesquelles cette limite existe dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Nous supposerons que l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur E est inclus dans $D(\mathbf{L})$, et que, pour de telles fonctions, $\mathbf{L}$ coincide avec un opérateur différentiel d'ordre 2, elliptique et sans terme constant : c'est la traduction dans notre contexte de l'hypothèse de diffusion de [BE2].

Dans un système de coordonnées locales (x^i), l'opérateur $\mathbf{L}$ s'écrit donc

$$\mathbf{L} = \sum_{ij} g^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_i b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Cette écriture permet de définir l'opérateur $\mathbf{L}$ pour toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E, y compris celles qui ne sont pas dans le domaine $D(\mathbf{L})$.

La matrice (g^{ij}) étant non dégénérée, elle admet un inverse (g_{ij}) qui nous donne sur E une structure riemannienne. Cette structure riemannienne n'est absolument pas essentielle pour la suite, car tous les objets que nous allons considérer (courbure de RICCI de $\mathbf{L}$, dimension, diamètre de E, etc) se construisent à partir de l'opérateur $\mathbf{L}$ directement, sans utiliser cette structure. Néammoins, il est très utile de l'introduire pour faire les calculs, et cela nous permettra d'y voir plus clair.

On appelle ∇ la connexion riemannienne, c'est à dire, dans un système de coordonnées locales, pour une forme ω de coordonnées ω_i,

$$\nabla_i \omega_j = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\omega_k,$$

où les coefficients Γ^j_{ik} valent

$$2\Gamma^k_{ij} = \sum_l g^{kl}(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^k}g_{ij}).$$

Nous écrirons $\nabla_i f$ pour $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Ceci nous permet de décomposer $\mathbf{L}$ sous la forme $\mathbf{L} = \Delta + X$, avec $\Delta f = \sum_{ij} g^{ij}\nabla_i\nabla_j f$ et $Xf = \sum_i X^i \nabla_i f$. L'opérateur Δ est le laplacien associé à la structure riemannienne, et X est un champ de vecteurs.

Désignons par dm la mesure riemannienne $dm = \sqrt{\det(g_{ij})}dx^1\cdots dx^p$: alors la mesure μ s'écrit $d\mu = \exp h(x)dm$, où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Lorsque μ est une mesure symétrique pour le semigroupe $\mathbf{P}_t$, alors X est le champ de vecteurs ∇h : $X^i = \sum_{ij} g^{ij}\nabla_j h$.

Dans toute la suite, nous ne nous servirons en fait que de ce dernier cas, mais les définitions que nous allons donner s'appliquent aussi bien au cas général. Pour reprendre les notations de [BE], l'opérateur carré du champ est défini par

$$2\Gamma(f,g) = \mathbf{L}(fg) - f\mathbf{L}g - g\mathbf{L}f.$$

On peut l'écrire sous la forme $\Gamma(f,g) = \sum_{ij} g^{ij}\nabla_i f \nabla_j g$: on voit sur cette expression que $\forall f$, $\Gamma(f,f) \geq 0$, et que $\Gamma(f,f) = 0 \Rightarrow f =$ constante.

L'opérateur carré du champ itéré Γ_2 est défini, pour des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, par

$$2\Gamma_2(f,g) = \mathbf{L}\Gamma(f,g) - \Gamma(f,\mathbf{L}g) - \Gamma(g,\mathbf{L}f).$$

Bien que cet opérateur soit défini de façon entièrement algébrique à partir de $\mathbf{L}$, le calcul de l'opérateur Γ_2 dans un système de coordonnées locales fait intervenir le tenseur de courbure de RICCI de la structure riemannienne.

Commençons donc par introduire le tenseur de courbure de la connection ∇ : c'est un tenseur à 4 indices $R_{ij}{}^k{}_l$ qui vérifie l'identité, valable pour tout champ de vecteurs Y,

$$[\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i]Y^k = \sum_l R_{ij}{}^k{}_l Y^l.$$

Le tenseur de RICCI de la structure riemannienne vaut

$$\mathrm{Ric}_{il} = \sum_j R_i j^j{}_l.$$

C'est un tenseur symétrique en ses deux indices il. Introduissons le tenseur $\nabla^s X$ (dérivée covariante symétrique de X)

$$2\nabla^s X = \sum_l g_{jl}\nabla_i X^l + g_{il}\nabla_j X^l.$$

Nous appellerons tenseur de RICCI de $\mathbf{L}$ le tenseur

$$\mathrm{Ric}(\mathbf{L})^{ij} = \sum_{kl} g^{ik}g^{jl}[\mathrm{Ric}_{kl} - \nabla^s X_{kl}].$$

Avec ces notations, l'opérateur Γ_2 vaut

$$\Gamma_2(f,f) = \|\nabla\nabla f\|^2 + \mathrm{Ric}(\mathbf{L})(\nabla f, \nabla f),$$

où $\|\nabla\nabla f\|$ désigne la norme de HILBERT-SCHMIDT du tenseur $\nabla\nabla f$,

$$\|\nabla\nabla f\|^2 = \sum_{ijkl} g^{ik}g^{jl}\nabla_i\nabla_j f \nabla_k \nabla_l f,$$

et où $\mathrm{Ric}(\mathbf{L})(\nabla f, \nabla f)$ désigne $\sum_{ij} \mathrm{Ric}(\mathbf{L})^{ij}\nabla_i f \nabla_j f$. Nous renvoyons le lecteur à [BE] ou [B1] pour les détails.

Cet opérateur Γ_2 nous permet d'associer une courbure et une dimension à l'opérateur $\mathbf{L}$: dans ce contexte, ces deux notions sont indissociables, c'est à dire qu'on ne peut pas définir la dimension (locale) de $\mathbf{L}$ sans lui avoir auparavant associé une courbure. Il faut remarquer que, pour un opérateur agissant sur un intervalle de la droite réelle, cette courbure peut être non nulle, situation qui ne se produira jamais en géométrie riemannienne.

Définition.—*Étant données deux constantes $n \geq 1$ et ρ, nous dirons que le couple (n, ρ) est un couple (dimension, courbure) admissible pour $\mathbf{L}$ si, pour toutes les fonctions f C^∞ sur E, l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\Gamma_2(f,f) \geq \rho\Gamma(f,f) + \frac{1}{n}(\mathbf{L}f)^2.$$

On trouve dans [B1] la propriété suivante

Proposition 1.1.—Si l'on écrit $\mathbf{L}$ sous la forme $\Delta + X$, le couple (n, ρ) est admissible pour $(\mathbf{L})$ si et seulement si $n \geq p$ et

$$X \otimes X \leq (n-p)(\mathrm{Ric}(\mathbf{L}) - \rho g), \tag{CD}$$

l'inégalité ayant lieu au sens des tenseurs symétriques.

En d'autres termes, l'inégalité (CD) signifie que, dans un système de coordonnées locales, la matrice symétrique

$$\{(n-p)(\mathrm{Ric}(\mathbf{L})^{ij} - \rho g^{ij}) - X^i X^j\}$$

est positive.

Un tel couple (n, ρ) n'est pas unique, et on ne peut en général pas en trouver un meilleur que les autres, c'est à dire un couple (n_0, ρ_0) tel que, pour tout couple admissible (n, ρ), on ait $n \geq n_0$ et $\rho \leq \rho_0$.

C'est cependant le cas pour les laplaciens, (c'est à dire pour les opérateurs $\mathbf{L}$ tels que $X = 0$ dans la décomposition canonique) : pour ceux-ci, dire qu'un tel couple (n, ρ) existe revient à dire que la courbure de RICCI est minorée, et, si l'on appelle ρ_0 la borne inférieure du tenseur de RICCI, c'est à dire la plus grande constante ρ telle que $\mathrm{Ric} - \rho g \geq 0$, alors le couple (n, ρ) est admissible si et seulement si $n \geq p$ et $\rho \leq \rho_0$.

Les laplaciens ne sont pas les seuls opérateurs pour lesquels il y a un couple admissible optimal : dans [B1], nous avons appelé *quasilaplaciens* de tels opérateurs, et nous en verrons un exemple plus bas. Néammoins, les laplaciens sont les seuls pour lesquels la dimension locale n coincide avec la dimension géométrique p, comme cela se voit immédiatement sur la formule (CD).

Enfin, nous allons faire une hypothèse technique qui va considérablement nous simplifier la tâche : nous supposons l'existence d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions bornées, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E, stable par $\mathbf{L}$ et par le semigroupe $\mathbf{P}_t$, contenant les constantes et dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Cette algèbre est alors dense dans tous les espaces $\mathbf{L}^p(\mu)$, pour tout $1 \leq p < \infty$. A priori, cette hypothèse semble nous restreindre au cas où E est une variété compacte, auquel cas nous prendrons pour $\mathcal{A}$ la classe $\mathcal{C}^\infty(E)$. Nous verrons plus bas un exemple où ce n'est pas le cas.

Cette hypothèse technique n'est en fait pas essentielle. Nous pourrions refaire tout le travail en supposant par exemple que la variété riemannienne est complète, auquel cas les fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sont denses dans le $\mathbf{L}^2(\mu)$-domaine du générateur du semigroupe. Ceci nous compliquerait les calculs de façon inutile, puisqu'à la fin nous obtiendrons comme sous-produit de nos hypothèses que le diamètre est fini, et qu'en fait notre variété E de départ était compacte. Par contre, dans l'exemple du chapitre 3, nous travaillerons sur une variété à bord (la structure riemannienne sera celle d'une demi-sphère dans $\mathcal{R}^p$), où nos hypothèses s'appliqueront au semigroupe réfléchi au bord, donc dans une situation de variété non complète. Nous ne savons pas à l'heure actuelle si notre méthode s'applique dans le cas général des variétés à bord, pour le semigroupe réfléchi (conditions de NEUMANN).

B) Le lemme fondamental.

On s'intéresse désormais à un semigroupe sur une variété $\mathbf{E}$ de dimension p, dont le générateur $\mathbf{L}$ est un opérateur différentiel elliptique du second ordre sans terme constant, à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il satisfait à une inégalité de courbure et dimension

$$\forall f \in \mathcal{A},\ \Gamma_2(f,f) \geq \frac{1}{n}(\mathbf{L}f)^2 + \rho\Gamma(f,f), \tag{1.1}$$

où $n \geq 1$ et $\rho > 0$ sont deux constantes. Dans cette partie, l'hypothèse de symétrie n'est pas essentielle, et on peut donc supposer que $\mathbf{L}$ est sous sa forme générique $\mathbf{L} = \Delta + X$, X étant un champ de vecteurs quelquonque.

C'est dans l'établissement de la proposition suivante (qui est le lemme fondamental pour tout ce qui va suivre) que se trouve la différence essentielle entre nos calculs et ceux de [BE2] : on trouve dans [BE2] un résultat analogue quoique moins compliqué, établi uniquement à partir de considérations algébriques sur l'opérateur Γ_2 et la formule du changement de variables. Pour améliorer la *dimension* des inégalités de SOBOLEV de [BE2], nous avons été amenés à établir un lemme un peu plus général : nous nous servirons pour l'établir de la forme explicite de $\mathbf{L}$, et nous n'avons pas essayé de l'obtenir par des moyens purement algébriques. Les calculs sont déjà assez compliqués comme cela.

Proposition 1.2.—Considérons 8 fonctions α, β, γ, δ, ε, ζ, η, et θ définies sur $\mathbf{E}$ à valeurs réelles, satisfaisant aux conditions suivantes :
(1) $\alpha > 0$, $\varepsilon \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\alpha + n\gamma \geq 0$, et $\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2 \geq 0$;
(2) $\alpha(\beta + n\delta)^2 \leq (\alpha + n\gamma)[\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2]$;
(3) $\eta[\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2] \geq \alpha n\zeta^2$.
(4) $\theta = \dfrac{-\alpha\zeta(\beta + n\delta)}{\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2}$ sur $\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2 > 0$.

Alors, pour toute fonction g sur $\mathbf{E}$, et pour toute fonction f dans $\mathcal{A}$, on a

$$\begin{gathered}\alpha g^2[\Gamma_2(f,f) - \rho\Gamma(f,f)] - \beta g\Gamma(f,\Gamma(f,f)) + \gamma g^2(\mathbf{L}f)^2 \\ -2\delta g\mathbf{L}f\Gamma(f,f) - 2\zeta g^2\Gamma(f,f) + \varepsilon\Gamma(f,f)^2 - 2\theta g^3\mathbf{L}f + \eta g^4 \geq 0.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Preuve. Nous faisons la démonstration dans le cas où $\mathbf{L}$ n'est pas un laplacien et où l'on a $n > p$. La démonstration pour le cas $n = p$ est beaucoup plus simple.

Remarquons tout d'abord que si $\alpha + n\gamma > 0$, la condition (2) impose $\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2 \geq 0$. Il en va de même si $\eta > 0$, grâce à la condition (3).

Ensuite, pour des raisons d'homogénéïté évidentes, on peut se ramener au cas $g = 1$. D'autre part, les conditions qui relient les coefficients restent inchangées lorsqu'on remplace ζ par $|\zeta|$; la fonction $\Gamma(f,f)$ étant positive, on voit donc qu'il suffit de se ramener au cas où la fonction ζ est positive.

Plaçons nous en un point x de $\mathbf{E}$. Nous munissons l'espace tangent $T_x(\mathbf{E})$ de la structure euclidienne associée à la métrique riemannienne, et nous noterons $U.V$ le produit scalaire de deux vecteurs U et V de $T_x(\mathbf{E})$; de même, nous noterons $\|U\|$

la norme euclidienne du vecteur U. Nous identifions le tenseur $\mathrm{Ric}(\mathbf{L})$ à une forme quadratique sur $T_x(\mathbf{E})$. La fonction f étant fixée, nous posons :

$$Y = \nabla f(x);\ M = \nabla\nabla f(x);\ t = \mathrm{tr}(M); A = \mathrm{Ric}(\mathbf{L}).$$

Nous identifions également M à une forme quadratique sur $T_x(\mathbf{E})$. Nous noterons $\|M\|$ la norme de HILBERT-SCHMIDT de M, c'est à dire que $\|M\|^2$ est la somme des carrés des valeurs propres de M. Avec ces notations, on a

$$\Gamma(f,f) = \|Y\|^2;\ \Gamma_2(f,f) = \|M\|^2 + A(Y,Y);\ \Gamma(f,\Gamma(f,f)) = 2M(Y,Y);\ \mathbf{L}(f) = t + X.Y.$$

Dès lors, l'inégalité (1.1) peut s'écrire, pour $g = 1$,

$$\begin{aligned} E = \quad & \alpha\|M\|^2 + A(Y,Y)) - 2\beta M(Y,Y) + \gamma(t+Y.X)^2 - 2\delta(t+Y.X)\|Y\|^2 \\ & -2\zeta\|Y\|^2 + \varepsilon\|Y\|^4 - 2\theta(t+Y.X) + \eta \geq 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

La condition (1.1) sur $\mathbf{L}$ s'écrit

$$A(Y,Y) \geq \frac{1}{n-p}(Y.X)^2,$$

et notre résultat sera dès lors une conséquence immédiate du lemme suivant :

Lemme 1.3.—Soit p un entier fixé et n un réel supérieur à p. Soient α, β, γ, δ, ε, ζ, η, θ des réels satisfaisant aux conditions de la proposition (1.1). Alors, pour tous les vecteurs X et Y de l'espace euclidien $\mathcal{R}^p$, pour toute matrice symétrique M d'ordre p et de trace t, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} & \alpha(\|M\|^2 + \tfrac{1}{n-p}(Y.X)^2) - 2\beta{}^tYMY + \gamma(t+Y.X)^2 - 2\delta(t+Y.X)\|Y\|^2 \\ & \qquad -2\zeta\|Y\|^2 + \varepsilon\|Y\|^4 - 2\theta(t+Y.X) + \eta \geq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Remarque.—

Dans le cas où $\mathbf{L}$ est un laplacien ($X = 0$), la condition s'écrit

$$\|M\|^2 - 2\beta{}^tYMY + \gamma t^2 - 2\delta t\|Y\|^2 - 2\zeta\|Y\|^2 + \varepsilon\|Y\|^4 - 2\theta t + \eta \geq 0. \tag{1.5}$$

Preuve. Appelons E l'expression à minorer. Nous commençons par écrire $M = \hat{M} + \frac{t}{p}I$, où I est la matrice identité, de sorte que $\hat{M}$ est une matrice carrée symétrique de trace nulle. On a alors $\|M\|^2 = \|\hat{M}\|^2 + \frac{t^2}{p}$ et ${}^tYMY = \frac{t}{p}\|Y\|^2 + {}^tY\hat{M}Y$. L'expression E s'écrit alors comme un polynôme du second degré en t, dont le coefficient du terme en t^2 s'écrit $(\frac{\alpha}{p} + \gamma) \geq 0$. Pour démontrer que notre expression est positive, il suffit donc d'établir que son discriminant est négatif. Cela s'écrit

$$\begin{aligned} E_2 = & 2(n-p)\beta p(\alpha + p\gamma){}^tY\hat{M}Y \\ & -p(n-p)\alpha(\alpha+p\gamma)\|\hat{M}\|^2\|Y\|^4((\beta+p\delta)^2 - \varepsilon p(\alpha+p\gamma)) \\ & +2p(n-p)\|Y\|^2((\delta\alpha - \gamma\beta)Y.X + \theta(\beta+p\delta) + \zeta(\alpha+p\gamma)) \\ & -p\{\alpha(\alpha+n\gamma)(Y.X)^2 + (n-p)(\eta(\alpha+p\gamma) - p\theta^2)\} \leq 0. \end{aligned}$$

Dans le cas des laplaciens, la quantité E_2 doit être remplacée par

$$\begin{aligned}E_2 =&2\beta p(\alpha+p\gamma)^tY\hat{M}Y - p\alpha(\alpha+p\gamma)\|\hat{M}\|^2\|Y\|^4\left((\beta+p\delta)^2-\varepsilon p(\alpha+p\gamma)\right)\\&+2p\|Y\|^2\left(\theta(\beta+p\delta)+\zeta(\alpha+p\gamma)\right)\\&-p\left\{(\eta(\alpha+p\gamma)-p\theta^2\right\}\le 0.\end{aligned}$$

Or, pour toute matrice de trace nulle $\hat{M}$ sur $\mathcal{R}^p$, on a

$$|^tY\hat{M}Y| \le \sqrt{\frac{p-1}{p}}\|\hat{M}\|\|Y\|^2. \tag{1.6}$$

En effet, si l'on désigne par λ_i les valeurs propres de $\hat{M}$, et Y_i les composantes de Y dans une base orthonormée qui diagonalise $\hat{M}$, on a

$$|^tY\hat{M}Y| = |\sum_i \lambda_i Y_i^2| \le \sup_i|\lambda_i|\|Y\|^2. \tag{1.7}$$

D'autre part, puisque $\hat{M}$ est de trace nulle, on a $\sum_i \lambda_i = 0$; donc

$$|\lambda_1|^2 = |-\sum_{i=2}^p \lambda_i|^2 \le (p-1)\sum_{i=2}^p \lambda_i^2,$$

d'où l'on tire, en ajoutant $(p-1)\lambda_1^2$ aux deux membres de cette inégalité,

$$p|\lambda_1|^2 \le (p-1)\sum_i \lambda_i^2 = (p-1)\|\hat{M}\|^2.$$

Ce qu'on a fait avec λ_1, on peut bien sûr le répéter avec chacun des λ_i, et l'on obtient ainsi

$$\sup_i|\lambda_i|^2 \le \frac{p-1}{p}\|\hat{M}\|^2.$$

Combinée avec (1.7), ceci nous donne (1.6).

Finalement, dans l'expression E_2, nous pouvons maintenant majorer le terme $2(n-p)\beta p(\alpha+p\gamma)^tY\hat{M}Y$ par $2(n-p)|\beta|p(\alpha+p\gamma)\sqrt{\frac{p-1}{p}}\|\hat{M}\|\|Y\|^2$, et il nous reste à majorer une expression du second degré en $\|\hat{M}\|$. Le coefficient dominant de cette expression vaut $-p(n-p)\alpha(\alpha+p\gamma)\le 0$.On est à nouveau ramenés à vérifier qu'un certain discriminant est négatif : ce discriminant s'écrit $-(n-p)(\alpha+p\gamma)p^2E_3$, où E_3 vaut

$$\begin{aligned}E_3 = &\alpha^2(\alpha+n\gamma)(Y.X)^2 + 2\alpha(n-p)Y.X[(\beta\gamma-\delta\alpha)\|Y\|^2-\theta\alpha]\\&+(n-p)c(\|Y\|^2;p,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta).\end{aligned}$$

L'expression $c(x;p,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta)$ est un polynôme du second degré en x qui vaut

$$c_0(p,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)x^2 - 2x\alpha[\zeta(\alpha+p\gamma)+\theta(p\delta+\beta)] + \alpha[\eta(\alpha+p\gamma)-p\theta^2],$$

le coefficient c_0 étant lui même égal à

$$c_0(p,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = \varepsilon\alpha(\alpha+p\gamma) - \beta^2[\alpha+(p-1)\gamma] - \delta\alpha(p\delta+2\beta).$$

Dans ce qui suit, nous oublierons la dépendance de la fonction $c(x;p,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta)$ en $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta$, et nous noterons simplement $c(x;p)$: remarquons cependant que la dimension"analytique" n n'y apparait pas; seule intervient la dimension "géométrique" p.

L'expression E_2 est donc positive dès qu'il en est de même de E_3. Dans le cas des laplaciens, nous obtenons tout simplement comme condition

$$c(\|Y\|^2;p,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta) \geq 0.$$

Une fois de plus, l'expression E_3 est une expression du second degré en la variable $z = Y.X$, dont le coefficient du terme dominant est positif par hypothèse. Une fois de plus, pour vérifier qu'elle est positive, il suffit de s'assurer que son discriminant est négatif. Cela s'écrit, après un calcul un peu pénible, *

$$\alpha^2(n-p)(\alpha+p\gamma)c(\|Y\|^2;n) \geq 0.$$

C'est à dire que, si l'on compare les conditions sur les coefficients $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\theta$ pour que cette expression soit positive pour tout Y, la condition que l'on obtient pour l'opérateur $\Delta+X$ est exactement la condition qu'on aurait obtenue pour le laplacien Δ, *à condition de remplacer la dimension géométrique par la dimension analytique.* (C'est le "miracle Γ_2".)

À partir de maintenant, il n'y a plus de différence entre le calcul pour les laplaciens et le calcul général.

Il ne nous reste plus pour terminer qu'à dire que $c(x;n)$ est positif dès que le coefficient $c_0(n,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$ est positif (ce qui est la condition (2) de l'énoncé), et que le discriminant de cette expression en la variable x est négatif. Ce discriminant s'écrit $\alpha(\alpha+n\gamma)E_4$, avec

$$E_4 = \theta^2[\alpha n\varepsilon - (n-1)\beta^2] + 2\theta\alpha\zeta(\beta+n\delta) - \eta c_0(n,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) + \alpha(\alpha+n\gamma)\zeta^2.$$

À nouveau, nous obtenons une expression du second degré en θ, dont le coefficient dominant est positif d'après nos hypothèses, et la condition pour qu'il existe une valeur θ_0 pour laquelle cette expression soit négative est que son discriminant soit positif, ce qui s'écrit

$$c_0(n,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)\{\eta[\alpha n\varepsilon - (n-1)\beta^2] - \alpha n\zeta^2\} \geq 0.$$

Compte tenu de ce que $c_0(n,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) \geq 0$, nous obtenons exactement la condition (3) de l'énoncé. En ce qui concerne la valeur de θ pour laquelle cette inégalité est vraie, on peut prendre la demi-somme des racines de l'équation $E_4 = 0$, lorsque $\varepsilon\alpha n-(n-1)\beta^2 > 0$. D'autre part, si $\varepsilon\alpha n = (n-1)\beta^2$, alors la condition (2) de l'énoncé impose $\beta = -n\delta$,

* La vérification de ce point est laissée au lecteur. Un bon programme de calcul formel peut être utile.

et la condition (3) donne $\zeta = 0$. Dans ce cas, on voit que $c_0(n,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = 0$, et donc que $E_4 = 0$ pour toutes les valeurs de θ. $\square$

2— Inégalités de Sobolev faibles.

Le lemme que nous avons établi dans le chapitre précédent ne reposait que sur une hypothèse de courbure et dimension de l'opérateur $\mathbf{L}$. Nous ferons désormais l'hypothèse de symétrie : $\mathbf{L} = \Delta + \nabla h$: nous savons déjà que sous ces hypothèses de courbure et dimension, la fonction $e^{h(x)}$ est intégrable par rapport à la mesure de Riemann (cf [B2]). Nous prendrons comme mesure de référence la mesure μ dont la densité par rapport à la mesure riemannienne vaut $ce^{h(x)}$, où c est une constante de normalisation qui fait de μ une mesure de probabilité. Le semigroupe $\mathbf{P}_t$ est alors symétrique par rapport à μ.

La proposition suivante ne fait que reprendre un calcul de [BE].

Proposition 2.1.—Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ prenant ses valeurs dans un intervalle I de $\mathcal{R}$ et soit f une fonction de $\mathcal{A}$ prenant ses valeurs dans un compact de I. On a

$$\langle \varphi(f), \mathbf{L}f\rangle = -\langle \varphi'(f), \mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle; \tag{2.1}$$
$$\langle \varphi(f), (\mathbf{L}f)^2\rangle = \langle \varphi(f), \mathbf{\Gamma_2}(f,f)\rangle + \tfrac{3}{2}\langle \varphi'(f), \mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle + \langle \varphi''(f), \mathbf{\Gamma}^2(f,f)\rangle; \tag{2.2}$$
$$\langle \varphi(f), \mathbf{L}f, \mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle = -\langle \varphi(f), \mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle - \langle \varphi'(f), \mathbf{\Gamma}^2(f,f)\rangle. \tag{2.3}$$

Preuve. L'égalité (2.1) est classique : on écrit

$$\langle \varphi(f), \mathbf{L}f\rangle = -\langle \mathbf{\Gamma}(\varphi(f), f)\rangle = -\langle \varphi'(f), \mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle.$$

La première égalité découle de la propriété de symétrie et la seconde de la propriété de diffusion.

Pour la seconde, on écrit

$$\begin{aligned}\langle \varphi(f), (\mathbf{L}f)^2\rangle &= (\text{symétrie}) \ - \langle \mathbf{\Gamma}(\varphi(f)\mathbf{L}f, f)\rangle \\ &= (\text{diffusion}) \ - \langle \varphi(f), \mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{L}f)\rangle - \langle \mathbf{L}f, \varphi'(f)\mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle \,.\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme précédente s'écrit, d'après la définition de $\mathbf{\Gamma_2}$,

$$\begin{aligned}\langle \varphi(f), \mathbf{\Gamma_2}(f,f)\rangle - \frac{1}{2}\langle \varphi(f), \mathbf{L\Gamma}(f,f)\rangle &= \langle \varphi(f), \mathbf{\Gamma_2}(f,f)\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{\Gamma}(\varphi(f), \mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle \\ &= \langle \varphi(f), \mathbf{\Gamma_2}(f,f)\rangle + \frac{1}{2}\langle \varphi'(f), \mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle.\end{aligned}$$

Le deuxième terme s'écrit, quant à lui,

$$-\langle \mathbf{L}f, \varphi'(f)\mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle = \langle \mathbf{\Gamma}(\varphi'(f)\mathbf{\Gamma}(f,f), f)\rangle = \langle \varphi'(f), \mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle + \langle \varphi''(f), \mathbf{\Gamma}^2(f,f)\rangle.$$

La troisième identité s'écrit de la même manière :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{L}f, \varphi(f)\mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle &= -\langle \mathbf{\Gamma}(f, \varphi(f)\mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle \\ &= -\langle \varphi(f), \mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle - \langle \varphi'(f), \mathbf{\Gamma}^2(f,f)\rangle.\end{aligned}$$

□

Grâce aux identités précédentes, nous pouvons obtenir une forme intégrée de la proposition (1.1), qui sera la seule dont nous nous servirons par la suite :

Proposition 2.2.—Soit q un réel quelconque et soit f une fonction de $\mathcal{A}$, encadrée par deux constantes positives. Pour des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ vérifiant les conditions de la proposition (1.1), on a

$$\begin{aligned} & (\alpha+\gamma)\langle f^{q-1}, \mathbf{\Gamma}_2(f,f)\rangle + (2\zeta + 2\theta q - \rho\alpha)\langle f^{q-1}, \mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle \\ + \quad & (2\delta + \tfrac{3}{2}\gamma(q-1) - \beta)\langle f^{q-2}, \mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle \\ + \quad & [\gamma(q-1)(q-2) + 2\delta(q-2) + \varepsilon]\langle f^{q-3}, \mathbf{\Gamma}^2(f,f)\rangle + \eta\langle f^{q+1}\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Preuve. Dans l'expression de la proposition (1.1), prenons $g = f^{-1}$, multiplions le tout par f^{q-3}, et intégrons ceci par rapport à la mesure μ. Les identités fournies par la proposition (2.1) s'écrivent

$$\langle f^q, \mathbf{L}f\rangle = -q\langle f^{q-1}, \mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle;$$

$$\langle f^{q-1}, (\mathbf{L}f)^2\rangle =$$

$$\langle f^{q-1}, \mathbf{\Gamma}_2(f,f)\rangle + \frac{3}{2}(q-1)\langle f^{q-2}, \mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle + (q-1)(q-2)\langle f^{q-3}, \mathbf{\Gamma}^2(f,f)\rangle;$$

$$\langle f^{q-2}, \mathbf{L}f\mathbf{\Gamma}(f,f)\rangle = -\langle f^{q-2}, \mathbf{\Gamma}(f, \mathbf{\Gamma}(f,f))\rangle - (q-2)\langle f^{q-3}, \mathbf{\Gamma}^2(f,f)\rangle.$$

Il ne reste plus qu'à remplacer ces valeurs dans l'expression obtenue plus haut pour en déduire le résultat. □

On en tire une inégalité un peu plus compliquée, mais qui ne fait plus intervenir que 5 paramètres (au lieu de 8) :

Proposition 2.3.—Soient $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$ 5 réels satisfaisant aux conditions

(1) $\alpha > 0$, $\alpha + n\gamma \geq 0$ et $\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2 \geq 0$;
(2) $\alpha(\beta + n\delta)^2 \leq (\alpha + n\gamma)[\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2]$;

Alors, pour toute fonction strictement positive f sur $\mathbf{E}$ et pour tout réel q, l'inégalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned}\alpha n[\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2]\langle f^{q+1}\rangle\{(\alpha+\gamma)\langle f^{q-1}, \Gamma_2(f,f)\rangle - \rho\alpha\langle f^{q-1}, \Gamma(f,f)\rangle \\ +(2\delta + \tfrac{3}{2}\gamma(q-1) - \beta)\langle f^{q-2}, \Gamma(f,\Gamma(f,f))\rangle \\ +[\gamma(q-1)(q-2) + 2\delta(q-2) + \varepsilon)]\langle f^{q-3}, \Gamma^2(f,f)\rangle\} \geq \\ [\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2 - \alpha q(\beta + n\delta)]^2\langle f^{q-1}, \Gamma(f,f)\rangle^2.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Preuve. Il suffit évidemment de démontrer cette formule lorsque $\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2 > 0$, car dans le cas contraire les deux membres de l'inégalité sont nuls. Dans l'inégalité de la proposition (2.2), remplaçons alors θ par sa valeur $\theta = -\dfrac{\alpha\zeta(\beta + n\delta)}{\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2}$, et établissons la pour la valeur optimale de η, c'est à dire $\eta = \dfrac{\alpha n\zeta^2}{\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2}$. Pour toutes les valeurs de $\zeta \in \mathcal{R}$, nous obtenons ainsi une expression du second degré en ζ qui est positive. On obtient (2.5) en écrivant que son discriminant est négatif. □

Nous suivons toujours les calculs de [BE]. La proposition qui suit est établie dans [BE] dans le cas où l'opérateur $\mathbf{L}$ est symétrique par rapport à μ. Bien que ce soit le seul cas dans lequel nous nous en servirons, il est intéressant de remarquer qu'elle reste vraie dans le cas où la mesure μ est seulement supposée invariante, ce qui signifie pour nous que

$$\forall f \in \mathcal{A},\ \langle \mathbf{L}(f)\rangle = 0.$$

Cela ne complique pas beaucoup la situation.

Proposition 2.4.—Soit f_0 une fonction de l'algèbre $\mathcal{A}$ prenant ses valeurs dans un intervalle $\mathbf{I}$ de $\mathcal{R}$, et soit φ une fonction définie sur $\mathbf{I}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et bornée. Posons $f(t) = \mathbf{P}_t(f_0)$ et $h(t) = \langle\varphi(f(t))\rangle$. On a

(1) $\dfrac{\partial h}{\partial t} = -\langle\varphi''(f), \Gamma(f,f)\rangle$;

(2) $\dfrac{\partial^2 h}{\partial^2 t} = 2\langle\varphi''(f), \Gamma_2(f,f)\rangle + 2\langle\varphi^{(3)}(f), \Gamma(f,\Gamma(f,f))\rangle + \langle\varphi^{(4)}(f), \Gamma^2(f,f)\rangle$.

Preuve. Occupons nous tout d'abord de (1) : tout étant borné, il n'y a pas de problème de dérivation sous l'intégrale, et nous écrivons

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathbf{L}(f)\,;\ \frac{\partial\varphi(f)}{\partial t} = \varphi'(f)\mathbf{L}(f).$$

Il nous reste à voir que $\langle\varphi'(f), \mathbf{L}(f)\rangle = -\langle\varphi''(f), \Gamma(f,f)\rangle$. Cela provient de ce que la mesure μ est invariante, et donc

$$0 = \langle\mathbf{L}(\varphi(f))\rangle = \langle\varphi'(f)\mathbf{L}(f) + \varphi''(f)\Gamma(f,f)\rangle.$$

Passons à la formule (2) : on écrit

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(-\varphi''(f)\Gamma(f,f)) = -\varphi^{(3)}(f)\mathbf{L}(f)\Gamma(f,f) - 2\varphi''(f)\Gamma(f,\mathbf{L}f)\\ &= -\varphi^{(3)}(f)\mathbf{L}(f)\Gamma(f,f) + 2\varphi''(f)\Gamma_2(f,f) - \varphi''(f)\mathbf{L}(\Gamma(f,f)).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Puis nous écrivons

$$\begin{aligned}&\mathbf{L}(\varphi''(f)\Gamma(f,f))\\ =&\varphi^{(3)}\mathbf{L}(f)\Gamma(f,f) + \varphi^{(4)}(f)\Gamma^2(f,f) + \varphi''(f)\mathbf{L}(\Gamma(f,f)) + 2\varphi^{(3)}(f)\Gamma(f,\Gamma(f,f)).\end{aligned}$$

En écrivant que μ est invariante, nous obtenons $\langle \mathbf{L}\left[\varphi''(f)\Gamma(f,f)\right]\rangle = 0$, d'où

$$\begin{aligned}&-\langle\varphi^{(3)}(f),\mathbf{L}(f)\Gamma(f,f)\rangle - \langle\varphi''(f),\mathbf{L}(\Gamma(f,f))\rangle\\ =&2\langle\varphi^{(3)}(f),\Gamma(f,\Gamma(f,f))\rangle + \langle\varphi^{(4)}(f),\Gamma^2(f,f)\rangle.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Il ne reste plus qu'à écrire $\frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} = \langle\frac{\partial}{\partial t}(-\varphi''(f)\Gamma(f,f))\rangle$, puis à utiliser l'identité (2.7) dans la formule (2.6) pour obtenir le résultat. $\square$

Dans la suite, nous allons utiliser les résultats précédents avec la fonction $\varphi(x) = x\log x$. Cela vaut la peine de reformuler dans ce cas la proposition précédente :

Corollaire 2.5.—Soit f_0 une fonction de l'algèbre $\mathcal{A}$ prenant ses valeurs dans un intervalle compact de $]0,\infty[$. Posons $f(t) = \mathbf{P}_t(f_0)$ et $h(t) = \langle f(t)\log(f(t))\rangle$. On a

(1) $\frac{\partial h}{\partial t} = -\langle\frac{1}{f},\Gamma(f,f)\rangle$;

(2) $\frac{\partial^2 h}{\partial^2 t} = 2\{\langle\frac{1}{f},\Gamma_2(f,f)\rangle - \langle\frac{1}{f^2},\Gamma(f,\Gamma(f,f))\rangle + \langle\frac{1}{f^3},\Gamma^2(f,f)\rangle\}$.

Les inégalités que nous avons obtenues dans la proposition (2.3) nous amènent alors à la proposition

Proposition 2.6.—Avec les hypothèses et les notations du corollaire précédent, et si $\langle f_0\rangle = 1$, alors, pour tout réel α de $]0,\frac{n}{n-1}]$, et pour tout réel β satisfaisant à

$$P(\beta) := [(n-1)\beta^2 - 2\beta\alpha n + \alpha^2 n][n-(n-1)\alpha] + \alpha[\beta(1+\frac{n}{2}) + \frac{n}{4}(1-3\alpha)]^2 \leq 0, \tag{2.8}$$

nous avons

$$h''(t) + 2\alpha\rho h'(t) \geq -2\frac{(n-1)\beta^2 - 2\beta\alpha n + \alpha^2 n}{\alpha n}h'^2(t). \tag{2.9}$$

Preuve. La fonction f_0 étant fixée, posons $f = f(t) = \mathbf{P}_t(f_0)$, ainsi que $h(t) = \langle f(t)\rangle$. Puisque la mesure est invariante, nous avons $\langle f\rangle = \langle f_0\rangle = 1$.

Appliquons alors la proposition 2.3. Nous prenons $q = 0$ et nous choisissons les coefficients α, β, γ, δ, ε de manière à avoir $\alpha + \gamma = 1$ et $2\delta - \frac{3}{2}\gamma - \beta = -1$. Dans ce cas, la condition (2) de la proposition 2.3 s'écrit

$$(n-1)\beta^2 + \alpha\frac{[\beta(1+\frac{n}{2}) + \frac{n}{4}(1-3\alpha)]^2}{\alpha + n(1-\alpha)} \leq \varepsilon\alpha n. \tag{2.10}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{gathered}\{\langle\frac{1}{f}, \Gamma_2(f,f)\rangle - \rho\alpha\langle\frac{1}{f}, \Gamma(f,f)\rangle - \langle\frac{1}{f^2}, \Gamma(f,\Gamma(f,f))\rangle + \langle\frac{1}{f^3}, \Gamma^2(f,f)\rangle\} \geq \\ (\frac{\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2}{\alpha n})\langle\frac{1}{f}, \Gamma(f,f)\rangle^2 + (2\beta - \varepsilon - \alpha)\langle\frac{1}{f^3}, \Gamma^2(f,f)\rangle.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Pour minorer le second membre de (2.11), remarquons que, puisque $\langle f\rangle = 1$, on a

$$\langle\frac{1}{f^3}, \Gamma^2(f,f)\rangle = \langle f\rangle\langle\frac{1}{f^3}, \Gamma^2(f,f)\rangle \geq \langle\frac{1}{f}, \Gamma(f,f)\rangle^2 = h'^2(t). \tag{2.12}$$

Choisissons alors ε de façon à avoir $0 \leq 2\beta - \alpha - \varepsilon$. Compte tenu de la condition (2.10), un tel choix de ε est rendu possible par la condition

$$(n-1)\beta^2 + \alpha\frac{[\beta(1+\frac{n}{2}) + \frac{n}{4}(1-3\alpha)]^2}{\alpha + n(1-\alpha)} \leq \alpha n(2\beta - \alpha); \tag{2.13}$$

en réarrangeant un peu les termes, c'est la condition $P(\beta) \leq 0$ de l'énoncé.

Nous pouvons alors minorer dans le second membre de l'inégalité (2.11) par

$$(\frac{\varepsilon\alpha n - (n-1)\beta^2}{\alpha n})\langle\frac{1}{f}, \Gamma(f,f)\rangle^2 + (2\beta - \varepsilon - \alpha)\langle\frac{1}{f}, \Gamma(f,f)\rangle^2,$$

et il reste

$$\begin{gathered}\{\langle\frac{1}{f}, \Gamma_2(f,f)\rangle - \rho\alpha\langle\frac{1}{f}, \Gamma(f,f)\rangle - \langle\frac{1}{f^2}, \Gamma(f,\Gamma(f,f))\rangle + \langle\frac{1}{f^3}, \Gamma^2(f,f)\rangle\} \geq \\ (\frac{2\beta\alpha n - n\alpha^2 - (n-1)\beta^2}{\alpha n})\langle\frac{1}{f}, \Gamma(f,f)\rangle^2.\end{gathered}$$

Compte tenu du corollaire (2.5), c'est exactement le résultat annoncé. □

Remarques.—

1— La condition (2.8) de la proposition précédente montre que, pour tous les choix possibles de β, le coefficient de $h'^2(t)$ dans l'inégalité (2.9) est positif. En effet, la condition (2.13) s'écrit encore

$$(n-1)\beta^2 - 2\alpha\beta n + n\alpha^2 \leq -\alpha\frac{[\beta(1+\frac{n}{2}) + \frac{n}{4}(1-3\alpha)]^2}{\alpha + n(1-\alpha)}.$$

2— La condition (2.8) s'écrit $P(\beta) \leq 0$, où P est un polynôme du second degré en β dont le terme dominant est positif. Pour qu'elle puisse être vérifiée pour certaines valeurs de β, il faut que le discriminant de ce polynôme soit positif. Or, ce discriminant peut s'écrire $16D$, où D est un polynome de degré 4 en α qui vaut

$$D = -\alpha[n-(n-1)\alpha][(\sqrt{n}+1)\alpha-(\sqrt{n}-1)][(\sqrt{n}-1)\alpha-(\sqrt{n}+1)]. \qquad (2.14)$$

Compte tenu de ce que α doit être dans l'intervalle $]0, \frac{n}{n-1}]$, et de ce que $\frac{n}{n-1} \leq \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$, on voit que la condition (2.8) restreint l'intervalle admissible pour α :

$$\alpha \in [\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \frac{n}{n-1}].$$

Dans ce cas, le coefficient β doit être choisi dans l'intervalle $[\beta_1, \beta_2]$ des racines de l'équation $P(\beta) = 0$

3– Le coefficient α étant choisi dans l'intervalle précédent, la meilleure inégalité est obtenue lorsque le polynôme $P_1(\beta) := (n-1)\beta^2 - 2\beta\alpha n + \alpha^2 n$ est minimum. On cherche donc à choisir β dans l'intervalle $[\beta_1, \beta_2]$, le plus proche possible du point où P_1 atteint son minimum, c'est à dire du point $\beta_0 = \alpha n/(n-1)$. Or il n'est pas difficile de voir que $P(\beta_0) \geq 0$: c'est une expression du second degré en α dont le discriminant est négatif. Il est également facile de se convaincre que $\beta_0 \geq \frac{\beta_1+\beta_2}{2}$. On est donc amené à choisir $\beta = \beta_2$ dans l'inégalité (2.9), c'est à dire à choisir pour β la plus grande racine de l'équation $P(\beta) = 0$.

Pour utiliser le résultat précédent, nous nous servirons du lemme suivant :

Lemme 2.7.—Soit $h(t)$ une fonction positive de classe C^2 sur $[0, \infty[$, bornée et satisfaisant à $h'(t) < 0$, $\forall t \in [0, \infty[$. Supposons, qu'il existe deux constantes A et B strictement positives pour lesquelles l'inégalité

$$h''(t) + Ah'(t) \geq Bh'^2(t), \qquad (2.15)$$

soit satisfaite. Alors,

$$h(0) - h(\infty) \leq \frac{1}{B}\log(1 - \frac{B}{A}h'(0)). \qquad (2.16)$$

Preuve. Appelons u la derivée de h : cette fonction satisfait donc à l'inégalité

$$u'(t) + Au(t) \geq Bu^2(t).$$

Puisque u est strictement négative, nous pouvons poser $e^{Av} = B - \frac{A}{u}$. L'inégalité précédente s'écrit alors

$$\frac{A^2 e^{Av}}{(B - e^{Av})^2}(v' - 1) \geq 0,$$

d'où l'on tire $v(t) \geq t + v(0)$. En remplacant v par sa valeur, cela s'écrit

$$B - \frac{A}{u(t)} \geq (B - \frac{A}{u(0)})e^{At}.$$

Nous avons donc, en posant $C = B - \dfrac{A}{h'(0)}$:

$$h'(t) \geq -A[Ce^{At} - B]^{-1}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned} h(0) - h(\infty) &= -\int_0^\infty h'(t)\,dt \leq \int_0^\infty \frac{A}{C\exp(At) - B}\,dt \\ &= B^{-1}\log\frac{C}{C-B} = B^{-1}\log(1 - \frac{B}{A}h'(0)) \end{aligned}.$$

$\square$

Remarque.—

Lorsque la constante A est fixée, de même que la valeur $h'(0)$, l'expression $B^{-1}\log(1 - \dfrac{B}{A}h'(0))$ est une fonction décroissante de la variable $B > 0$. De même que l'hypothèse, la conclusion du lemme est d'autant plus forte que la constante B est plus grande.

Nous arrivons maintenant au principal résultat de notre article. Pour en alléger un peu l'énoncé, nous allons introduire quelques notations. Nous posons, pour tout α réel

$$\begin{aligned} b_0(\alpha) &= (n-1)(n-16)\alpha^2 - 2\alpha n(n-7) + n(n-1)\ ; && (2.17)\\ b_1(\alpha) &= 3\alpha(n-4) - 4(n-1); && (2.18)\\ b_2(\alpha) &= \alpha(n-7) - (n-1); && (2.19)\\ b_3(\alpha) &= n - \alpha(n-1), \text{ et} && (2.20)\\ Q(\alpha, X) &= (b_0^2 - 4Xb_1)^2 - 64Xb_3b_2^2. && (2.21) \end{aligned}$$

Pour tout α dans l'intervalle $[\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \dfrac{n}{n-1}]$, l'équation (du second degré en X) $Q(\alpha, X) = 0$ a deux racines réelles et positives, toutes les deux comprises entre 0 et 1 : nous le verrons plus bas au cours de la démonstration du théorème 2.8. Nous appelons $X(\alpha)$ la plus grande des racines de cette équation.

Théorème 2.8.—Considérons un générateur $\mathbf{L}$ de semigroupe symétrique admettant une courbure $\rho > 0$ et une dimension finie n, $1 < n < \infty$. Pour tout α dans l'intervalle $[\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \frac{n}{n-1}]$, l'opérateur $\mathbf{L}$ satisfait à l'inégalité de SOBOLEV faible

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mu),\ \|f\|_2 = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n}{2X(\alpha)} \log\{1 + \frac{4X(\alpha)}{n\alpha\rho} \langle \mathbf{\Gamma}(f,f) \rangle\}.$$

Preuve. Nous commençons par prendre une fonction f_0 sur l'espace $\mathbf{E}$, encadrée par deux constantes strictement positives et de moyenne 1. Comme dans la proposition 2.4, nous posons $f(t) = \mathbf{P}_t(f_0)$, et $h(t) = \langle f(t) \log f(t) \rangle$. Appliquons la proposition 2.6, ainsi que les remarques qui la suivent : pour tout α de l'intervalle $]0, n/(n-1)]$, et pour β solution de $P(\beta) = 0$, nous avons

$$h''(t) + 2\alpha\rho h'(t) \geq 2\frac{X}{n} h'^2(t),$$

avec $X = -\frac{(n-1)\beta^2 - 2\beta\alpha n + \alpha^2 n}{\alpha}$. Maintenant, la remarque 2 qui suit la proposition 2.6 montre que l'équation $P(\beta) = 0$ n'a de solutions réelles que si α est dans l'intervalle $[\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \frac{n}{n-1}]$. Dans ce cas, en appelant comme plus haut D le discriminant du polynôme $P(\beta)$, (donné par la formule (2.14)), nous pouvons calculer la valeur des solutions $\beta(\alpha)$: nous trouvons

$$\beta(\alpha) = \frac{\alpha[\alpha(5n-14) - (7n-2)] \pm 2\sqrt{D}}{2[3\alpha(n-4) - 4(n-1)]}.$$

En reportant cette valeur dans l'expression de X, nous pouvons avec un petit effort éliminer les radicaux pour en tirer une expression algébrique qui lie X et α : $Q(X, \alpha) = 0$, où $Q(X, \alpha)$ est donné par la formule (2.21). *

En réalité, les discriminants des polynômes P et Q, considérés comme polynômes du second degré en X, sont du même signe. Le discriminant D' de Q vaut

$$D' = 2^{10}(n+2)^2[(n-1) - \alpha(n-7)]^2 D.$$

Les deux racines de P correspondent aux deux racines de Q, et seule la plus grande nous intéresse ici, au vu des conclusions du théorème.

Comme nous l'avons déjà remarqué, d'après la forme même du polynôme $P(\beta)$, il est automatique que $X(\alpha) > 0$ dès que $P(\beta)$ =0, pour les valeurs de α que nous considérons.

Il ne reste plus pour conclure qu'à appliquer le lemme 2.7 : avec la fonction $h(t)$ que nous avons, on a $h(0) = \langle f_0 \log f_0 \rangle$; d'autre part, lorsque $t \to \infty$, la fonction $f(t)$ converge vers la partie invariante de f_0, qui est $\langle f \rangle = 1$, car les seules fonctions

* Nous omettons les détails de ce calcul qui est assez pénible.

invariantes sont les constantes, et donc $h(\infty) = \langle f(\infty) \log f(\infty) \rangle = 0$. De plus, d'après le corollaire 2.5, $h'(0) = -\langle \frac{1}{f_0}, \Gamma(f_0, f_0) \rangle$. Le lemme 2.7 s'écrit donc dans ce cas

$$\langle f_0 \log f_0 \rangle \leq \frac{n}{2X(\alpha)} \log\{1 + \frac{X(\alpha)}{n\alpha\rho} \langle \frac{1}{f_0}, \Gamma(f_0, f_0) \rangle \}.$$

Il ne reste plus qu'à poser $f_0 = f^2$: on a alors $\frac{1}{f_0}\Gamma(f_0, f_0) = 4\Gamma(f, f)$, et on obtient ainsi le résultat annoncé. $\square$

Remarques.—

1— Si l'inégalité de SOBOLEV faible

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n}{2X} \log\{1 + \frac{4X}{n\alpha\rho} \langle \Gamma(f, f) \rangle \} \tag{2.22}$$

est satisfaite pour un couple de valeurs (X, α) positives, elle est à fortiori satisfaite pour tout couple de valeurs (X', α'), avec $0 \leq X' \leq X$ et $0 \leq \alpha' \leq \alpha$. En effet, l'expression dans le second membre de cette inégalité est une fonction décroissante de X et de α.

2— La fonction $X(\alpha)$ atteint son maximum en $\alpha = 1$: on a $X(1) = 1$ et $\frac{\partial X}{\partial \alpha}(1) = 0$. En $\alpha = \frac{n}{n-1}$, on a $X = \frac{n(4n-1)}{4(n+2)^2}$, et $\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -\infty$.

En tout point de la courbe $Q(X, \alpha) = 0$ avec $\alpha \in [\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, 1]$, on a $X(\alpha) \leq X(1)$; compte tenu de la remarque précédente, l'inégalité obtenue est alors plus faible que celle obtenue en $\alpha = 1$. C'est pourquoi les seuls cas intéressants dans le résultat précédent sont ceux où $\alpha \in [1, \frac{n}{n-1}]$.

3— La courbe $\alpha \to X(\alpha)$ est décroissante sur l'intervalle $[1, n/(n-1)]$: nous n'avons réussi à le démontrer que pour $n \geq 2$, mais cela semble être vrai pour toutes les valeurs de $n > 1$. Nous n'en donnons pas la démonstration ici car elle est assez compliquée et au fond inutile pour la suite : cela permet néanmoins d'avoir une idée de la courbe qui nous intéresse. De même, il nous a semblé (en la simulant pour différentes valeurs de n) qu'elle est concave, mais nous n'avons pas cherché à le démontrer, car à ce stade les calculs deviennent très compliqués.

4— Nous n'avons pas donné la forme explicite de la fonction $X(\alpha)$ car elle n'est pas très sympathique. Les choses vont un peu mieux si l'on pose $X = \frac{Z^2}{n - \alpha(n-1)}$. Dans ce cas, le lieu des points $(\alpha, Z(\alpha))$ devient une courbe algébrique de degré 3 (alors que le lieu de $(\alpha, X(\alpha))$ est une courbe de degré 4), et nous avons

$$Z(\alpha) = \frac{2(n - \alpha(n-1))(n - 1 - \alpha(n-7)) + (n+2)\sqrt{D}}{2(4(n-1) - 3\alpha(n-4))},$$

D étant toujours donné par la formule (2.14).

Parmi les valeurs intéressantes dans la famille d' inégalités précédente, il y a l'inégalité obtenue pour $\alpha = 1$ et celle obtenue pour $\alpha = n/(n-1)$. Nous les énonçons séparément :

Corollaire 2.9.—Si l'opérateur $\mathbf{L}$ admet une courbure $\rho > 0$ et une dimension finie $n > 1$, il satisfait aux inégalités de SOBOLEV faibles

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mu),\ \|f\|_2 = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n}{2} \log\{1 + \frac{4}{n\alpha\rho} \langle \Gamma(f,f) \rangle\}. \tag{2.23}$$

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mu),\ \|f\|_2 = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{2(n+2)^2}{4n-1} \log\{1 + \frac{(4n-1)(n-1)}{n\rho(n+2)^2} \langle \Gamma(f,f) \rangle\}. \tag{2.24}$$

Remarques.—

1— Ces deux inégalités sont optimales en des sens différents : la première optimise la dimension globale dans l'inégalité de SOBOLEV faible, et on voit alors que la dimension globale est identique à la dimension locale. Pour un laplacien, la dimension géométrique est identique à la dimension locale, et nous avons donc obtenu le résultat suivant :

Si l'opérateur $\mathbf{L}$ *est le laplacien d'une variété riemannienne compacte de dimension* n *et de courbure de* RICCI *minorée par* $\rho > 0$, *il satisfait à une inégalité de* SOBOLEV *faible*

$$\|f\|_2 = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n}{2} \log\{1 + \frac{4}{n\rho} \langle \Gamma(f,f) \rangle\}.$$

Or, dans le cas des laplaciens des variétés riemanniennes compactes de dimension géométrique n, nous savons que la dimension (globale) dans une inégalité de SOBOLEV faible est minorée par n (cf [BM]). Le résultat obtenu est dans ce sens optimal.

2— Au moins dans le cas où n est entier, ce que l'on vient de voir prouve sans faire de calculs que le maximum de la fonction $X(\alpha)$ sur l'intervalle $[\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}, \frac{n}{n-1}]$ est égal à 1.Vu la complexité de l'expression algébrique de $X(\alpha)$, la vérification directe de ceci dans le cas général n'est pas chose facile.

3— La seconde inégalité est optimale au sens des inégalités de SOBOLEV logarithmiques. En effet, si l'on écrit que $\log(1+x) \leq x$, l'inégalité de SOBOLEV faible (2.22) entraîne l'inégalité de SOBOLEV logarithmique de GROSS :

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mu),\ \|f\|_2 = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{1}{\alpha\rho} \langle \Gamma(f,f) \rangle.$$

Cette inégalité est optimale lorsque α est maximum, et on retrouve alors le résultat de [BE] :

$$\forall f \in \mathbf{L}^2(\mu),\ \|f\|_2 = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n-1}{n\rho} \langle \Gamma(f,f) \rangle.$$

On voit donc qu'en fait cette inégalité peut se déduire d'une inégalité de SOBOLEV faible de dimension (globale) $4(n+2)^2/(4n-1)$. D'autre part, on sait que sous ces hypothèses, ce résultat est optimal : la constante d'hypercontractivité obtenue est la meilleure possible, au moins dans le cas des sphères.

4— Dans [BM], il est montré qu'une inégalité de SOBOLEV faible

$$\langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{m}{2} \log\{1 + c\langle \Gamma(f,f) \rangle\}$$

entraîne une majoration du diamètre de l'espace $\mathbf{E}$: ce diamètre peut être défini purement à partir de l'opérateur $\mathbf{L}$ et de l'algèbre $\mathcal{A}$ par

$$\operatorname{diam}(\mathbf{E}) = \sup_{\{f \in \mathcal{A}, \Gamma(f,f) \leq 1\}} \sup_{\{x,y \in \mathbf{E}\}} (f(x) - f(y)).$$

Cela correspond au diamètre usuel d'une variété riemannienne compacte dans le cas où $\mathbf{L}$ est le laplacien et où $\mathcal{A}$ désigne l'algèbre des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}$. On a alors

$$\operatorname{diam}(\mathbf{E})^2 \leq \frac{\pi^2}{4} m^2 c. \tag{2.25}$$

L'inégalité de SOBOLEV faible obtenue ici pour l'indice α nous donne donc la majoration

$$\operatorname{diam}(\mathbf{E})^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \frac{4X(\alpha)}{n\alpha\rho} \frac{n^2}{X(\alpha)^2} = \frac{n\pi^2}{\rho} \frac{1}{\alpha X(\alpha)}.$$

Nous obtenons donc une version du théorème de MYERS (cf [GHL], p.133) : si, un opérateur admet une courbure de RICCI minorée par $\rho > 0$ et une dimension n finie, alors le diamètre est borné(*).

5— On n'obtient pas ainsi tout le théorème de MYERS : celui-ci affirme que le diamètre est au plus égal à celui de la sphère de même dimension et de courbure de RICCI ρ. Or, il est montré dans [BM], par un argument sur le comportement asymptotique du semigroupe $\mathbf{P}_t$ quand $t \to 0$, que pour les sphères l'inégalité (2.25) est toujours stricte, quelque soit l'inégalité de SOBOLEV faible dont on parte.

6— La formule

$$\operatorname{diam}(\mathbf{E})^2 \leq \frac{n\pi^2}{\rho} \frac{1}{\alpha X(\alpha)}$$

(*) En fait, ce n'est pas tout à fait exact dans la mesure où nous avons supposé l'existence d'une algèbre $\mathcal{A}$ stable par le semigroupe, hypothèse que nous ne savons vérifier en toute généralité que sur des variétés compactes, donc à diamètre borné. Pour avoir une démonstration rigoureuse de cette assertion, il faudrait travailler avec des hypothèses plus générales, comme celles de [B1] ou [B2] par exemple. Mais cela compliquerait beaucoup les choses.

montre que la meilleure estimation obtenue sur le diamètre est obtenue lorsque $\alpha X(\alpha)$ est maximum. Il n'est pas difficile de voir que cet optimum est atteint dans l'intervalle ouvert $]1, \frac{n}{n-1}[$. Néammoins, il est beaucoup plus difficile de trouver la valeur exacte de α pour laquelle ce maximum est atteint : il faut pour cela résoudre une équation de degré 6 qui n'a pas de racines évidentes.

7— La majoration sur le diamètre obtenue dans [BM] s'appuie sur l'existence d'une inégalité de SOBOLEV faible. Ici, nous avons toute une famille d'inégalités qui ne sont pas équivalentes. Sans doute pourrait-on refaire le travail de [BM] dans ce cas pour obtenir une meilleure majoration sur le diamètre. Nous n'en avons pas eu le courage.

8— Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, pour les sphères de diamètre 1 et de dimension n, dont on a normalisé le volume pour en faire une probabilité, on peut trouver dans [A] les coefficients de l'inégalité de SOBOLEV optimale :

$$\|f\|^2_{2n/(n-2)} \leq \langle f^2 \rangle + \frac{4}{n(n-2)} \langle \Gamma(f,f) \rangle.$$

On peut donc en déduire l'inégalité de SOBOLEV faible

$$\langle f^2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n}{2} \log\{1 + \frac{4}{n(n-2)} \langle \Gamma(f,f) \rangle\}.$$

Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, l'inégalité que nous obtenons est meilleure que celle qu'on peut déduire du travail d'AUBIN, puisque dans ce cas $\rho = n-1$ et donc

$$\langle f^2 \rangle = 1 \Rightarrow \langle f^2 \log f^2 \rangle \leq \frac{n}{2} \log\{1 + \frac{4}{n(n-1)} \langle \Gamma(f,f) \rangle\}.$$

Par contre, nous ne savons pas si cette inégalité est optimale.

9— Il est montré dans [BM] qu'une inégalité de SOBOLEV faible

$$\forall f \in D(\mathcal{E}),\ \|f\|_2 = 1 \ \Rightarrow\ \int (f^2 \log f^2)\, d\mu \leq \frac{m}{2} \log\{1 + c_2 \mathcal{E}(f,f)\}$$

entraîne un encadrement du semigroupe $\mathbf{P}_t$ lorsque t tend vers l'infini. Si l'on désigne par $\mathbf{p}_t(x,y)$ la densité du semigroupe par rapport à la mesure μ, alors cet encadrement peut s'écrire

$$-1 + o(t) \leq \inf_{x,y} \frac{c_2 \log(\mathbf{p}_t(x,y))}{4t \exp(-4t/(mc_2))} \leq \sup_{x,y} \frac{c_2 \log(\mathbf{p}_t(x,y))}{4t \exp(-4t/(mc_2))} \leq 1 + o(t).$$

Cet encadrement est d'autant meilleur que le produit mc_2 est plus petit. Pour les inégalités de SOBOLEV faibles que nous obtenons, nous avons

$$m = \frac{n}{2X(\alpha)}\ ;\ c_2 = \frac{4X(\alpha)}{\alpha n \rho},$$

et donc le coefficient mc_2 est minimum lorsque α vaut $n/(n-1)$, et nous obtenons l'encadrement

$$-1+o(t)\leq \inf_{x,y}\frac{c_2\log(\mathbf{p}_t(x,y))}{4t\exp(-2\alpha\rho t)}\leq \sup_{x,y}\frac{c_2\log(\mathbf{p}_t(x,y))}{4t\exp(-2\alpha\rho t)}\leq 1+o(t),$$

avec $c_2=(4n-1)(n-1)/\{n\rho(n+2)^2\}$ et $\alpha=n/(n-1)$.

3— Un exemple.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que notre méthode permettait d'obtenir des inégalités de SOBOLEV faibles sur les sphères, avec une dimension optimale. Nous voulons presenter ici un exemple (liés aux sphères), qui offre plusieurs caractéristiques intéressantes.

Considérons la sphère de rayon 1 dans $\mathcal{R}^{n+1}$, et projettons la sur un sous espace vectoriel de $\mathcal{R}^{n+1}$ de dimension p. Le mouvement brownien sur la sphère se projette sur un processus de MARKOV sur le disque de rayon 1 dans $\mathcal{R}^p$. Le générateur de ce processus s'écrit, dans la base canonique et dans la boule ouverte $\{\|x\|<1\}$,

$$\mathbf{L}_{np}=\sum_{ij}(\delta^{ij}-x^ix^j)\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}-(n-1)\sum_i x^i\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{3.1}$$

Lorsque $n=p$, notre projection est un difféomorphisme local de la demisphère supérieure sur la boule, et donc l'opérateur $\mathbf{L}_{pp}$ est le laplacien sphérique de dimension p, que nous noterons Δ_p.

Prenons pour espace E la boule unité ouverte de $\mathcal{R}^p$, et considérons l'opérateur $\mathbf{L}_{np}$ défini pour tout n réel supérieur à p par la formule (3.1) : sa décomposition canonique s'écrit

$$\mathbf{L}_{np}=\Delta_p-(n-p)\sum_i x^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Dans notre système de coordonnées, la matrice g^{ij} s'écrit

$$g^{ij}=\delta^{ij}-x^ix^j,$$

ce qui nous permet de voir que le champ de vecteurs $\sum_i x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ s'écrit en fait $\nabla\log\sqrt{1-\|x\|^2}$. Un calcul simple montre que la mesure riemannienne s'écrit

$$m(dx)=(1-\|x\|^2)^{-1/2}dx^1\cdots dx^p,$$

et donc que la mesure symétrique pour l'opérateur $\mathbf{L}_{np}$ vaut

$$\mu(dx)=c_{np}(1-\|x\|^2)^{(n-p-1)/2}dx^1\cdots dx^p,$$

où c_{np} est une constante de normalisation qui fait de μ une mesure de probabilité.

Remarquons au passage que la fonction $\log\sqrt{1-\|x\|^2}$ s'écrit également $\log(\sin g(x))$, où la fonction $g(x)$ désigne la distance (riemannienne) de x au bord de E.

Il n'est pas difficile de voir que, pour $n \geq p+1$, le processus de MARKOV dont $\mathbf{L}_{np}$ est le générateur n'atteint jamais le bord de E, et donc que l'opérateur associé est essentiellement autoadjoint dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Ce n'est plus le cas lorsque $p \leq n < p+1$, et la donnée de $\mathbf{L}_{np}$ ne suffit plus dans ce cas à déterminer entièrement le semigroupe $\mathbf{P}_t$ associé. Dans ce cas, nous prendrons pour semigroupe le semigroupe du processus réfléchi normalement au bord de E, ce qui correspond à l'extension de NEUMANN du générateur associé (ou encore à l'extension maximale de la forme de DIRICHLET associée). Nous allons voir qu'en fait il existe une construction très simple de ce semigroupe. En effet, l'algèbre $\mathcal{A}$ des polynômes est stable par l'opérateur $\mathbf{L}_{np}$: l'image par $\mathbf{L}_{np}$ d'un polynôme des p variables (x^i) de degré k est à nouveau un polynôme de degré inférieur ou égal à k. Cette algèbre étant dense dans $\mathbf{L}^2(\mu)$, il existe une base hilbertienne de $\mathbf{L}^2(\mu)$ formée de polynômes vecteurs propres de $\mathbf{L}_{np}$(*). Appelons une telle base (P_k), et $-\mu_k$ la valeur propre associée à P_k. Alors, nous pouvons définir le semigroupe $\mathbf{P}_t$ en posant

$$\mathbf{P}_t(\sum_k a_k P_k) = \sum_k a_k e^{-t\mu_k} P_k.$$

Ce semigroupe est un semigroupe markovien symétrique : il correspond au semigroupe du processus réfléchi normalement au bord. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que tous les polynômes ont, au bord de E, un gradient orthogonal au vecteur normal : si $\|x\| = 1$,

$$\sum_i x^i \nabla P^i = \sum_{ij} x^i(\delta^{ij} - x^i x^j)\frac{\partial P}{\partial x^j} = 0.$$

On peut donc ici disposer d'une algèbre $\mathcal{A}$ de fonctions bornées stable par $\mathbf{P}_t$: l'algèbre des polynômes.

Cet opérateur $\mathbf{L}_{np}$ a une propriété remarquable : c'est un quasi-laplacien au sens de $[B1]$: un couple (m,ρ) est un couple (dimension, courbure) admissible pour $\mathbf{L}_{np}$ si et seulement si $m \geq n$ et $\rho \leq (n-1)$. En effet, puisque Δ_p est le laplacien sphérique, on sait que $\mathrm{Ric}(\Delta_p) = (p-1)g$, où g est le tenseur métrique, et un calcul simple montre alors que

$$\mathrm{Ric}(\mathbf{L}_{np})(x) = (n-1)g(x) + \frac{1}{1-\|x\|^2}\{n-1+\frac{2n-p}{1-\|x\|^2}\}.$$

De là, il est facile de se convaincre que si l'on appelle Y le champ de vecteurs

$$Y = -(n-p)\sum_i x^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

de telle façon que $\mathbf{L}_{np} = \Delta_p + Y$, alors

$$Y \otimes Y = (n-p)\{\mathrm{Ric}(\mathbf{L}_{np}) - (n-1)g\}.$$

(*) Ces polynômes sont l'analogue multidimensionnel des polynômes de JACOBI sur $]-1,1[$.

On reconnait là l'équation qui donne la courbure et la dimension.

Dans ce cas, on peut donc appliquer nos résultats, et l'on obtient toutes les inégalités de SOBOLEV faibles du théorème (2.8), avec $\rho = n - 1$. Pour la structure riemannienne associée à l'opérateur $\mathbf{L}_{np}$, qui est la structure riemannienne usuelle de la demisphère de dimension p, le diamètre de la boule est égal à π. Ce diamètre ne dépend pas de n car l'opérateur $\mathbf{L}_{np}$ ne dépend de n que par l'intermédiaire d'un terme du premier ordre. Les inégalités sur le diamètre de la remarque 6 du chapitre précédent nous donnent, par exemple pour $\alpha = 1$,

$$diam(\mathrm{E})^2 \leq \frac{n}{n-1}\pi^2.$$

En faisant tendre n vers l'infini, nous retrouvons bien ainsi le diamètre de E. (Ce qui n'est sans doute pas la façon la plus rapide de calculer le diamètre de la demisphère!)

—Références

[*A*] AUBIN (T)— **Non linear analysis on manifolds, MONGE-AMPÉRE equations,** Springer, 1982.

[*BE*] BAKRY (D), EMERY (M)— Diffusions hypercontractives, *Séminaire de probabilités XIX*, Lecture Notes in Math. 1123, 1985, Springer, p.177-206.

[*BE*2] BAKRY (D), EMERY (M)— Inégalités de SOBOLEV pour un semigroupe symétrique, Comptes Rendus Acad. Sc., t.301 , série 1, $n°$ 8, 1985, p.411-413.

[*BM*] BAKRY (D) , MICHEL (D)— Inégalités de SOBOLEV et minorations du semigroupe de la chaleur, à paraître, 1989.

[*B*1] BAKRY (D)— La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés, *Séminaire de probabilités XXII*, Lecture Notes in Math. 1321, 1988, Springer, p.1-50.

[*B*2] BAKRY (D)— Un critère de non-explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète, Comptes Rendus Acad. Sc., t.303 , série 1, $n°$ 1, 1986, p.23-27.

[*CKS*] CARLEN (E), KUSUOKA (S), STROOCK (D.W.)— Upperbounds for symmetric MARKOV transition functions, Ann. Inst. H.POINCARÉ, vol. 23, 1987, p.245-287.

[*DS*] DEUSCHEL (J.D.), STROOCK (D.W.) — **Large Deviations** , vol.137, Ac. Press, 1989.

[*D*] DAVIES (E.B.)— **Heat kernels and spectral theory** , Cambridge University Press, 1989.

[*DSi*] DAVIES (E.B.), SIMON (B.)— Ultracontractivity and the heat kernel for SCHRÖDINGER operators and DIRICHLET laplacians, J. Funct. Anal., vol. 59, 1984, p.335-395.

[*GHL*] GALLOT (S), HULLIN (D), LAFONTAINE (J)— **Riemannian geometry** , Universitext, Springer, 1987.

[*V*] VAROPOULOS (N)— HARDY-LITTLEWOOD theory for semigroups, J. Funct. Anal., vol. 63, 1985, p.240-260.