SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN PICARD

Calcul stochastique avec sauts sur une variété

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 196-219

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__196_0>

CALCUL STOCHASTIQUE AVEC SAUTS SUR UNE VARIETE*

Jean Picard
Mathématiques Appliquées
Université Blaise Pascal
F-63177 Aubière Cedex

0. Introduction

La théorie des martingales et semimartingales à valeurs dans un espace euclidien est à la base du calcul stochastique; cette théorie a fait l'objet d'un grand nombre de travaux au cours des dernières décennies. Le mouvement brownien à valeurs dans une variété riemannienne a également suscité de nombreuses recherches; en revanche, l'étude systématique des semimartingales à valeurs dans une variété ne s'est développée que beaucoup plus récemment, et s'est le plus souvent limitée à l'étude des semimartingales continues (citons les références classiques [1], [2], [10], [11], [14] ainsi que le livre récent [4]; en ce qui concerne les processus avec sauts, le cas des groupes de Lie est étudié dans [6]). La définition est simple; on dit qu'un processus X_t à valeurs dans la variété est une semimartingale si pour toute fonction régulière f à valeurs réelles, le processus $f(X_t)$ est une semimartingale. Dans le cas euclidien, une semimartingale se décompose en une martingale locale et un processus à variation finie; la notion de processus à variation finie se généralise naturellement au cas d'une variété, mais la notion de martingale nécessite l'introduction d'une structure géométrique supplémentaire; dans le cas continu, la donnée d'une connexion affine sur la variété suffit pour définir une telle notion; la connexion permet également de définir l'intégrale stochastique de Itô d'une forme linéaire par rapport à une semimartingale continue. Notre but ici est de considérer le cas de processus avec sauts; nous allons proposer quelques définitions permettant de généraliser les notions déjà étudiées dans le cas continu. Dans le cas euclidien, les processus avec sauts (incluant les processus à temps discret) occupent une place importante au sein du calcul stochastique, et nous pensons qu'il est également important d'avoir une bonne compréhension du comportement de tels processus sur une variété; d'autre part, nous espérons que cette étude apporte aussi un éclairage (ou un obscurcissement?) nouveau sur les processus continus; ces processus sont en effet souvent étudiés par discrétisation du temps, donc on n'échappe pas aux sauts.

---

* Ce travail a été réalisé alors que l'auteur se trouvait à l'Inria, Unité de Recherche de Sophia Antipolis.

Soit V une variété régulière de dimension d; dans tout cet article, "régulier" signifiera C^∞, nous ne chercherons pas à préciser l'ordre exact de différentiabilité requis. Soit X_t une semimartingale càdlàg (continue à droite avec limites à gauche) à valeurs dans V et soit α_t une forme linéaire aléatoire sur l'espace tangent $T_{X_{t-}}(V)$; on suppose que c'est un processus prévisible à valeurs dans l'espace cotangent $T^\star(V)$. Nous désirons une construction de l'intégrale de Itô $\int_0^t \alpha_s dX_s$ généralisant celle du cas euclidien. Pour cela il faut donner un sens à $\alpha_t dX_t$ et donc pouvoir interpréter l'accroissement dX_t comme un vecteur tangent. Si X_t est absolument continu, on a $dX_t = \dot{X}_t dt$ qui est bien un vecteur tangent. Si X_t est une semimartingale continue, on peut calculer dX_t dans une carte locale mais la formule de Itô montre que le résultat dépend du choix de la carte; le vecteur inifinitésimal dX_t n'a donc pas de signification intrinsèque, mais le couple $(dX_t, d\langle X, X\rangle_t)$ en a une en tant que vecteur tangent d'ordre 2; isoler dX_t dans ce couple est alors rendu possible par la donnée d'une connexion affine sur la variété. Si X_t n'est pas continu, cela ne suffit plus; il faut également pouvoir donner un sens au saut ΔX_t qui n'est plus une quantité infinitésimale. Nous ne nous donnerons donc pas seulement X_t, mais le couple $(\Delta X_t, X_t)$, ΔX_t étant un vecteur tangent en X_{t-} représentant le saut de X_{t-} à X_t; nous pourrons ainsi définir l'intégrale $\int_0^t \alpha_s dX_s$ et la notion de martingale. Un moyen permettant de retrouver ΔX_t à partir de X_{t-} et X_t nous sera fourni par un objet géométrique que nous appellerons "connecteur": ce sera une application qui à deux points x et y fera correspondre un vecteur tangent en x représentant le saut de x à y. De plus, le comportement infinitésimal du connecteur (pour x et y voisins) permettra de lui associer une connexion et nous pourrons ainsi construire l'intégrale $\int_0^t \alpha_s dX_s$. Nous serons alors en mesure de donner une définition des martingales avec sauts sur V généralisant les définitions des cas euclidien et continu. Signalons que des approches différentes pourraient être envisagées en utilisant les notions de barycentres de [8] ou [5]. Nous donnerons également un rapide aperçu sur les liens entre problèmes de martingales sur V et applications harmoniques à valeurs dans V (le cas continu est étudié dans [9], [13]).

Un autre outil important en calcul stochastique sur les variétés est la notion de transport qui permet de remonter une semimartingale sur V en une semimartingale sur $T(V)$, ou plus généralement sur un fibré vectoriel; la notion de transport est utile dans l'étude des semimartingales à valeurs dans les fibrés et de telles semimartingales interviennent naturellement, par exemple lorsque l'on dérive une semimartingale à valeurs dans V par rapport à un paramètre. Dans le cas continu, le transport est lié au choix d'une connexion sur le fibré relevant la connexion de V. Ici, il nous faudra également décrire ce qui se passe en un instant de saut. L'objet géométrique permettant de construire le transport sera appelé "transporteur".

Nous utiliserons largement des cartes locales dans les démonstrations, mais les constructions seront intrinsèques, et ne dépendront donc pas du choix d'un atlas; dans les démonstrations utilisant un atlas, nous supposerons en général que notre semimartingale X_t prend ses valeurs dans une seule carte locale et ne détaillerons pas l'étude des changements de cartes; une telle étude, bien que techniquement fastidieuse, n'offre pas de réelles difficultés (nous donnerons cependant une indication sur la méthode à suivre dans la première de ces démonstrations). Donnons quelques conventions qui seront utilisées dans cet article; les semimartingales seront toujours supposées càdlàg. La projection de $T(V)$ sur V sera notée π et le vecteur nul de $T_x(V)$ sera noté 0_x. Si ϕ est une fonction régulière sur $V \times V$, nous dirons que $\phi(x,y)$ est au plus d'ordre $|y-x|^k$ ($k \in \mathbb{N}^\star$) près de la diagonale si $\phi(x,y)$ et ses dérivées par rapport à y jusqu'à l'ordre $k-1$ sont nulles en $y=x$. Un processus sur une variété de dimension finie (V ou un fibré au-dessus de V) sera dit localement borné s'il existe une suite de temps d'arrêt t_k croissant presque sûrement vers l'infini telle que le processus arrêté en t_k prenne ses valeurs dans une partie compacte. Si $F(V)$ est un fibré vectoriel de dimension finie au-dessus de V, un champ de normes sera par définition une application régulière de $F(V)$ dans $\mathbb{R}_+$ dont la restriction à chaque fibre est une norme; si X_t est un processus localement borné sur V et si Y_t est un processus au-dessus de X_t (c'est-à-dire dont la projection sur V est X_t), nous dirons que Y_t est sommable sur l'intervalle $[0,T]$ si pour tout champ de normes $(|.|_x, x \in V)$, le processus $|Y_t|_{X_t}$ est sommable sur $[0,T]$; il suffit en fait que cette propriété soit réalisée pour un champ de normes, elle l'est alors pour tous; nous pouvons définir de la même façon la notion de processus de carré sommable. Nous utiliserons les lemmes suivants; on suppose fixé un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t)$.

Lemme 0.1. *Soit Z_t une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et soit $(t_k^N, 0 \le k \le N)$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0.*
(a) Si ψ_t est un processus adapté càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (considéré comme l'ensemble des formes linéaires sur $\mathbb{R}^d$), la suite de variables

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi_{t_k^N}(Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N})$$

converge en probabilité vers l'intégrale de Itô $\int_0^T \psi_{t-} dZ_t$.
(b) Si ψ_t est un processus adapté càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ (formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$), la suite

$$\sum_{k=0}^{N-1} \psi_{t_k^N}\langle Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}, Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}\rangle$$

converge en probabilité vers $\int_0^T \psi_{t-} d[Z,Z]_t$.
(c) Si ϕ *est une fonction réelle régulière sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *telle que* $\phi(x,y)$ *est au plus d'ordre* $|y-x|^3$ *près de la diagonale et si* ψ_t *est un processus adapté càdlàg à valeurs réelles, la suite* $\sum_{k=0}^{N-1} \psi_{t_k^N} \phi(Z_{t_k^N}, Z_{t_{k+1}^N})$ *converge en probabilité vers* $\sum_{t \leq T} \psi_{t-} \phi(Z_{t-}, Z_t)$.

Lemme 0.2. *Soit* Z_t *une semimartingale à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, soit* ϕ *une application régulière de* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^m$ *et soient* f_1*,* f_2*,* f_3 *des applications régulières définies sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ *à valeurs respectivement dans les applications linéaires de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^n$*, les applications bilinéaires de* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et les applications linéaires de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}^n$*. On suppose que* $\phi(x,y)$ *est au plus d'ordre* $|y-x|^3$ *près de la diagonale et que* $f_1(z,\xi)$*,* $f_2(z,\xi)$*,* $f_3(z,\xi)$ *ont une croissance au plus linéaire en* ξ*, uniformément lorsque* z *décrit une partie bornée de* $\mathbb{R}^d$*. Soit* $(t_k^N, 0 \leq k \leq N)$ *une suite de subdivisions de* $[0,T]$ *dont le pas tend vers 0, soit* $\xi_1^N \in \mathbb{R}^n$ *une suite de variables* $\mathcal{F}_{t_1^N}$ *mesurables et soit* ξ_k^N *la suite définie par*

$$\begin{aligned}\xi_{k+1}^N =& \xi_k^N + f_1(Z_{t_k^N}, \xi_k^N)(Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}) + f_2(Z_{t_k^N}, \xi_k^N)\langle Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}, Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}\rangle \\ &+ f_3(Z_{t_k^N}, \xi_k^N)\phi(Z_{t_k^N}, Z_{t_{k+1}^N}).\end{aligned}$$

Si ξ_1^N *converge en probabilité vers une variable* ξ_0 *alors* ξ_N^N *converge vers la valeur en* $t=T$ *de la solution de*

$$\begin{aligned}\xi_t =& \xi_0 + \int_0^t f_1(Z_{s-}, \xi_{s-}) dZ_s + \int_0^t f_2(Z_{s-}, \xi_{s-}) d[Z,Z]_s \\ &+ \sum_{s \leq t} f_3(Z_{s-}, \xi_{s-}) \phi(Z_{s-}, Z_s).\end{aligned}$$

Lemme 0.3. *Soit* Z_t *une semimartingale à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, soit* V_t^N *une suite de processus adaptés càdlàg à variation finie dans* $\mathbb{R}^m$ *convergeant vers* V_t*, au sens où* V_0^N *converge en probabilité vers* V_0 *et la variation de* $V^N - V$ *sur* $[0,T]$ *converge en probabilité vers 0. Soient* f_1*,* f_2 *des applications régulières définies sur* $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ *à valeurs respectivement dans les applications linéaires de* $\mathbb{R}^d$ *dans* $\mathbb{R}^n$ *et les applications linéaires de* $\mathbb{R}^m$ *dans* $\mathbb{R}^n$*; on suppose que* $f_1(z,\xi)$*,* $f_2(z,\xi)$ *ont une croissance au plus linéaire en* ξ *uniformément lorsque* z *décrit une partie bornée. Soit* ξ_0^N *une suite de variables* $\mathcal{F}_0$ *mesurables convergeant vers* ξ_0*. Alors la solution* ξ_t^N *de*

$$\xi_t^N = \xi_0^N + \int_0^t f_1(Z_{s-}, \xi_{s-}^N) dZ_s + \int_0^t f_2(Z_{s-}, \xi_{s-}^N) dV_s^N$$

converge en probabilité pour tout t vers la solution de

$$\xi_t = \xi_0 + \int_0^t f_1(Z_{s-}, \xi_{s-}) dZ_s + \int_0^t f_2(Z_{s-}, \xi_{s-}) dV_s.$$

Nous ne donnerons pas la démonstration de ces résultats qui sont assez "classiques"; on peut par exemple les déduire de [12]. D'autre part, nous n'avons énoncé qu'une convergence à t fixé, mais on a en fait une convergence uniforme en temps.

1. Connecteurs et connexions sans torsion

Définition 1.1. *Soit γ une application régulière de $V \times V$ dans $T(V)$. Nous dirons que γ est un connecteur si $\gamma(x,y)$ est dans $T_x(V)$, si $\gamma(x,x) = 0_x$ et si pour tout x, la dérivée partielle de $\gamma(x,y)$ par rapport à y prise en $y = x$ est égale à l'application identité de $T_x(V)$.*

Si x et y sont deux points de V, $\gamma(x,y)$ est un vecteur tangent en x qui permettra de représenter un saut de x à y; nous dirons que $\gamma(x,y)$ connecte x à y; ainsi x est connecté à lui-même par le vecteur nul. La dernière condition de la définition affirme qu'un vecteur connectant un point à un point voisin peut être approché par le vecteur vitesse d'une courbe reliant les deux points; plus précisément, si c_t est une courbe régulière sur V alors pour tout t,

$$\gamma(c_t, c_{t+\varepsilon}) = \varepsilon \dot{c}_t + O(\varepsilon^2) \tag{1}$$

quand $\varepsilon \to 0$. Notons que par le théorème de la fonction implicite, pour tout x fixé, $\gamma(x,.)$ induit un difféomorphisme d'un voisinage de x sur un voisinage de 0_x. Il apparaitra dans les exemples qu'il est souvent difficile de faire correspondre à (x,y) un unique vecteur $\gamma(x,y)$; aussi nous allons également considérer une notion plus générale qui est celle de connecteur multivoque.

Définition 1.2. *Soit Γ une partie fermée de $T(V) \times V$. Nous dirons que Γ est un connecteur multivoque s'il existe un connecteur γ et un voisinage W de $\{(0_x, x); x \in V\}$ dans $T(V) \times V$ tels que*

$$\Gamma \cap W = \{ (u,y) \in W; \quad u = \gamma(\pi(u), y) \}.$$

Les connecteurs multivoques sont en général définis par des relations du type $\Phi(u,y) = 0$, Φ fonction régulière sur $T(V) \times V$. Un connecteur est évidemment un connecteur multivoque, Γ étant alors l'ensemble des $(\gamma(x,y), y)$ lorsque (x,y) décrit $V \times V$; réciproquement un connecteur multivoque permet de définir une famille de connecteurs, deux connecteurs de cette famille coïncidant sur un voisinage de la diagonale. Dans le cas d'un connecteur multivoque, un point x peut être connecté à un point "voisin" par un et un seul "petit" vecteur $u \in T_x(V)$; cependant il peut aussi être connecté à ce même point par un autre vecteur qui n'est pas petit; de même le vecteur nul 0_x connecte x à lui-même, mais il peut aussi le connecter à un point y qui n'est pas voisin; de plus, un point x peut ne pas être connecté à tous les points y de V (on peut alors dire que le saut de x à y est interdit).

Exemple 1. Soit $V = \mathbb{R}^d$. Alors l'espace tangent s'identifie naturellement à $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et on peut poser $\gamma(x,y) = (x, y-x)$. On obtient ainsi un connecteur; x est connecté à y par le vecteur $y - x$.

Exemple 2. Soit $V = S^1$ le cercle unité du plan complexe. L'espace tangent est $S^1 \times \mathbb{R}$ et si on note $u = (x, \vec{u})$ un élément générique cet espace, on peut prendre pour Γ l'ensemble des $((x,\vec{u}),y)$ tels que $y = xe^{i\vec{u}}$. On obtient ainsi un connecteur multivoque; si x est connecté à y par $\vec{u}$, il l'est également par tous les vecteurs $\vec{u} + 2k\pi$, k entier. Plus généralement, si V est un groupe de Lie G, si e désigne l'élément neutre et si $\mathcal{G} = T_e(G)$ est l'algèbre de Lie associée, chaque espace $T_x(G)$ peut être identifié à $\mathcal{G}$ au moyen de l'isomorphisme $L'_x(e)$, où L_x est la multiplication à gauche par x ($L_x(g) = xg$) et L'_x sa dérivée. On identifie ainsi $T(G)$ à $G \times \mathcal{G}$ et en notant $(x, \vec{u})$ un élément générique, on peut définir un connecteur multivoque Γ par la relation $x^{-1}y = \mathrm{Exp}(\vec{u})$ (Exp étant l'application exponentielle de $\mathcal{G}$ dans G).

Exemple 3. Soit V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, $n > d$. Alors $T_x(V)$ peut être identifié à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$; soit $\gamma(x,y)$ la projection orthogonale de $y - x$ sur $T_x(V)$; γ est un connecteur. Dans ce cas, $\gamma(x,y)$ connecte x à y, mais il peut aussi le connecter à d'autres points.

Exemple 4. Soit à nouveau V une sous-variété de $\mathbb{R}^n$; un élément de $T(V)$ peut être écrit $u = (x,\vec{u})$ avec $x \in V \subset \mathbb{R}^n$ et $\vec{u} \in T_x(V) \subset \mathbb{R}^n$. Si Γ est l'ensemble des $((x,\vec{u}),y)$ tels que $y - (x + \vec{u})$ est orthogonal à $T_y(V)$, on obtient un connecteur multivoque.

Considérons le comportement des connecteurs au voisinage de la diagonale. Le comportement au premier ordre est le même pour tous les connecteurs d'après (1); le comportement au second ordre va nous permettre de définir la notion de connexion sans torsion.

Définition 1.3. *Nous dirons que deux connecteurs γ_1 et γ_2 sont équivalents à l'ordre 2 si*

$$\gamma_1(x,y) - \gamma_2(x,y) = O(|y-x|^3)$$

près de la diagonale. Une connexion sans torsion ∇ sur V sera par définition une classe d'équivalence pour cette relation.

Si γ est un connecteur et f est une fonction régulière sur V, en tout point x de V, il existe une unique forme bilinéaire symétrique $f''(x)$ sur $T_x(V)$ telle que

$$f(y) = f(x) + f'(x)\gamma(x,y) + \frac{1}{2}f''(x)\langle\gamma(x,y),\gamma(x,y)\rangle + O(|y-x|^3) \qquad (2)$$

si $y \to x$. Alors f'' est une application régulière et ne dépend que de la connexion sans torsion contenant γ; f'' est appelé le hessien de f relatif à la connexion sans torsion. Dans le cas euclidien (Exemple 1), $f''(x)$ est la matrice hessienne classique. L'opération $f \mapsto f''$ est bien un hessien (voir [4]) au sens où c'est une opération linéaire vérifiant

$$(f^2)''(x)\langle u,u\rangle = 2f(x)f''(x)\langle u,u\rangle + 2(f'(x)u)^2.$$

Réciproquement, supposons donné un hessien $f \mapsto f''$; une courbe géodésique est par définition une courbe régulière $t \mapsto c_t$ sur V vérifiant

$$\frac{d^2}{dt^2}f(c_t) = f''(c_t)\langle\dot{c}_t,\dot{c}_t\rangle,$$

c'est-à-dire

$$f(c_{t+\varepsilon}) = f(c_t) + \varepsilon f'(c_t)\dot{c}_t + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(c_t)\langle\dot{c}_t,\dot{c}_t\rangle + O(\varepsilon^3) \qquad (3)$$

pour tout f. Soit Γ l'ensemble des (u,y) de $T(V) \times V$ tels qu'il existe une courbe géodésique c_t, $0 \leq t \leq 1$, vérifiant $c_0 = \pi(u)$, $\dot{c}_0 = u$ et $c_1 = y$; alors Γ est un connecteur multivoque que nous appellerons connecteur géodésique; de plus d'après (2) et (3), le hessien associé à Γ coïncide avec le hessien d'où nous sommes partis. La donnée d'une connexion sans torsion est donc équivalente à la donnée d'un hessien.

Remarque. On peut en déduire que notre notion de connexion sans torsion est équivalente à la notion classique. En effet on peut associer au hessien l'opérateur de dérivée covariante défini par

$$(\nabla_X Y f)(z) = (XYf)(z) - f''(z)\langle X(z),Y(z)\rangle$$

pour X et Y deux champs de vecteurs et f une fonction régulière. Cet opérateur est sans torsion au sens où

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = XY - YX$$

et il y a bijection entre les hessiens et les opérateurs de dérivée covariante sans torsion.

Remarque. Si γ est un connecteur induisant la connexion sans torsion, les courbes géodésiques peuvent également être caractérisées par la condition

$$\gamma(c_t, c_{t+\varepsilon}) = \varepsilon \dot{c}_t + O(\varepsilon^3)$$

pour $\varepsilon \to 0$. Dans le cas du connecteur géodésique, le terme $O(\varepsilon^3)$ est même identiquement nul sur un voisinage de 0.

Exemple 5. Si V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, on peut montrer que les connecteurs des exemples 3 et 4 définissent la même connexion sans torsion (en fait la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$ induit une métrique riemannienne sur V et notre connexion est la connexion de Levi-Civitá associée à cette métrique). On peut donc considérer le connecteur géodésique de V, et cela fournit un troisième exemple de connecteur définissant la même connexion sans torsion.

2. Processus à temps discret

Dans ce paragraphe, on se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration à temps discret $(\mathcal{F}_t; t \in \mathbb{N})$ et une variété V. Pour étudier les processus à valeurs dans V, nous utiliserons non seulement leurs valeurs X_t, mais aussi les vecteurs tangents connectant X_t à X_{t+1}.

Définition 2.1. *Un Δ-processus à temps discret est par définition un processus $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ à valeurs dans $T(V) \times V$ tel que $X_t = \pi(\Delta X_{t+1})$ pour tout t, $\pi(\Delta X_0) = X_0$ et ΔX_0 est le vecteur nul en X_0.*

Ainsi ΔX_t est un vecteur représentant le saut de X_{t-1} à X_t. La notion de martingale se définit alors de façon naturelle.

Définition 2.2. *Une Δ-martingale est par définition un Δ-processus adapté $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ tel que pour tout $t \geq 1$, conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1}$, la loi de ΔX_t est intégrable et centrée.*

En effet, conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1}$, ΔX_t est à valeurs dans l'espace vectoriel $T_{X_{t-1}}(V)$ donc les notions d'intégrabilité et de moyenne conditionnelles ont bien un sens. Jusqu'à présent, nous n'avons donné aucune relation entre (X_{t-1}, X_t) et ΔX_t donc cette notion de martingale semble trop peu restrictive; en effet, à partir de tout processus adapté X_t on peut construire une Δ-martingale (prendre pour ΔX_t le vecteur nul en X_{t-1}!). C'est là que la notion de connecteur est utile; si Γ est un connecteur multivoque, on peut voir Γ comme une contrainte pour le processus Y_t; un Γ-processus ou une Γ-martingale sera par définition un Δ-processus ou une Δ-martingale à valeurs dans Γ. De même si γ est un connecteur, nous dirons qu'un processus X_t à valeurs dans V est une γ-martingale si le processus $(\gamma(X_{t-1}, X_t), X_t)$ est une Δ-martingale.

Remarque. Si μ est une mesure de probabilité sur V et si γ est un connecteur, on peut définir le γ-barycentre de μ comme l'ensemble des $x \in V$ tels que $\gamma(x, .)$ soit intégrable et centré sous μ; alors dire que X_t est une γ-martingale est équivalent à dire que X_{t-1} est dans le γ-barycentre de la loi de X_t conditionnée par $\mathcal{F}_{t-1}$; si γ est le connecteur géodésique induit par une métrique riemannienne δ sur V (les connecteurs géodésiques sont en général multivoques mais deviennent univoques si la variété est suffisamment "petite"), le γ-barycentre de μ coïncide avec l'ensemble des barycentres riemanniens de μ, c'est-à-dire l'ensemble des points critiques de la fonction $x \mapsto \int \delta^2(x, .)d\mu$. Signalons que des notions de barycentres différentes de celle-ci ont été considérées dans [8] et [5].

Exemple 1 (suite). Dans le cas euclidien, notre définition diffère légèrement de la définition usuelle de martingale car on ne demande pas ici que ΔX_t soit intégrable mais seulement conditionnellement intégrable (pour V quelconque l'intégrabilité non conditionnelle n'a en effet pas de sens intrinsèque, puisque ΔX_t prend ses valeurs dans toute une famille d'espaces vectoriels). En fait, notre notion de martingale est équivalente à la notion usuelle de martingale locale (cela se déduit de la proposition ci-dessous).

Exemple 2 (suite). Soit μ_t, $t \geq 1$, un processus $\mathcal{F}_t$ adapté à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ tel que chaque μ_t soit intégrable et centré, et soit X_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ mesurable à valeurs dans G. Alors

$$X_t = X_0 \operatorname{Exp}(\mu_1) \dots \operatorname{Exp}(\mu_t), \qquad \Delta X_t = (X_{t-1}, \mu_t)$$

forme une Γ-martingale.

Exemple 3 (suite). Soit X_t un processus adapté à valeurs dans V et notons $\overline{X}_t$ son image dans $\mathbb{R}^n$ par le plongement. Si chaque $\overline{X}_t$ est intégrable, alors il existe une décomposition unique $\overline{X}_t = M_t + V_t$ où M_t et V_t sont des processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, M_t est une $\mathcal{F}_t$ martingale nulle en 0 et V_t est un processus $\mathcal{F}_t$ prévisible (V_t est $\mathcal{F}_{t-1}$ mesurable). Alors X_t est une γ-martingale si et seulement si pour tout t, $V_{t+1} - V_t$ est orthogonal à l'espace tangent en X_t à V considéré comme sous-espace de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.3. *Soit $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ un Δ-processus adapté. Alors Y_t est une Δ-martingale si et seulement si pour tout processus adapté ϕ_t au-dessus de X_t à valeurs dans l'espace cotangent $T^\star(V)$, le processus*

$$I_t = \sum_{k=1}^{t} \phi_{k-1} \Delta X_k$$

est une martingale locale réelle.

Démonstration. Commençons par montrer que si Y_t est une Δ-martingale alors les I_t sont des martingales locales réelles. Fixons le processus ϕ_t et pour $R > 0$, considérons le temps d'arrêt

$$\tau_R = \inf\Big\{ t; \quad \mathbb{E}[|\phi_t \Delta X_{t+1}| \mid \mathcal{F}_t] \geq R \Big\}.$$

Alors il est clair que $I_{t \wedge \tau_R}$ est une martingale; de plus, comme conditionnellement à $\mathcal{F}_t$, ΔX_{t+1} est intégrable, τ_R tend presque sûrement vers l'infini, donc I_t est une martingale locale. Réciproquement, supposons que les I_t sont des martingales locales; on peut construire d processus adaptés $(\phi_t^1, \dots, \phi_t^d)$ qui forment pour chaque t une base de $T^\star_{X_t}(V)$; on obtient ainsi une martingale locale vectorielle $I_t = (I_t^1, \dots, I_t^d)$; il existe donc une suite de temps d'arrêt t_k croissant presque sûrement vers l'infini telle que $I_{t \wedge t_k}$ soit une martingale; l'événement $\{t \leq t_k\}$ est $\mathcal{F}_{t-1}$ mesurable et sur cet événement, conditionnellement à $\mathcal{F}_{t-1}$, I_t est intégrable de moyenne I_{t-1}; comme $t_k \uparrow \infty$, on en déduit que cette propriété de moyenne conditionnelle est en fait réalisée sur Ω presque sûrement. Cela signifie que $\nu_t = (\phi_{t-1}^1, \dots, \phi_{t-1}^d) \Delta X_t$ est conditionnellement intégrable et centré; or l'application $x \mapsto (\phi_{t-1}^1, \dots, \phi_{t-1}^d) x$ est un isomorphisme $\mathcal{F}_{t-1}$ mesurable de $T_{X_{t-1}}(V)$ sur $\mathbb{R}^d$, donc en prenant l'image réciproque de ν_t, on voit que ΔX_t est conditionnellement intégrable et centré. $\square$

Le processus I_t peut être vu comme l'intégrale du processus prévisible ϕ_{t-1} par rapport à X_t. C'est de cette proposition que nous allons nous inspirer pour définir les martingales à temps continu; mais pour cela nous devrons d'abord construire l'intégrale stochastique.

3. Semimartingales et intégrales stochastiques

Nous nous fixons désormais un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t; t \in \mathbb{R}_+)$ à temps continu. Généralisons la notion de Δ-processus; nous ne considérerons pas des processus càdlàg généraux, mais seulement des semimartingales.

Définition 3.1. *On dit qu'un processus X_t à valeurs dans V est une semimartingale si pour toute fonction régulière f sur V, le processus $f(X_t)$ est une semimartingale réelle. Une Δ-semimartingale est par définition un processus adapté $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ à valeurs dans $T(V) \times V$ tel que*
(a) le processus X_t est une semimartingale;
(b) le processus $\pi(\Delta X_t)$ est le processus des limites à gauche de X_t;
(c) on a $\pi(\Delta X_0) = X_0$ et ΔX_0 est le vecteur nul en X_0;
(d) pour tout connecteur γ, le processus $(\Delta X_t - \gamma(X_{t-}, X_t))$ à valeurs dans

$T(V)$ et au-dessus de X_{t-} est sommable sur $[0,T]$ pour tout T.
De plus, on dit que Y_t est continu si X_t est continu et ΔX_t est le vecteur nul en X_t.

Les conditions (b) et (c) sont la généralisation naturelle de la définition des Δ-processus à temps discret. Quant à la condition (d), elle précise le comportement des "petits" sauts et limite le nombre des "grands" sauts. Si γ_1 et γ_2 sont deux connecteurs, la différence entre $\gamma_1(x,y)$ et $\gamma_2(x,y)$ est au plus d'ordre $|y-x|^2$ donc si X_t est une semimartingale, on peut en déduire (en utilisant l'existence d'une variation quadratique pour X_t lorsque V est plongé dans un espace euclidien par le théorème de Whitney) que

$$\gamma_2(X_{t-},X_t)-\gamma_1(X_{t-},X_t)$$

est sommable; il suffit donc que la condition (d) soit vérifiée pour un connecteur. De plus comme $\gamma(X_{t-},X_t)$ est de carré sommable, on déduit aussi de cette condition que ΔX_t est de carré sommable.

Comme pour les processus à temps discret, si Γ est un connecteur multivoque, nous pouvons définir une Γ-semimartingale comme une Δ-semimartingale à valeurs dans Γ; dans ce cas, la condition (d) signifie que pour tout voisinage W de $\{(0_x,x); x\in V\}$ dans $T(V)\times V$, l'ensemble des $t\le T$ tels que $Y_t\notin W$ est presque sûrement fini. De même si γ est un connecteur, à toute semimartingale X_t on peut associer la Δ-semimartingale

$$Y_t=(\gamma(X_{t-},X_t),X_t).$$

Nous allons maintenant construire l'intégrale de Itô d'une forme linéaire par rapport à une semimartingale; cette construction va se faire par discrétisation du temps, généralisant ainsi la construction de [3].

Proposition 3.2. *Soit γ un connecteur, soit X_t une semimartingale et soit ϕ_t un processus càdlàg adapté à valeurs dans $T^\star(V)$ au-dessus de X_t. D'autre part fixons $T>0$ et soit $(t_k^N; 0\le k\le N)$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0. Alors la suite*

$$J_T^N=\sum_{k=0}^{N-1}\phi_{t_k^N}\gamma(X_{t_k^N},X_{t_{k+1}^N})$$

converge en probabilité vers une variable J_T ne dépendant pas du choix de la suite de subdivisions. Quand T varie, il existe une version de J_T qui est càdlàg et cette version est une semimartingale réelle.

Démonstration. Nous allons utiliser des cartes locales sur V. Une carte locale est un couple (U,δ) où U est un ouvert de V et δ est un difféomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Nous commençons par démontrer la proposition en supposant qu'il existe une carte locale (U, δ) telle que X_t vive dans U jusqu'en T. Si $x \in U$, soit δ_x la dérivée de δ au point x; c'est un isomorphisme de $T_x(V)$ sur $\mathbb{R}^d$; soit $\delta_x^\star$ l'isomorphisme de $T_x^\star(V)$ sur $\mathbb{R}^d$ défini par

$$\forall (u,v) \in T_x^\star(V) \times T_x(V) \qquad uv = \delta_x^\star(u)\delta_x(v)$$

où l'opération du membre de droite est le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$. On peut considérer l'application régulière $\overline{\gamma}$ de $\delta(U) \times \delta(U)$ dans $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\overline{\gamma}(\delta(x), \delta(y)) = (\delta_x \circ \gamma)(x,y).$$

Soit $Z_t = \delta(X_t)$ et $\psi_t = \delta_{X_t}^\star(\phi_t)$. Alors Z_t est une semimartingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, ψ_t est un processus adapté càdlàg à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et J_T^N s'écrit

$$J_T^N = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{t_k^N} \overline{\gamma}(Z_{t_k^N}, Z_{t_{k+1}^N}).$$

D'autre part le fait que γ est un connecteur implique que

$$\overline{\gamma}(x,y) = y - x + O(|y-x|^2)$$

pour x et y dans $\delta(U)$ et $y \to x$ donc en poussant le développement de Taylor un peu plus loin, on peut écrire

$$\overline{\gamma}(x,y) = y - x + \rho(x)\langle y-x, y-x\rangle + \overline{\rho}(x,y) \tag{4}$$

où $\rho(x)$ est une application bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\overline{\rho}(x,y)$ est dominé par $|y-x|^3$ près de la diagonale. En appliquant cette décomposition à l'expression de J_T^N, on obtient

$$\begin{aligned} J_T^N = &\sum_{k=0}^{N-1} \psi_{t_k^N}(Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}) + \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{t_k^N} \rho(Z_{t_k^N})\langle Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}, Z_{t_{k+1}^N} - Z_{t_k^N}\rangle \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \psi_{t_k^N} \overline{\rho}(Z_{t_k^N}, Z_{t_{k+1}^N}). \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 0.1, on voit que J_T^N converge en probabilité vers

$$J_T = \int_0^T \psi_{t-} dZ_t + \int_0^T \psi_{t-} \rho(Z_{t-}) d[Z,Z]_t + \sum_{t \le T} \psi_{t-} \overline{\rho}(Z_{t-}, Z_t).$$

Il est alors clair que J_T ne dépend pas du choix de (t_k^N) et forme une semimartingale quand T varie. Passons au cas général (X_t peut quitter U). Nous allons utiliser un atlas $(U_i, \delta_i; i \in \mathbb{N})$ recouvrant V tel que chaque carte (U_i, δ_i) apparaît une infinité de fois dans la suite; on pose $\theta_0 = 0$ et

$$\theta_i = \inf\{t \geq \theta_{i-1}; \quad X_t \notin U_i\}.$$

La suite θ_i croît presque sûrement vers l'infini; on peut donc écrire

$$J_T^N = \sum_i \sum_{\theta_i \leq t_k^N < \theta_{i+1}} \phi_{t_k^N} \gamma(X_{t_k^N}, X_{t_{k+1}^N})$$

et étudier séparément la somme correspondant à chaque i. Posons $\theta_i^T = \theta_i \wedge T$, fixons un entier i et plaçons nous sur $\{\theta_i^T < \theta_{i+1}^T\}$. Alors la somme correspondante contient un nombre non nul de termes dès que N est assez grand; si on enlève le dernier terme, on obtient une somme qui peut être étudiée par la technique précédente (on peut trouver une semimartingale à valeurs dans la carte U_i coïncidant avec X_t sur $[\theta_i^T, \theta_{i+1}^T))$ et on montre ainsi que la somme privée du dernier terme converge vers

$$\int_{(\theta_i^T, \theta_{i+1}^T)} \psi_{t-}^i dZ_t^i + \int_{(\theta_i^T, \theta_{i+1}^T)} \psi_{t-}^i \rho^i(Z_{t-}^i) d[Z^i, Z^i]_t + \sum_{\theta_i^T < t < \theta_{i+1}^T} \psi_{t-}^i \overline{\rho}^i(Z_{t-}^i, Z_t^i)$$

où l'indice i signifie que l'on a utilisé la carte (U_i, δ_i). Quant au dernier terme (correspondant au changement de carte ou à $k = N$), on montre facilement qu'il converge sur $\{\theta_i^T < \theta_{i+1}^T\}$ vers $(\phi_{\theta_{i+1}^T -}) \gamma(X_{\theta_{i+1}^T -}, X_{\theta_{i+1}^T})$. Il ne reste plus qu'à faire la somme sur i de ces termes et on obtient ainsi la proposition. □

Remarque. Ainsi que nous l'avons signalé dans l'introduction, nous ferons nos démonstrations en supposant que X_t prend ses valeurs dans une carte locale, l'étude des changements de cartes se faisant par la méthode ci-dessus.

Proposition 3.3. *Supposons les conditions de la proposition précédente, soit ∇ la connexion sans torsion induite par γ et soit $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ une Δ-semimartingale bâtie sur X_t. Alors le processus*

$$I_T = J_T + \sum_{t \leq T} \phi_{t-}(\Delta X_t - \gamma(X_{t-}, X_t))$$

est une semimartingale qui dépend de ϕ_t, Y_t et ∇, mais qui ne dépend pas du choix du connecteur γ induisant ∇.

Démonstration. On remarque tout d'abord, en utilisant la condition (d) de la Définition 3.1, que I_T est bien défini. Si X_t prend ses valeurs dans une carte locale U, alors avec les notations précédentes on a

$$I_T = \int_0^T \psi_{t-} dZ_t + \int_0^T \psi_{t-} \rho(Z_{t-}) d[Z,Z]_t$$
$$+ \sum_{t \le T} \psi_{t-}\Big(\delta_{X_{t-}}(\Delta X_t) - \Delta Z_t - \rho(Z_{t-})\langle \Delta Z_t, \Delta Z_t\rangle\Big)$$

où on a noté $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-}$. Donc I_T ne dépend de γ qu'à travers ρ et on voit sur sa définition (4) que ρ ne dépend que du comportement au second ordre de γ, c'est-à-dire ne dépend que de ∇. Ce raisonnement s'étend au cas général (avec changements de cartes). □

Remarque. Si on écrit les coefficients de $2\rho(x)$ pour la base canonique de $\mathbb{R}^d$, on obtient les symboles de Christoffel en x de la connexion.

Définition 3.4. *Le processus J_T est l'intégrale de Itô de ϕ_{t-} par rapport à la semimartingale X_t calculée pour le connecteur γ; le processus I_T est l'intégrale de Itô de ϕ_{t-} par rapport à la Δ-semimartingale $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ calculée pour la connexion sans torsion ∇. Dans les deux cas l'intégrale sera notée $\int_0^T \phi_{t-} dX_t$.*

Nous allons maintenant généraliser l'intégration aux processus prévisibles localement bornés. Dans la proposition qui suit, l'unicité doit être comprise après identification des processus indistinguables.

Proposition 3.5. *Soit ∇ une connexion sans torsion et soit $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ une Δ-semimartingale. Il existe une unique application linéaire de l'espace des processus prévisibles localement bornés $\alpha_t \in T(V)$ au-dessus de X_{t-} dans l'espace des semimartingales réelles telle que, si $\int_0^\cdot \alpha_s dX_s$ désigne l'image de $\alpha_\cdot$, on ait*
(a) si $\alpha_t = \phi_{t-}$ pour un ϕ_t càdlàg, $\int_0^\cdot \alpha_s dX_s$ coïncide avec l'intégrale $\int_0^\cdot \phi_{s-} dX_s$ définie précédemment;
(b) si g_t est un processus prévisible réel localement borné,

$$\int_0^t g_s \alpha_s dX_s = \int_0^t g_s d\Big(\int_0^\cdot \alpha_r dX_r\Big).$$

De plus le saut en t de $\int_0^\cdot \alpha_s dX_s$ est $\alpha_t \Delta X_t$.

Démonstration. Pour l'existence, supposons que X_t prend ses valeurs dans une carte U (la généralisation ne pose pas de problèmes). Avec les notations précédentes, posons $\beta_t = \delta^\star_{X_{t-}}(\alpha_t)$ et

$$I_t(\alpha) = \int_0^t \beta_s dZ_s + \int_0^t \beta_s \rho(Z_{s-}) d[Z,Z]_s$$
$$+ \sum_{s \le t} \beta_s\Big(\delta_{X_{s-}}(\Delta X_s) - \Delta Z_s - \rho(Z_{s-})\langle \Delta Z_s, \Delta Z_s\rangle\Big).$$

Alors I_t vérifie les conditions de la proposition. Pour vérifier l'unicité, remarquons que nous pouvons construire d processus càdlàg adaptés $\phi_t^i \in T^\star_{X_t}(V)$, $1 \leq i \leq d$, tels que pour tout t, $\phi_t = (\phi_t^1, \ldots, \phi_t^d)$ forme une base de $T^\star_{X_t}(V)$; ϕ_t est donc un isomorphisme de $T_{X_t}(V)$ sur $\mathbb{R}^d$ et on note ϕ_t^{-1} son inverse. Si $I_t(\alpha)$ est une application vérifiant les conditions de la proposition, on a nécessairement

$$I_t(\alpha) = \int_0^t \alpha_s \phi_{s-}^{-1} d\Big(\int_0^\cdot \phi_{r-} dX_r\Big).$$

□

Exemple 1 (suite). Dans le cas euclidien, l'intégrale ainsi construite coïncide avec l'intégrale de Itô usuelle.

Exemple 3 (suite). Pour $x \in V$, soit $p(x)$ la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $T_x(V)$; ainsi $\gamma(x,y)$ est égal à $p(x)(y-x)$. En notant $\overline{X}_t$ l'image de X_t par le plongement $V \subset \mathbb{R}^n$, on peut en déduire que l'intégrale pour le connecteur γ vaut

$$\int_0^T \alpha_t dX_t = \int_0^T \alpha_t p(X_{t-}) d\overline{X}_t \tag{5}$$

où le membre de droite est une intégrale de Itô usuelle. Si maintenant $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ est une Δ-semimartingale, l'intégrale de Itô pour la connexion de Levi-Cività de V vaut

$$\int_0^T \alpha_t dX_t = \int_0^T \alpha_t p(X_{t-}) d\overline{X}_t + \sum_{t \leq T} \alpha_t (\Delta X_t - p(X_{t-}) \Delta \overline{X}_t).$$

Cela permet de calculer l'intégrale de Itô pour les connecteurs des exemples 4 et 5 (car ces connecteurs définissent la même connexion sans torsion).

On peut également définir des intégrales liées à la variation quadratique de Y et généralisant la variation quadratique euclidienne. Ces intégrales ne dépendent pas du choix d'une connexion sans torsion. On notera $B(V)$ le fibré des applications bilinéaires sur $T_x(V) \times T_x(V)$, $x \in V$.

Proposition 3.6. *Soit $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ une Δ-semimartingale. Il existe une unique application linéaire de l'espace des processus prévisibles localement bornés $\alpha_t \in B(V)$ au-dessus de X_{t-} dans l'espace des semimartingales réelles telle que, si $\int_0^\cdot \alpha_s d[X,X]_s$ désigne l'image de α, on ait*
(a) si $\alpha_t = \phi_{t-}$ pour ϕ_t càdlàg et si (t_k^N) est une suite de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0, alors pour tout connecteur γ,

$$\int_0^T \phi_{t-} d[X,X]_t = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \phi_{t_k^N} \langle \gamma(X_{t_k^N}, X_{t_{k+1}^N}), \gamma(X_{t_k^N}, X_{t_{k+1}^N}) \rangle$$
$$+ \sum_{t \leq T} \Big(\phi_{t-} \langle \Delta X_t, \Delta X_t \rangle - \phi_{t-} \langle \gamma(X_{t-}, X_t), \gamma(X_{t-}, X_t) \rangle \Big);$$

(b) si g_t est un processus prévisible réel localement borné,

$$\int_0^t g_s\alpha_s d[X,X]_s = \int_0^t g_s d\Big(\int_0^\cdot \alpha_r d[X,X]_r\Big).$$

De plus le processus

$$\int_0^t \alpha_s d[X,X]_s^c = \int_0^t \alpha_s d[X,X]_s - \sum_{s\le t} \alpha_s\langle \Delta X_s, \Delta X_s\rangle$$

est continu, dépend de X_t mais pas des sauts ΔX_t.

Nous ne donnerons pas la démonstration de cette proposition qui suit les mêmes lignes que la construction de l'intégrale de Itô. Notons seulement que dans une carte locale U, si β_t est la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ représentant α_t dans cette carte alors

$$\int_0^t \alpha_s d[X,X]_s = \int_0^t \beta_s d[Z,Z]_s + \sum_{s\le t} \big(\alpha_s\langle \Delta X_s, \Delta X_s\rangle - \beta_s\langle \Delta Z_s, \Delta Z_s\rangle\big)$$

et

$$\int_0^t \alpha_s d[X,X]_s^c = \int_0^t \beta_s d[Z,Z]_s^c.$$

On peut aussi remarquer que la variation quadratique de $\int_0^t \alpha_s dX_s$ est $\int_0^t \alpha_s \otimes \alpha_s d[X,X]_s$.

Proposition 3.7 (formule de Itô). *Soit $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ une Δ-semimartingale, soit ∇ une connexion sans torsion et soit f une fonction régulière sur V. Alors*

$$\begin{aligned} f(X_t) =& f(X_0) + \int_0^t f'(X_{s-})dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d[X,X]_s^c \\ &+ \sum_{s\le t} \big(f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\big). \end{aligned}$$

Remarque. On a ainsi décomposé $f(X_t) - f(X_0)$ en une somme de trois termes. Le premier (l'intégrale de Itô) fait intervenir la connexion et les sauts, le second seulement la connexion (à travers f'') et le troisième seulement les sauts.

Démonstration. Par définition du hessien de f (voir (2)), si γ est un connecteur induisant ∇, on a

$$f(y) - f(x) = f'(x)\gamma(x,y) + \frac{1}{2}f''(x)\langle\gamma(x,y),\gamma(x,y)\rangle + \overline{f}(x,y)$$

où $\overline{f}(x,y)$ est dominé par $|y-x|^3$ quand (x,y) tend vers la diagonale. Si (t_k^N) est une suite de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0, on peut appliquer cette formule à $f(X_{t_{k+1}^N}) - f(X_{t_k^N})$ et en sommant en k, on obtient une décomposition de $f(X_T) - f(X_0)$ en trois sommes. Les résultats précédents montrent alors que la première somme converge quand $N \to \infty$ vers $\int_0^T f'(X_{t-})dX_t$ plus un processus à variation finie purement discontinu (PVFPD), que la deuxième somme converge vers $\frac{1}{2}\int_0^T f''(X_{s-})d[X,X]_s^c$ plus un PVFPD et que la troisième somme converge vers un PVFPD. Donc on a montré que la différence entre les deux membres de la formule du théorème est nécessairement un PVFPD; pour conclure, il suffit donc de vérifier que les deux membres ont les mêmes sauts. □

4. Martingales

Définition 4.1. *Soit $Y_t = (\Delta X_t, X_t)$ une Δ-semimartingale et soit ∇ une connexion sans torsion. On dira que Y_t est une martingale si pour tout processus prévisible localement borné $\alpha_t \in T^*(V)$ au-dessus de X_{t-}, le processus $\int_0^t \alpha_s dX_s$ est une martingale locale réelle.*

Cette définition généralise les martingales à temps discret; comme pour celles-ci, nous ne précisons pas que la martingale est seulement "locale" car nous ne pouvons définir intrinsèquement une notion non locale en temps. Comme en temps discret, cette définition est peu restrictive et on peut la préciser en utilisant un connecteur multivoque Γ induisant ∇; si Y_t est à valeurs dans Γ, on parle de Γ-martingale; de même, si γ est un connecteur, on dit que X_t est une γ-martingale si $(\gamma(X_{t-}, X_t), X_t)$ est une Δ-martingale pour la connexion induite par γ.

Il est possible de trouver diverses conditions équivalentes à la définition des martingales. Soit $R(V)$ le fibré des repères, c'est-à-dire le fibré au-dessus de V dont la fibre au-dessus de x est l'espace des isomorphismes de $T_x(V)$ sur $\mathbb{R}^d$; soit $\Xi_t \in R(V)$ un processus prévisible localement borné au-dessus de X_{t-}; alors $(\Delta X_t, X_t)$ est une martingale si et seulement si $\int_0^t \Xi_s dX_s$ est une martingale locale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (ce processus est appelé le développement de $(\Delta X_t, X_t)$ le long de Ξ_t); en effet, pour tout $\alpha_t \in T^*(V)$ au-dessus de X_{t-}, on a

$$\int_0^t \alpha_s dX_s = \int_0^t \alpha_s \Xi_s^{-1} d\Big(\int_0^{\cdot} \Xi_r dX_r\Big).$$

La formule de Itô permet de donner une autre caractérisation des martingales; on peut montrer que $(\Delta X_t, X_t)$ est une martingale si et seulement si pour toute fonction régulière f, le processus

$$f(X_t) - \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_{s-})d[X,X]_s^c - \sum_{s\le t}\big(f(X_s) - f(X_{s-}) - f'(X_{s-})\Delta X_s\big)$$

est une martingale locale. Enfin, si X_t prend ses valeurs dans une carte locale U, c'est une martingale si et seulement si le processus

$$Z_t + \int_0^t \rho(Z_{s-})d[Z,Z]_s^c + \sum_{s\leq t} \left(\delta_{X_{s-}}(\Delta X_s) - \Delta Z_s\right)$$

est une martingale locale. On a ainsi généralisé les diverses caractérisations du cas continu (voir [4]).

Exemple 1 (suite). Dans le cas euclidien, notre notion coïncide avec la notion classique de martingale locale.

Exemple 3 (suite). Pour le connecteur de cet exemple, d'après (5), X_t est une γ-martingale si et seulement si $\int_0^t p(X_{s-})d\overline{X}_s$ est une martingale locale euclidienne. Cette condition est équivalente à l'existence d'une une décomposition $\overline{X}_t = M_t + V_t$ pour laquelle $\int_0^t p(X_{s-})dV_s$ est nul (dans le cas continu on retrouve une caractérisation déjà connue).

Décrivons rapidement le lien entre cette notion de martingale et l'étude de certaines applications harmoniques. Soit ν_t une diffusion avec sauts dont l'espace d'état est une variété E et dont le générateur infinitésimal est noté $\mathcal{L}$: pour toute fonction régulière f sur E satisfaisant une condition d'intégrabilité (liée aux sauts de ν_t), f est dans le domaine de $\mathcal{L}$ et le processus $f(\nu_t) - \int_0^t \mathcal{L}f(\nu_s)ds$ est une martingale locale. Fixons un connecteur γ sur V. Si g est une application régulière de E dans V, nous désirons savoir quand $g(\nu_t)$ est une γ-martingale. En fait on peut montrer que si une condition d'intégrabilité est satisfaite, il existe une application régulière $\mathcal{L}g$ de E dans $T(V)$ au-dessus de g telle que pour tout processus $\alpha_t \in T^\star(V)$ prévisible localement borné au-dessus de $g(\nu_{t-})$, le processus

$$\int_0^t \alpha_s dg(\nu_s) - \int_0^t \alpha_s \mathcal{L}g(\nu_s)ds$$

est une martingale locale. Alors chercher les fonctions $\mathcal{L}$-harmoniques à valeurs dans V, c'est-à-dire solutions de $\mathcal{L}g = 0$ est équivalent à la recherche des fonctions régulières g telles que $g(\nu_t)$ soit une martingale pour toute condition initiale ν_0. Dans le cas continu, ce problème est abordé dans [9], [13].

5. Transport

Etant donnés une semimartingale X_t à valeurs dans V et un vecteur tangent en X_0, nous désirons transporter ce vecteur le long de la trajectoire de X_t et ainsi obtenir un processus dans $T(V)$ au-dessus de X_t; le transport est décrit par une application linéaire de $T_{X_0}(V)$ dans $T_{X_t}(V)$, le vecteur transporté étant alors l'image du vecteur initial par cette application linéaire. Nous noterons $L(V)$ le fibré vectoriel de $V \times V$ dont la fibre au-dessus de (x, y) est l'espace $L_{x,y}(V)$ des applications linéaires de $T_x(V)$ dans $T_y(V)$. L'objet géométrique de base sera la notion de transporteur que nous allons maintenant définir.

Définition 5.1. *Un transporteur est une application régulière λ de $V \times V$ dans $L(V)$ telle que $\lambda(x, y) \in L_{x,y}(V)$ et $\lambda(x, x)$ soit l'identité; le transporteur est dit inversible si les $\lambda(x, y)$ sont inversibles. Deux transporteurs λ_1 et λ_2 sont dits équivalents jusqu'à l'ordre $p \in \mathbb{N}^\star$ si $\lambda_2(x, y) - \lambda_1(x, y)$ est au plus d'ordre $|y - x|^{p+1}$ près de la diagonale. Une classe d'équivalence de transporteurs à l'ordre 1 sera appelée connexion; une classe d'équivalence à l'ordre 2 sera appelée transporteur infinitésimal d'ordre 2.*

Définition 5.2. *En notant 1_x l'identité de $T_x(V)$ et π la projection de $L(V)$ sur $V \times V$, un transporteur multivoque est une partie fermée Λ de $L(V)$ telle qu'il existe un transporteur λ et un voisinage W de $\{1_x; x \in V\}$ dans $L(V)$ satisfaisant*

$$\Lambda \cap W = \{\tau \in W; \quad \tau = (\lambda \circ \pi)(\tau)\}.$$

Il existe toujours des transporteurs sur V; en revanche il peut y avoir une obstruction topologique à l'existence d'un transporteur inversible. Pour que nos définitions soient cohérentes, il vaudrait mieux qu'une connexion sans torsion soit un cas particulier de connexion; si γ est un connecteur et si $\lambda(x, y)$ est défini par

$$\lambda(x, y) = \Big(\frac{\partial \gamma}{\partial y}(x, y)\Big)^{-1}$$

lorsque la dérivée de γ est inversible, l'ensemble des $\lambda(x, y)$ forme un transporteur multivoque (que nous appellerons transporteur dérivé de γ); en particulier, ce transporteur définit une connexion qui dépend du comportement de λ à l'ordre 1, c'est-à-dire du comportement de γ à l'ordre 2; on en déduit que cette connexion est entièrement caractérisée par la connexion sans torsion induite par γ, donc l'ensemble des connexions sans torsion peut se plonger dans l'ensemble des connexions.

Remarque (équivalence avec la notion classique de connexion). Si λ est un transporteur et si X et Y sont deux champs de vecteurs sur V, on peut définir un champ de vecteurs $\nabla_X Y$ par la condition suivante: si c_t est une courbe régulière sur V vérifiant $X(c_0) = \dot{c}_0$,

$$\nabla_X Y(c_0) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big[\lambda^{-1}(c_0, c_t)(Y(c_t)) - Y(c_0)\big].$$

On vérifie que l'on obtient ainsi un opérateur de dérivée covariante qui ne dépend que de la connexion contenant λ. Réciproquement, si on se donne un opérateur de dérivée covariante, on en déduit une notion de transport parallèle et le transport parallèle le long de géodésiques est un exemple de transporteur multivoque donc il définit une connexion. Nous avons ainsi défini une opération qui à une connexion fait correspondre un opérateur de dérivée covariante et une opération qui à un opérateur de dérivée covariante fait correspondre une connexion; on peut vérifier que ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre, donc notre notion de connexion est équivalente à la notion classique De plus une connexion peut être vue comme une connexion sans torsion si et seulement si l'opérateur de dérivée covariante associé est sans torsion au sens classique du terme.

Exemples. Si on se donne une connexion sur V, nous venons de remarquer que le transport parallèle le long de géodésiques est un exemple de transporteur. Nous pouvons aussi considérer le transporteur dérivé du connecteur géodésique; nous l'appellerons transport géodésique; il correspond à la notion classique de champ de Jacobi (voir [11]).

Exemple 2 (suite). En identifiant $T(G)$ à $G \times \mathcal{G}$, nous pouvons considérer le transporteur

$$\lambda(x,y) : (x, \vec{u}) \mapsto (y, \vec{u}).$$

Ce transporteur peut aussi être défini par $\lambda(x,y) = L'_y(e)\left(L'_x(e)\right)^{-1}$. Il s'agit en fait du transport parallèle correspondant à une connexion avec torsion (voir [7]).

Proposition 5.3. *Soit λ un transporteur, soit X_t une semimartingale à valeurs dans V et soit $(t_k^N, 0 \leq k \leq N)$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ dont le pas tend vers 0. Soit Ξ_0^N l'identité de $T_{X_0}(V)$ et définissons par récurrence*

$$\Xi_{k+1}^N = \lambda(X_{t_k^N}, X_{t_{k+1}^N})\Xi_k^N.$$

Alors Ξ_N^N converge en probabilité vers une variable Ξ_T ne dépendant pas du choix de la suite de subdivisions. Quand T varie, il existe une version de Ξ_T qui est une semimartingale à valeurs dans $L(V)$. Si λ est inversible, alors Ξ_T est inversible et Ξ_T^{-1} est une semimartingale.

Démonstration. On raisonne en utilisant un atlas et on utilise les notations de la Proposition 3.2. Comme précédemment, on traite le cas où X_t prend ses valeurs dans une seule carte U, l'étude du cas général se faisant en utilisant les temps θ_i comme en §3. Posons

$$\xi_k^N = \delta_{X_{t_k^N}} \Xi_k^N \delta_{X_0}^{-1}.$$

Alors ξ_k^N est un endomorphisme de $\mathbb{R}^d$, ξ_0^N est l'identité et en posant

$$\lambda_0(\delta(x), \delta(y)) = \delta_y \lambda(x,y) \delta_x^{-1}$$

on a

$$\xi^N_{k+1} = \lambda_0(Z_{t^N_k}, Z_{t^N_{k+1}})\xi^N_k.$$

En utilisant un développement de Taylor sur la fonction λ_0, on peut écrire

$$\begin{aligned}\xi^N_{k+1} =&\xi^N_k + \lambda_1(Z_{t^N_k}, \xi^N_k)(Z_{t^N_{k+1}} - Z_{t^N_k}) + \lambda_2(Z_{t^N_k}, \xi^N_k)\langle Z_{t^N_{k+1}} - Z_{t^N_k}, Z_{t^N_{k+1}} - Z_{t^N_k}\rangle \\ &+ \lambda_3(Z_{t^N_k}, Z_{t^N_{k+1}})\xi^N_k\end{aligned}$$

où $\lambda_1(z,\xi)$, $\lambda_2(z,\xi)$ sont linéaires par rapport à ξ, sont respectivement linéaires sur $\mathbb{R}^d$ et bilinéaires sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, et $\lambda_3(x,y)$ est dominé par $|y-x|^3$ près de la diagonale. Alors le Lemme 0.2 montre que ξ^N_N converge vers ξ_T où ξ_t est solution de

$$\xi_t = I + \int_0^t \lambda_1(Z_{s-}, \xi_{s-})dZ_s + \int_0^t \lambda_2(Z_{s-}, \xi_{s-})d[Z,Z]_s + \sum_{s\leq t} \lambda_3(Z_{s-}, Z_s)\xi_{s-}.$$

Donc en posant $\Xi_t = \delta^{-1}_{X_t}\xi_t\delta_{X_0}$, Ξ^N_N converge vers Ξ_T. Il reste à vérifier l'inversibilité de Ξ_t et Ξ_{t-} lorsque λ est inversible; cela peut se faire en étudiant la convergence de $(\Xi^N_N)^{-1}$ par la même méthode (dans la carte locale cela peut aussi se voir sur l'équation de ξ_t). □

Exemples. Dans le cas continu, si on choisit comme transporteur le transport parallèle ou le transport géodésique définis précédemment, on retrouve les transports stochastiques parallèle et géodésique de [11].

La méthode de la Proposition 5.3 permet également de construire un processus $(\Xi_{st}, s \leq t)$ représentant le transport de X_s à X_t; on a $\Xi_{0t} = \Xi_t$, Ξ_{ss} est l'identité, et $\Xi_{st} = \Xi_{ut}\Xi_{su}$ pour $s \leq u \leq t$. Les sauts de Ξ_t sont donnés par la formule

$$\Xi_t = \lambda(X_{t-}, X_t)\Xi_{t-}.$$

Nous allons un peu généraliser cette notion de transport en nous permettant de modifier les sauts. Cela va se faire en utilisant la notion de τ-semimartingale dans laquelle nous décrivons la façon dont un vecteur en X_{t-} est transporté en X_t.

Définition 5.4. *Soit ∇ une connexion. On dira que (X_t, τ_t) est une τ-semimartingale pour ∇ si X_t est une semimartingale à valeurs dans V, si τ_t est un processus adapté à valeurs dans $L(V)$ au-dessus de (X_{t-}, X_t) et si pour tout transporteur λ représentant ∇, le processus $(\tau_t - \lambda(X_{t-}, X_t))$ est sommable.*

Il suffit que la condition ci-dessus soit satisfaite pour un transporteur de ∇; elle l'est alors pour les autres mais pas nécessairement pour les transporteurs d'autres connexions. Si (X_t, τ_t) est à valeurs dans un transporteur multivoque Λ, nous parlerons de Λ-semimartingale. Nous allons modifier le transport Ξ_t construit à la proposition précédente de façon à ce que le transport à un instant de saut soit donné par τ_t au lieu de $\lambda(X_{t-}, X_t)$.

Proposition 5.5. *Supposons les conditions de la proposition précédente, soit (X_t, τ_t) une τ-semimartingale pour la connexion de λ et soit $(\Xi^0_{st}, s \leq t)$ le transport construit à l'aide de λ. Soit $(t_k^N, k \geq 0, N \geq 0)$ des temps d'arrêt tels que $t_k^N < t_{k+1}^N$ sur $\{t_k^N < \infty\}$, t_k^N appartienne presque sûrement à $\bigcup_j \{t_j^{N+1}\}$ et tels que $\bigcup_{k,N}\{t_k^N\}$ épuise tous les temps pour lesquels τ_t est différent de $\lambda(X_{t-}, X_t)$. Posons*

$$\Xi_T^N = \left(\Xi^0_{t_k^N,T}\right)\tau_{t_k^N}\left(\Xi^0_{t_{k-1}^N,t_k^N-}\right)\tau_{t_{k-1}^N}\cdots\tau_{t_1^N}\left(\Xi^0_{0,t_1^N-}\right)$$

sur $\{t_k^N \leq T < t_{k+1}^N\}$. Alors Ξ_T^N converge en probabilité vers une variable Ξ_T qui forme une semimartingale ne dépendant pas du choix des t_k^N. On a $\Xi_t = \tau_t \Xi_{t-}$; si tous les τ_t sont inversibles, Ξ_t est inversible et Ξ_t^{-1} est une semimartingale. De plus Ξ_t dépend de (X_t, τ_t) et du transporteur infinitésimal d'ordre 2 induit par λ, mais pas du transporteur particulier λ utilisé dans la construction.

Remarque. Le processus Ξ_t ne dépend pas seulement de la connexion; ce fait était déjà connu dans le cas continu où le transport stochastique dépend du choix d'une connexion sur $T(V)$ relevant celle de V.

Démonstration. Donnons une idée de la démonstration dans le cas où X_t prend ses valeurs dans une carte locale. En posant $\xi_t^N = \delta_{X_t}\Xi_t^N\delta_{X_0}^{-1}$, on peut vérifier en utilisant les notations de la Proposition 5.3 que ξ_t^N est solution de

$$\begin{aligned}\xi_t^N =& I + \int_0^t \lambda_1(Z_{s-}, \xi_{s-}^N)dZ_s + \int_0^t \lambda_2(Z_{s-}, \xi_{s-}^N)d[Z,Z]_s + \sum_{s\leq t}\lambda_3(Z_{s-}, Z_s)\xi_{s-}^N \\ &+ \sum_{t_k^N \leq t} \delta_{X_{t_k^N}}(\tau_{t_k^N} - \lambda(X_{t_k^N-}, X_{t_k^N}))\delta^{-1}_{X_{t_k^N-}}\xi_{t_k^N-}.\end{aligned}$$

Le Lemme 0.3 permet alors de montrer que ξ_t^N converge vers la solution de

$$\begin{aligned}\xi_t =& I + \int_0^t \lambda_1(Z_{s-}, \xi_{s-})dZ_s + \int_0^t \lambda_2(Z_{s-}, \xi_{s-})d[Z,Z]_s + \sum_{s\leq t}\lambda_3(Z_{s-}, Z_s)\xi_{s-} \\ &+ \sum_{s\leq t}\delta_{X_s}(\tau_s - \lambda(X_{s-}, X_s))\delta^{-1}_{X_{s-}}\xi_{s-}\end{aligned}$$

(on utilise ici la sommabilité de $(\tau_t - \lambda(X_{t-}, X_t))$. En utilisant le développement de λ_0, cette équation peut être réécrite sous la forme

$$\begin{aligned}\xi_t =& I + \int_0^t \lambda_1(Z_{s-}, \xi_{s-})dZ_s + \int_0^t \lambda_2(Z_{s-}, \xi_{s-})d[Z,Z]^c_s \\ &+ \sum_{s\leq t}\left(\delta_{X_s}\tau_s\delta^{-1}_{X_{s-}}\xi_{s-} - \lambda_1(Z_{s-}, \xi_{s-})\Delta Z_s - \xi_{s-}\right)\end{aligned}$$

où il apparaît que ξ_t ne dépend de λ qu'à travers λ_1 et λ_2 et donc ne dépend que du transporteur infinitésimal d'ordre 2 induit par λ. On a alors $\Xi_t = \delta_{X_t}^{-1}\xi_t\delta_{X_0}$. Quant à l'inversibilité si les τ_t sont inversibles, on remarque que l'ensemble des $t \in [0,T]$ tels que $\lambda(X_{t-}, X_t)$ n'est pas inversible est presque sûrement fini; on en déduit que Ξ_T^N est inversible pour N assez grand (dès que les t_k^N épuisent cet ensemble), et on peut alors montrer la convergence des $(\Xi_t^N)^{-1}$. □

Etant donnés un transporteur infinitésimal d'ordre 2 et une τ-semimartingale (X_t, τ_t) compatibles avec la même connexion, on a ainsi construit le transport stochastique des vecteurs tangents le long de X_t; ce transport peut par exemple servir à définir les caractéristiques locales des semimartingales à valeurs dans $T(V)$ (voir [11]). Si les τ_t sont inversibles et si on se donne un connecteur sur la variété (ou si on se donne une connexion sans torsion et des sauts ΔX_t), on peut alors considérer le développement de X_t le long de Ξ_t^{-1}, c'est-à-dire la semimartingale $\int_0^\cdot \Xi_s^{-1} dX_s$ à valeurs dans $T_{X_0}(V)$.

Exemple 2 (suite). Sur le groupe de Lie G, si on considère les connecteur et transporteur définis précédemment, le développement de X_t correspond au logarithme stochastique de [7], [6].

Pour terminer, signalons que la notion de transport que nous venons de décrire pourrait se généraliser aux autres fibrés au-dessus de V (y compris des fibrés non vectoriels).

Bibliographie

[1] J.M. Bismut, *Mécanique aléatoire*, Lect. N. in Math. **866**, Springer, 1981.

[2] R.W.R. Darling, Martingales in manifolds – Definition, examples, and behaviour under maps, dans: *Séminaire de Probabilités XVI, Supplément: Géométrie différentielle stochastique*, Lect. N. in Math. **921**, Springer, 1982.

[3] R.W.R. Darling, Approximating Ito integrals of differential forms and geodesic deviation, *Z. Wahrscheinl. verw. G.* **65** (1984), 563–572.

[4] M. Emery, *Stochastic calculus in manifolds*, Universitext, Springer, 1989.

[5] M. Emery et G. Mokobodzki, Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété, dans ce volume.

[6] A. Estrade, *Calcul stochastique discontinu sur les groupes de Lie*, Thèse de Doctorat, Univ. Orléans, 1990.

[7] M. Hakim-Dowek et D. Lépingle, L'exponentielle stochastique des groupes de Lie, dans: *Séminaire de Probabilités XX*, Lect. N. in Math. **1204**, Springer, 1986.

[8] W. Herer, Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans un espace métrique à courbure négative, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I,* **306** (1988), 681–684.

[9] W.S. Kendall, Probability, convexity, and harmonic maps with small image I: uniqueness and fine existence, *Proc. London Math. Soc.* **61** (1990), 2, 371–406.

[10] P.A. Meyer, Géométrie stochastique sans larmes, dans: *Séminaire de Probabilités XV*, Lect. N. in Math. **850**, Springer, 1981.

[11] P.A. Meyer, Géométrie différentielle stochastique (bis), dans: *Séminaire de Probabilités XVI, Supplément: Géométrie différentielle stochastique*, Lect. N. in Math. **921**, Springer, 1982.

[12] J. Picard, Convergence in probability for perturbed stochastic integral equations, *Probab. Th. Rel. Fields* **81** (1989), 383-452.

[13] J. Picard, Martingales on Riemannian manifolds with prescribed limit, *J. Functional Anal.*, à paraître.

[14] L. Schwartz, Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle, dans: *Séminaire de Probabilités XVI, Supplément: Géométrie différentielle stochastique*, Lect. N. in Math. **921**, Springer, 1982.