SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

XAVIER FERNIQUE

Convergence en loi de fonctions aléatoires continues ou cadlag, propriétés de compacité des lois

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 178-195
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__178_0>

Convergence en loi de fonctions aléatoires continues ou cadlag, propriétés de compacité des lois.

Xavier Fernique (Strasbourg)

0. Introduction.

Nous étudions les propriétés de convergence en loi des fonctions aléatoires à valeurs dans un espace lusinien. Nous présenterons deux situations, celle des fonctions aléatoires continues sur un espace métrique compact $T = (T, \delta)$ et celle des fonctions aléatoires continues à droite ayant des limites à gauche (dites cadlag.) sur $T = [0, 1]$, toutes à valeurs dans un espace lusinien régulier E ; les références de base seront l'ouvrage de Billingsley ([1]) dans le cas où $E = \mathbf{R}$ et l'article de Jakubowski ([7]) qui présente dans un cadre différent la plupart des propriétés développées ici.

J'ai précédemment esquissé une telle étude dans [5] et [6] où les preuves sont seulement données dans le cas des fonctions continues et où les énoncés sont partiellement faux dans le cas des fonctions cadlag. Je donne donc ici une présentation plus complète et des preuves détaillées.

On commencera par définir sur l'espace $\mathbb{C}(T, E)$ des fonctions continues sur T à valeurs dans E et sur l'espace $\mathbb{D}(T, E)$ des fonctions cadlag. sur T à valeurs dans E des topologies raisonnables ; sur $\mathbb{C}(T, E)$, l'emploi de la convergence uniforme s'impose, mais quelle structure uniforme choisir pour cela sur E ? Sur $\mathbb{D}(T, E)$, la définition d'une topologie de Skorohod canonique exige de même quelques précautions, nécessaires déjà si E est polonais et peut être muni de plusieurs distances compatibles avec sa topologie.

Par ailleurs, les tribus à utiliser sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$ sont imposées par la nature même des fonctions aléatoires et indépendamment des topologies sur ces ensembles : les fonctions aléatoires sur T à valeurs dans E sont liées à la tribu produit $\mathbb{B}(E^T)$; nous devrons donc utiliser sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$ les tribus induites par cette tribu produit ; ces tribus induites seront peut-être des sous-tribus strictes des tribus définies par les topologies de ces espaces s'ils ne sont pas lusiniens, de sorte que les fonctions continues et bornées ne seront peut-être pas toutes mesurables. Dans ces conditions, la définition générale usuelle ([3]) de la topologie de la convergence étroite des mesures devra être adaptée avec soin ; on constatera pourtant que ces difficultés s'évanouissent si on limite cette topologie aux mesures de Radon sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$.

1. Les topologies sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$.

1.1 La topologie de la convergence uniforme sur $\mathbb{C}(T, E)$.

Soient $T = (T, \delta)$ un espace métrique compact et E un espace lusinien régulier. On sait alors ([4], I.6.1), ([2], IX, 76) que E est paracompact et parfaitement normal ; en particulier il est uniformisable et nous pouvons donc noter $(d_i, i \in I)$ une famille de pseudo-distances sur E définissant sa topologie. Nous munissons l'ensemble $\mathbb{C}(T, E)$ des fonctions continues sur T à valeurs dans E de la famille $(D_i, i \in I)$ de pseudo-distances définies par :

1.1.1 $$D_i(x, y) = \sup\{d_i(x(t), y(t)), t \in T\},$$

et de la topologie qu'elles engendrent. Cette topologie dépend de la seule topologie de E ; en effet :

Proposition 1.1.2 : *Deux familles* $(d_i, i \in I)$, $(d'_j, j \in J)$ *de pseudo-distances définissant la topologie de* E *définissent la même topologie sur* $\mathbb{C}(T, E)$.

Démonstration : Soit Φ un filtre sur $\mathbb{C}(T, E)$ convergeant vers a pour la topologie associée à la famille $(d_i, i \in I)$; alors puisque T est compact et que a est continue sur T, l'image a(T) est une partie compacte K de E. Fixons $\varepsilon > 0$ et $j \in J$, la pseudo-distance d'_j est uniformément continue sur K et il existe donc une partie finie I_0 de I et un nombre $\eta > 0$ tels que :

$$x \in K,\ y \in E,\ \sup_{i \in I_0} d_i(x, y) \leq \eta \ \Rightarrow\ d'_j(x, y) \leq \varepsilon .$$

Puisque le filtre Φ converge vers a pour la topologie associée à $(d_i, i \in I)$, il existe un élément φ du filtre Φ tel que :

$$\forall\, t \in T,\ \forall\, x \in \varphi,\ \forall\, i \in I_0,\ d_i(a(t), x(t)) \leq \eta \ ;$$

ceci sufit à montrer que Φ converge aussi vers a pour la topologie associée à $(d'_j, j \in J)$; c'est le résultat.

1.1.3 La proposition ci-dessus justifie la dénomination de topologie de la convergence uniforme. Cette topologie peut par exemple être définie à partir de l'ensemble de toutes les fonctions continues à valeurs réelles f sur E, des pseudo-distances d^f: $(x, y) \to | f(x) - f(y) | \wedge 1$ sur E et D^f : $(x, y) \to \sup\{| f\circ x(t) - f\circ y(t) | \wedge 1, t \in T\}$ sur $\mathbb{C}(T, E)$. Il en résulte :

Proposition 1.1.3 : *Sur* $\mathbb{C}(T, E)$, *la topologie de la convergence uniforme* $\mathbb{U}$ *est identique à la topologie* $\mathbb{T}$ *engendrée par les applications* $\hat{f} : x \to f\circ x,\ f \in \mathbb{C}(E, \mathbf{R})$, *de* $\mathbb{C}(T, E)$ *dans* $\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$ *muni de sa propre topologie de la convergence uniforme.*

1.2 La topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, E)$.

Soient $T = [0, 1]$ et E un espace lusinien régulier ; nous notons $(d_i, i \in I)$ une famille de pseudo-distances définissant la topologie de E. Pour des raisons techniques liées aux opérations qui suivront, nous devons supposer que cette famille $(d_i, i \in I)$ est *filtrante* au sens suivant :

1.2.0 $$\forall\ (i_1, i_2) \subset I, \exists\ i \in I : d_i \geq d_{i_1} \vee d_{i_2}.$$

Soit $(\Lambda, \|.\|)$ l'ensemble des applications continues strictement croissantes λ de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ muni de l'application $\|.\| : \lambda \to \sup\{|t - \lambda(t)|, t \in [0, 1]\}$. Nous munissons l'ensemble $\mathbb{D}(T, E)$ des fonctions cadlag. sur T à valeurs dans E de la famille $(\Delta_i, i \in I))$ de pseudo-distances définies par :

1.2.1 $$\Delta_i(x, y) = \inf\{\ \varepsilon > 0 : \exists\ \lambda \in \Lambda : \|\lambda\| \leq \varepsilon, \sup_{t \in T} d_i(x(t), y \circ \lambda(t)) \leq \varepsilon\}$$

et de la topologie qu'elles engendrent. Cette topologie, *dite de Skorohod*, dépend de la seule topologie de T ; en effet :

Proposition 1.2.2 : *Deux familles filtrantes* $(d_i, i \in I)$, $(d'_j, j \in J)$ *de pseudo-distances définissant la topologie de* E *définissent la même topologie sur* $\mathbb{D}(T, E)$.

Remarque : Si la famille $(d'_j, j \in J)$ définit la topologie de E sans pourtant être filtrante, la famille $(\Delta'_j, j \in J)$ des pseudo-distances associées sur $\mathbb{D}(T, E)$ peut définir une autre topologie même dans le cas simple où $E = \mathbf{R}^2$. Posons en effet dans ce cas :

$$d^1(x, y) = |x_1 - y_1|,\ d^2(x, y) = |x_2 - y_2|,\ d = d^1 + d^2 ;$$

alors Δ associé à d définit la topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, \mathbf{R}^2)$; par contre, (Δ^1, Δ^2) définit une topologie strictement moins fine comme le montre l'exemple suivant où on pose pour $n > 2$:

$$x_n^1 = \mathbf{I}_{[1/2+1/n,\ 1]},\ x_n^2 = \mathbf{I}_{[1/2+1/2n,\ 1]},\ a = \mathbf{I}_{[1/2,\ 1]}\ ;$$

on a alors :

$$\Delta^1\{(x_n^1, x_n^2), (a, a)\} = 1/n,\ \Delta^2\{(x_n^1, x_n^2), (a, a)\} = 1/2n\ ,\ \Delta\{(x_n^1, x_n^2), (a, a)\} = 1\ ;$$

la suite $\{(x_n^1, x_n^2), n \geq 1\}$ converge donc vers (a, a) pour la topologie définie par (Δ^1, Δ^2) sans converger pour la topologie de Skorohod définie par Δ.

Démonstration de la proposition : Soit Φ un filtre sur $\mathbb{C}(T, E)$ convergeant vers a pour la topologie associée à $(d_i, i \in I)$; alors puisque T est compact et que a est cadlag. sur T, l'adhérence de l'image est une partie compacte K de E. Fixons $\varepsilon > 0$ et $j \in J$, la pseudo-distance d'_j est uniformément continue sur K et, $(d_i, i \in I)$ étant filtrante, il existe *un élément* i_0 de I et un nombre $\eta > 0$ tels que :

$$x \in K, y \in E,\ d_{i_0}(x, y) \leq \eta\ \Rightarrow\ d'_j(x, y) \leq \varepsilon\ .$$

Puisque le filtre Φ converge vers a pour la topologie associée à $(d_i, i \in I)$, il existe un élément φ du filtre Φ et pour tout élément x de φ un élément λ de Λ tels que :

$$\forall\, t \in T,\ |\lambda(t) - t| \leq \varepsilon \wedge \eta,\ d_{i_0}(x(t), a\circ\lambda(t)) \leq \eta\ ;$$

on en déduit :

$$\forall\, t \in T,\ |\lambda(t) - t| \leq \varepsilon,\ d'_j(x(t), a\circ\lambda(t)) \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire :

$$\forall\, x \in \varphi,\ D'_j(x, a) \leq \varepsilon\ ;$$

ceci sufit à montrer que Φ converge aussi vers a pour la topologie associée à $(d'_j, j \in J)$; c'est le résultat.

1.2.3 La proposition ci-dessus ne permet pas de définir directement la topologie de Skorohod à partir de l'ensemble des fonctions continues réelles f sur E, des pseudo-distances d^f sur E et Δ^f sur $\mathbb{D}(T, E)$; en effet la famille $\{d^f, f \in \mathbb{C}(E, \mathbf{R})\}$ n'est pas filtrante au sens 1.2.0 ; nous démontrerons pourtant ultérieurement un énoncé applicable à $\mathbb{D}(T, E)$ et analogue à la proposition 1.1.3 ; sa démonstration radicalement différente s'appuiera sur l'analyse détaillée des parties compactes de $\mathbb{D}(T, E)$ pour la topologie de Skorohod.

1.2.4 **Remarque** : Les propositions 1.1.2 et 1.2.2 montrent que si K est une partie compacte de E, alors la topologie uniforme sur $\mathbb{C}(T, E)$ et la topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, E)$ induisent respectivement la topologie uniforme sur $\mathbb{C}(T, K)$ et la topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, K)$; on sait par ailleurs ([5], 1.9) puisque E est lusinien régulier qu'il existe des suites séparantes $(f_m, m \in \mathbf{N})$ de fonctions réelles continues sur E ; il existe alors aussi certaine distance (séparante) continue sur E, par exemple la distance d définie par :

1.2.5 $$d(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(m+1)}\, d^{f_m}(x, y).$$

Si K est une partie compacte de E, la restriction de d à K suffit à définir la topologie et la structure uniforme de K ; les propositions 1.1.2 et 1.2.2 montrent alors que les restrictions de D et Δ à $\mathbb{C}(T, K)$ et à $\mathbb{D}(T, K)$ définissent respectivement sur ces ensembles la topologie uniforme et la topologie de Skorohod ; on sait (cf. [1]) que ces deux topologies sont polonaises.

2. Les parties compactes de $\mathbb{C}(T, E)$ et de $\mathbb{D}(T,E)$.

2.1 L'outil de base pour analyser les parties compactes de $\mathbb{C}(T, E)$ et celles de $\mathbb{D}(T, E)$ est le lemme suivant :

Lemme 2.1.1 : *Soit* $\mathbb{K}$ *une partie compacte de* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. de* $\mathbb{D}(T, E)$*); alors l'adhérence* K *de l'ensemble* $\{x(t)\ ;\ t \in T, x \in \mathbb{K}\}$ *est compacte dans* E.

Démonstration : le résultat dans $\mathbb{C}(T, E)$ est immédiat ; nous détaillons la preuve dans $\mathbb{D}(T, E)$ et pour cela nous montrons que l'ensemble $K = \{x(t), x^-(t) ; t \in T, x \in \mathbb{K}\}$ est compact dans E ; soit $\{U_\alpha, \alpha \in A\}$ un recouvrement ouvert de K, nous montrons qu'on peut en extraire un recouvrement fini.

Dans le cas contraire en effet, on poserait $V_\alpha = \{(x, t) ; t \in T, x \in \mathbb{K}, x(t) \notin U_\alpha \text{ ou } x^-(t) \notin U_\alpha\}$, $\alpha \in A$; alors la famille V_α, $\alpha \in A$, engendrerait un filtre sur le compact $\mathbb{K} \times T$ et il existerait un élément (x_0, t_0) adhérent à ce filtre ; il existerait aussi alors deux éléments α_1 et α_2 de A tels que $x_0(t_0)$ appartienne à U_{α_1}et $x_0^-(t_0)$ à U_{α_2}. Soit $(d_i, i \in I)$ une famille filtrante de pseudo-distances sur E définissant sa topologie, il existerait enfin un élément i de I et un nombre $\varepsilon > 0$ tels qu'on ait l'implication :

$$x \in E,\ d_i(x, x_0(t_0)) \wedge d_i(x, x_0^-(t_0)) \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad x \in U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2},$$

et aussi puisque x_0 est cadlag. en t_0, un nombre $\eta > 0$ tel que :

$$|t - t_0| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad d_i(x_0(t), x_0(t_0)) \wedge d_i(x_0(t), x_0^-(t_0)) \leq \varepsilon/2 .$$

Nous fixons ces éléments α_1 et α_2 de A, l'élément i de I, les nombres ε et $\eta > 0$ et nous montrons que leurs propriétés sont contradictoires. Le fait que (x_0, t_0) soit adhérent au filtre engendré par les V_α, $\alpha \in A$, montre en effet qu'il existe un élément (x, t) de $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$ et un élément λ de Λ tels que simultanément :

$$|t - t_0| \leq \eta/2,\ \ \sup\{|\lambda(s) - s|, s \in T\} \leq \eta/2,\ \sup\{d_i(x(s), x_0(\lambda(s))), s \in T\} \leq \varepsilon/2 ;$$

on aura alors aussi :

$$|t_0 - \lambda(t)| \leq |t_0 - t| + |\lambda(t) - t| \leq \eta,$$

et par suite :

$$d_i(x(t), x_0(t_0)) \wedge d_i(x(t), x_0^-(t_0)) \leq$$
$$d_i(x(t), x_0(\lambda(t))) + d_i(x_0(\lambda(t)), x_0(t_0)) \wedge d_i(x_0(\lambda(t)), x_0^-(t_0)) \leq \varepsilon,$$

de sorte que x(t) appartient à $U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2}$; ceci est contradictoire avec le fait que (x, t) appartient à $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2}$. La compacité de K est donc démontrée.

Ce lemme 2.1.1 montre que si C est relativement compact dans $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. dans $\mathbb{D}(T, E)$), on peut l'identifier à un sous-ensemble d'un $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. d'un $\mathbb{D}(T, K)$) où K est une partie compacte de E ; on constate alors que $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. $\mathbb{D}(T, K)$) est fermé dans $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. dans $\mathbb{D}(T, E)$) et on en déduit :

Proposition 2.1.2 : *Pour qu'un sous-ensemble* C *de* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. de* $\mathbb{D}(T, E)$*) soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il existe une partie compacte* K *de* E *vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(1) *L'ensemble* $\{x(t) ; t \in T, x \in C\}$ *est contenu dans* K,

(2) C *est relativement compact dans l'espace polonais* $\mathbb{C}(T, K)$ *(resp. dans* $\mathbb{D}(T, K)$*).*

La propriété (2) ci-dessus se traduit simplement ([1], Ch.3,119) tenant compte de la remarque 1.2.4. Pour toute pseudo-distance d sur E, tout $\eta > 0$ et tout x appartenant à $\mathbb{C}(T, E)$

(resp. à $\mathbb{D}(T, E)$), nous posons :

2.1.3 $$D(x, \eta) = \sup\{d(x(s), x(t))\ ;\ (s, t) \subset T,\ \delta(s, t) \leq \eta\},$$
$$\Delta(x, \eta) = \sup\{d(x(s), x(t)) \wedge d(x(t), x(u))\ ;\ (s, t, u) \subset T,\ s \leq t \leq u \leq s + \eta\} +$$
$$+ \sup\{d(x(0), x(t)) + d(x^-(1), x(1 - t))\ ;\ t \in T,\ 0 < t \leq \eta\}.$$

Théorème 2.1.4 : *Soit* d *une distance continue sur* E *; pour qu'un sous-ensemble* C *de* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. de* $\mathbb{D}(T, E)$*) soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

(1) *Il existe une partie compacte* K *de* E *telle que* $\{x(t)\ ;\ t \in T, x \in C\} \subset K$,

(2) $\lim_{\eta \to 0} \sup_{x \in C} D(x, \eta) = 0$, *(resp.* $\lim_{\eta \to 0} \sup_{x \in C} \Delta(x, \eta) = 0$*).*

On a vu en effet que sous la condition (1), la restriction de d à K est une distance définissant sa topologie ; on applique donc à (K, d) les critères classiques de compacité des sous-ensembles de l'espace polonais $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. de l'espace polonais $\mathbb{D}(T, K)$)

Dans le cas de $\mathbb{C}(T, E)$, la condition (2) du corollaire relative à D se manie facilement et on en déduit :

Corollaire 2.1.5 : *Soit* F *un ensemble séparant de fonctions continues réelles sur* E*. Pour qu'un sous-ensemble* C *de* $\mathbb{C}(T, E)$ *soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

(1) *Il existe une partie compacte* K *de* E *telle que* $\{x(t)\ ;\ t \in T, x \in C\} \subset K$,

(2) *Pour tout* $f \in F$, *l'ensemble* $f \circ C = \{f \circ x,\ x \in C\}$ *est relativement compact dans* $\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$.

Démonstration : La nécessité résulte du lemme 2.1.1 et de la proposition 1.1.3. Pour prouver la suffisance, on peut supposer $F = \{f_m,\ m \in \mathbb{N}\}$ dénombrable et utiliser les pseudo-distances d^{f_m} et la distance d définie sur E en 1.2.5. Si les propriétés (1) et (2) du corollaire sont vérifiées, fixons $\varepsilon > 0$ et un entier m tel que $2^{-m} \leq \varepsilon$; il existe alors (cf. (2)) un nombre $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, k \in [0, m],\ \forall\, x \in C,\ D^{f_k}(x, \eta) \leq \varepsilon\ ;$$

on en déduit :

$$\forall\, x \in C,\ D(x, \eta) \leq 2^{-m} + \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(k+1)} D^{f_k}(x, \eta) \leq \varepsilon\ ;$$

le théorème 2.1.4 permet donc de conclure.

2.2 Les parties compactes de $\mathbb{D}(T, E)$.

Dans le cas de $\mathbb{D}(T, E)$, la situation est plus complexe ; on se propose maintenant d'énoncer et de démontrer des résultats analogues au corollaire 2.1.5 et à la proposition 1.1.3 ; les outils spécialisés nécessaires sont énoncés dans le lemme technique suivant :

Lemme 2.2.1 : (a) *Soient* n *un entier positif,* $(x_1,\dots,x_n)$ *et* $(y_1,\dots,y_n)$ *deux suites de* n *nombres positifs, on a alors :*

$$[\sum_{i=1}^{n} x_i] \wedge [\sum_{j=1}^{n} y_j] \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i + x_j) \wedge (y_i + y_j),$$

(b) *Soient* (x_1, x_2) *et* (y_1, y_2) *deux couples de nombres réels, on a alors :*

$$[\,|x_1|+|x_2|\,] \wedge [\,|y_1|+|y_2|\,] \leq |x_1 + x_2| \wedge |y_1 + y_2| + 2\,[\,|x_1| \wedge |y_1| + |x_2| \wedge |y_2|\,].$$

Démonstration : (a) On utilise la relation :

$$a \wedge (b + c) \leq a \wedge b + a \wedge c \quad , \ (a, b, c) \subset \mathbb{R}^+ ;$$

par itération, on en déduit :

$$[\sum_{i=1}^{n} x_i] \wedge [\sum_{j=1}^{n} y_j] \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \wedge y_j \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i + x_j) \wedge (y_i + y_j),$$

c'est le premier résultat.

(b) Il s'agit d'évaluer la quantité $R = R_1 - R_2 - R_3$ où :

$$R_1 = (\,|x_1| + |x_2|\,) \wedge (\,|y_1| + |y_2|\,) \ , R_2 = |x_1 + x_2| \wedge |y_1 + y_2|,$$
$$R_3 = 2\,[\,|x_1| \wedge |y_1| + |x_2| \wedge |y_2|\,] ;$$

nous distinguons par éventualités successives :

(α) Si $|x_1| \leq |y_1|$ et $|x_2| \leq |y_2|$, alors $R \leq R_1 - R_3 \leq |x_1| + |x_2| - R_3 = 0$.

(β) De même si $|x_1| > |y_1|$ et $|x_2| > |y_2|$, alors $R \leq 0$.

(γ) Il suffit maintenant d'étudier le seul cas où $|x_1| \leq |y_1|$ et $|x_2| > |y_2|$; on a alors $R = R_1 - R_2 - 2(\,|x_1| + |y_2|\,)$ et on distingue encore deux éventualités :

(γ_1) Si $|x_1 + x_2| \leq |y_1 + y_2|$, alors $R = R_1 - |x_1 + x_2| - 2(\,|x_1| + |y_2|\,)$ et donc :

$$R \leq |x_1| + |x_2| - |x_1 + x_2| - 2\,|x_1| \leq 0,$$

(γ_2) si $|x_1 + x_2| > |y_1 + y_2|$, alors $R \leq |y_1| + |y_2| - |y_1 + y_2| - 2\,|y_1| \leq 0$.

On a donc montré que dans tous les cas, R est négatif ou nul, d'où le lemme.

2.2.2 Nous utiliserons le lemme 2.2.1 dans la situation suivante : soit $f = (f_1,\dots,f_n)$ une suite de n éléments de $\mathbb{C}(E, \mathbf{R})$; nous posons $d^f = \sum_{i=1}^{n} d^{f_i}$; dans ces conditions l'application du lemme et les notations 2.1.3 fournissent :

$$\forall\, x \in \mathbb{D}(T, E),\ \forall\, \eta > 0,\quad \Delta^f(x, \eta) \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [\Delta^{f_i+f_j} + \Delta^{2f_i} + \Delta^{2f_j}](x, \eta).$$

L'analogue du corollaire 2.1.5 s'énonce alors :

Corollaire 2.2.3 : *Soit* F *un ensemble séparant de fonctions continues réelles sur* E. *Pour qu'un sous-ensemble* C *de* $\mathbb{D}(T, E)$ *soit relativement compact, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux propriétés suivantes :*

(1) *Il existe une partie compacte* K *de* E *telle que* $\{x(t)\,;\, t \in T,\, x \in C\} \subset K$,

(2) *Pour tout* $(f, g) \subset F$, *l'ensemble* $(f+g)\circ C = \{(f+g)\circ x,\, x \in C\}$ *est relativement compact dans* $\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$.

Démonstration : La nécessité résulte du lemme 2.1.1 et de la proposition 1.1.3. Pour prouver la suffisance, on peut supposer $F = \{f_m,\, m \in \mathbf{N}\}$ dénombrable et utiliser les pseudo-distances d^{f_m} et la distance d définie sur E en 1.2.5. Si les propriétés (1) et (2) du corollaire sont vérifiées, fixons $\varepsilon > 0$ et un entier m tel que $2^{-m} \le \varepsilon/3$; il existe alors (cf. (2)) un nombre $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\, (i, j) \subset [0, m],\ \forall\, x \in C,\ \Delta^{f_i+f_j}(x, \eta) \le \varepsilon/3m^2,$$

et donc (cf. 2.2.2) :

$$\forall\, x \in C,\ \Delta^{(f_0,\dots,f_m)}(x, \eta) \le \varepsilon\ ;$$

on en déduit :

$$\forall\, x \in C,\ \Delta(x, \eta) \le \Delta^{(f_0,\dots,f_m)}(x, \eta)/2 + 3\, 2^{-(m+1)} \le \varepsilon\ ;$$

le théorème 2.1.4 permet donc de conclure.

2.2.4 Une autre définition de la topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, E)$.

Nous notons A un ensemble de fonctions continues réelles sur E *engendrant* sa topologie ; l'ensemble $\{d^f,\, f \in A\}$ est donc un ensemble de pseudo-distances qui engendre aussi la topologie de E, il n'est peut-être pas filtrant. Par contre, l'ensemble $\{d^f,\, f = (f_1,\dots f_n) \subset A,\, n \in \mathbf{N}\}$ est filtrant et peut donc être utilisé pour définir la topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, E)$ que nous noterons dans ce paragraphe $\mathbb{S}(E)$.

On peut envisager sur $\mathbb{D}(T, E)$ à partir de A une autre topologie ([6]) : A toute fonction continue réelle f sur E, nous avons associé l'application $\hat{f} : x \to f\circ x$ de $\mathbb{D}(T, E)$ dans $\mathbb{D}(T, \mathbf{R})$; cette application $\hat{f}$ est continue pour les topologies de Skorohod sur ces deux espaces ; nous notons alors $\mathbb{T}(A)$ la topologie sur $\mathbb{D}(T, E)$ engendrée par les applications $\widehat{f+g}$, $(f, g) \subset A$; $\mathbb{T}(A)$

est donc la topologie la moins fine pour laquelle les applications $f\hat{+}g$, $(f, g) \subset A$, de $\mathbb{D}(T, E)$ dans $\mathbb{D}(T, R)$ muni de la topologie de Skorohod $\mathbb{S}(R)$ sont toutes continues. Par construction, $\mathbb{T}(A)$ est moins fine que la topologie de Skorohod $\mathbb{S}(E)$. En fait :

Théorème 2.2.4 : *Soit* A *un ensemble de fonctions réelles continues sur* E *engendrant sa topologie ; alors la topologie* $\mathbb{T}(A)$ *définie ci-dessus par* A *sur* $\mathbb{D}(T, E)$ *est identique à la topologie de Skorohod* $\mathbb{S}(E)$.

Démonstration : Nous procédons en deux étapes .

(a) Supposons pour commencer que $E = \mathbf{R}^n$ et que A est l'ensemble des applications coordonnées de $\mathbf{R}^n$ que nous notons $p_1,\dots,p_n$. Dans ces conditions, $\mathbb{T}(A)$ est une topologie métrisable moins fine que la topologie métrisable $\mathbb{S}(E)$; le théorème 2.1.4 et le corollaire 2.2.3 expriment que ces deux topologies ont les mêmes parties compactes et donc les mêmes suites convergentes, elles sont alors identiques.

(b) Dans la situation générale, la topologie $\mathbb{S}(E)$ est engendrée (proposition 1.2.1) par les pseudo-distances $\Delta^{(f_1,\dots,f_n)}$, $(f_1,\dots f_n) \subset A$, $n \in N$; elle est donc engendrée aussi par les applications : $x \to (f_1 \circ x,\dots,f_n \circ x)$, $(f_1,\dots,f_n) \subset A$, de $\mathbb{D}(T, E)$ dans $\mathbb{D}(T, \mathbf{R}^n)$ muni de sa topologie de Skorohod $\mathbb{S}(\mathbf{R}^n)$, $n \in N$; par composition, l'étape (a) de la preuve montre alors que $\mathbb{S}(E)$ est engendrée par les applications : $x \to (p_i + p_j) \circ [f_1 \circ x,..,f_n \circ x]$, $(i, j) \subset [1, n]$, $(f_1,\dots,f_n) \subset A$, $n \in N$, de $\mathbb{D}(T, E)$ dans $\mathbb{D}(T, R)$ muni de la topologie $\mathbb{S}(R)$; c'est le résultat du théorème.

2.2.5 **Remarques :** (a) Si $E = \mathbf{R}^n$, les conditions (1) des corollaires 2.1.5 et 2.2.3 peuvent être supprimées ; dans la situation générale, on constate que ce n'est pas possible même si C est composé de fonctions constantes.

(b) L'introduction des sommes (f+g) d'éléments de F et de A dans le corollaire 2.2.3 et le théorème 2.2.4 est indispensable même dans le cas où $E = \mathbf{R}^2$ comme le montre l'exemple de la remarque 1.2.2.

3. Les tribus sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$; des exemples lusiniens.

3.1 On a indiqué dans l'introduction pourquoi le maniement des fonctions aléatoires privilégiait l'emploi sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$ des tribus induites par la tribu produit $\mathbb{B}(E^T)$; nous noterons $\Pi(\mathbb{C})$ et $\Pi(\mathbb{D})$ ces tribus induites ; nous disposons par ailleurs sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$ des tribus boréliennes définies respectivement par la topologie uniforme et la topologie de Skorohod ; nous les noterons $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{B}(\mathbb{D})$. Nous comparons maintenant ces différentes tribus.

Proposition 3.1.1 : *Les tribus* $\Pi(\mathbb{C})$ *et* $\Pi(\mathbb{D})$ *sont respectivement des sous-tribus des tribus boréliennes* $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{B}(\mathbb{D})$.

Démonstration : Les tribus $\Pi(\mathbb{C})$ et $\Pi(\mathbb{D})$ sont en effet l'une et l'autre engendrées par les applications : $x \rightarrow x(t)$, $t \in T$ de $\mathbb{C}(T, E)$ et de $\mathbb{D}(T, E)$ dans E ; au vu des générateurs de la tribu borélienne $\mathbb{B}(E)$, elles sont donc engendrées aussi par les applications : $x \rightarrow f \circ x(t) = \hat{f}(x)(t)$, $t \in T$, $f \in \mathbb{C}(E, \mathbf{R})$, de $\mathbb{C}(T, E)$ et de $\mathbb{D}(T, E)$ dans $\mathbf{R}$. Or les applications $\hat{f}$ sont des applications continues de $\mathbb{C}(T, E)$ et de $\mathbb{D}(T, E)$ dans $\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$ et dans $\mathbb{D}(T, \mathbf{R})$; de plus les différentes applications : $x \rightarrow x(t)$ sont boréliennes sur $\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$ et sur $\mathbb{D}(T, \mathbf{R})$. Les tribus $\Pi(\mathbb{C})$ et $\Pi(\mathbb{D})$ sont donc en fait engendrées par des fonctions boréliennes sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$; ce sont donc des sous-tribus des tribus boréliennes.

Proposition 3.1.2 : *Si* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp.* $\mathbb{D}(T, E)$*) est lusinien pour sa topologie uniforme (resp. sa topologie de Skorohod), alors la tribu* $\Pi(\mathbb{C})$ *(resp. la tribu* $\Pi(\mathbb{D})$*) est en fait identique à la tribu borélienne* $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ *(resp.* $\mathbb{B}(\mathbb{D})$*).*

Démonstration : Soient S une suite dense dans T et $(f_m, m \in \mathbf{N})$ une suite séparante de fonctions continues réelles sur E, alors $\Pi(\mathbb{C})$ (resp. $\Pi(\mathbb{D})$) contient la tribu engendrée par les applications : $x \rightarrow f_m \circ x(s)$, $m \in \mathbf{N}$, $s \in S$, qui forment une famille séparante et dénombrable de fonctions continues sur l'espace lusinien $\mathbb{C}(T, E)$ (resp.sur l'espace lusinien $\mathbb{D}(T, E)$) ; cette famille engendre donc ([5],1.10) la tribu borélienne $\mathbb{B}(\mathbb{C})$ (resp. $\mathbb{B}(\mathbb{D})$) d'où le résultat.

Proposition 3.1.3 : (a) *Pour toute partie fermée* F *de* E, $\mathbb{C}(T, F)$ *(resp.* $\mathbb{D}(T, F)$*) est un sous-ensemble de* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp.de* $\mathbb{D}(T, E)$*) appartenant à la tribu* $\Pi(\mathbb{C})$ *(resp.à la tribu* $\Pi(\mathbb{D})$*).*
(b) *Toute partie compacte* $\mathbb{K}$ *de* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. de* $\mathbb{D}(T, E)$*) appartient à la tribu* $\Pi(\mathbb{C})$ *(resp. à la tribu* $\Pi(\mathbb{D})$*).*

Démonstration : (a) Notons d'abord que pour tout t appartenant à T, l'ensemble $\{x : x(t) \in F\}$ appartient à $\Pi(\mathbb{C})$ (resp.à $\Pi(\mathbb{D})$). Soient alors F une partie fermée de F et S une suite dense dans T, on a :

$$\mathbb{C}(T, F) = \mathbb{C}(T, E) \cap \{ x : \forall t \in S, x(t) \in F\}$$
$$(\text{resp. } \mathbb{D}(T, F) = \mathbb{D}(T, E) \cap \{ x : \forall t \in S, x(t) \in F\})$$

d'où le premier résultat.

(b) Soit $\mathbb{K}$ une partie compacte de $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, E)$), le lemme 2.1.1 montre qu'il existe une partie compacte K de E et une partie compacte $\mathbb{K}'$ de de $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, K)$) telles que $\mathbb{K} = \mathbb{C}(T, K) \cap \mathbb{K}'$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{D}(T, K) \cap \mathbb{K}'$) ; $\mathbb{K}'$ est alors borélien dans l'espace polonais $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. dans l'espace polonais $\mathbb{D}(T, K)$) et le deuxième résultat se déduit donc de la proposition 3.1.2 et de la première partie de la preuve.

3.2 Beaucoup d'espaces vectoriels utilisés en analyse sont lusiniens ; on sait en particulier ([5], 1.7) que :

(a) tout espace de Fréchet séparable est lusinien,

(b) la limite inductive stricte de toute suite d'espaces de Fréchet séparables est lusinienne,

(c) le dual faible de tout espace de Fréchet séparable est lusinien,

(d) le dual faible de la limite inductive stricte de toute suite d'espaces de Fréchet séparables est lusinien,

(e) le dual fort de tout espace de Fréchet-Montel est lusinien,

(f) le dual fort de la limite inductive stricte de toute suite d'espaces de Fréchet-Montel est lusinien.

Dans tous ces cas, les topologies uniformes et de Skorohod sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$ sont simples :

Théorème 3.2.1 : *Supposons que l'espace lusinien* E *ait l'un des types (a),...,(f) énumérés ci-dessus ; alors* $\mathbb{C}(T, E)$ *pour sa topologie uniforme et* $\mathbb{D}(T, E)$ *pour sa topologie de Skorohod sont des espaces lusiniens.*

Démonstration : Nous considérons successivement les différents types.

(a) Dans ce cas, E est polonais et les espaces $\mathbb{C}(T, E)$ et $\mathbb{D}(T, E)$ sont tous deux polonais.

(b) Notons dans ce cas $(E_n, n \in N)$ une suite d'espaces de Fréchet séparables dont E soit la limite inductive stricte ; on sait que toute partie compacte de E est contenue dans l'un des E_n ; il en résulte que $\mathbb{C}(T, E)$ et $\mathbb{D}(T, E)$ sont réunions dénombrables respectives des $\mathbb{C}(T, E_n)$ et $\mathbb{D}(T, E_n)$; par ailleurs la topologie uniforme sur $\mathbb{C}(T, E)$ et la topologie de Skorohod sur $\mathbb{D}(T, E)$ induisent respectivement sur chacun des $\mathbb{C}(T, E_n)$ la topologie uniforme et sur chacun des $\mathbb{D}(T, E_n)$ la topologie de Skorohod correspondante de sorte que $\mathbb{C}(T, E)$ et $\mathbb{D}(T, E)$ sont des espaces topologiques séparés , réunions de suites de sous-espaces lusiniens ; ils sont alors lusiniens ([6], I.2.4).

(c) ou (e) Dans ces deux cas, E est réunion d'une suite croissante de parties compactes K_n telles que tout autre partie compacte de E soit contenue dans l'un des K_n. Il en résulte que $\mathbb{C}(T, E)$ et $\mathbb{D}(T, E)$ sont réunions dénombrables respectives des $\mathbb{C}(T, K_n)$ et $\mathbb{D}(T, K_n)$ et on conclut comme dans le cas précédent.

(d) ou (f) Dans ces deux cas qui sont plus délicats, notons F la limite inductive stricte d'une suite (F_n) d'espaces de Fréchet (ou de Fréchet-Montel) séparables et supposons que E soit le dual faible (ou fort) de F ; pour tout entier n, notons de plus E_n le dual faible (ou fort) de F_n, g_n l'application canonique continue de E_n dans E_{n-1} et f_n l'application canonique de E dans E_n. Dans ces conditions, on sait (cf. par exemple [6], I.5.1) que l'application $f = (f_n, n \in \mathbb{N})$ est un homéomorphisme de E sur le sous-espace G du produit $\prod_{n=0}^{\infty} E_n$ défini par :

$$G = \{x = (x_n) : \forall\, n \geq 1,\ g_n(x_n) = x_{n-1}\}.$$

Cet homéomorphisme définit par composition un homéomorphisme : $x \to (f_n \circ x, n \in \mathbb{N})$ de $\mathbb{C}(T, E)$ et $\mathbb{D}(T, E)$ sur $\mathbb{C}(T, G)$ et $\mathbb{D}(T, G)$ et il suffit de montrer que $\mathbb{C}(T, G)$ et $\mathbb{D}(T, G)$ sont respectivement lusiniens pour la topologie uniforme et pour la topologie de Skorohod. Ceci résultera du lemme :

Lemme 3.2.2 : (a) $\mathbb{C}(T, G)$ *(resp.* $\mathbb{D}(T, G)$ *est un sous-ensemble borélien du produit des* $\mathbb{C}(T, E_n)$ *muni du produit des topologies uniformes (resp du produit des* $\mathbb{D}(T, E_n)$ *muni du produit des topologies de Skorohod)*

(b) *La topologie uniforme sur* $\mathbb{C}(T, G)$ *et la topologie de Skorohod sur* $\mathbb{D}(T, G)$ *sont respectivement les topologies induites par le produit des topologies uniformes et de Skorohod sur les* $\mathbb{C}(T, E_n)$ *et sur les* $\mathbb{D}(T, E_n)$ *qui sont lusiniennes.*

Démonstration : (a) Notons que pour tout entier n et tout t appartenant à T, les applications : $(x, y) \to (g_n \circ x(t), y(t))$ de $\mathbb{C}(T, E_n) \times \mathbb{C}(T, E_{n-1})$ et de $\mathbb{D}(T, E_n) \times \mathbb{D}(T, E_{n-1})$ dans $E_n \times E_{n-1}$ sont des applications boréliennes pour les topologies lusiniennes de ces espaces. On a alors en notant S une suite dense dans T :

$$\mathbb{C}(T, G) \ \ (\text{resp. } \mathbb{D}(T, G)) = \{\, x = (x_n) : \forall\, n \geq 1, \forall\, s \in S,\ g_n \circ x(t) = x_{n-1}(t)\};$$

leur caractère borélien en résulte, ils sont alors lusiniens pour la topologie induite ([4], I.2.2).

(b) Pour tout entier n, nous notons $(r_n^i, i \in I_n)$ la famille filtrante de toutes les pseudo-distances continues sur E_n et nous construisons une famille $(d_n^i, i \in I_n, n \in \mathbb{N})$ de pseudo-distances sur G définissant sa topologie en posant $d_n^i(x, y) = r_n^i(x_n, y_n)$. La structure particulière de G montre que cette famille est alors filtrante puisque pour tout $n \geq 1$ et tout $i \in I_{n-1}$, $r_{n-1}^i(g_n(x), g_n(y))$ est une pseudo-distance continue sur E_n. Les propositions 1.1.2 et 1.2.1 montrent donc que $\{D_n^i, i \in I_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\Delta_n^i, i \in I_n, n \in \mathbb{N}\}$ sont respectivement des familles de pseudo-distances sur $\mathbb{C}(T, G)$ et sur $\mathbb{D}(T, G)$ définissant leur topologie ; par construction, elles définissent aussi les topologies induites respectivement par celles du produit des $\mathbb{C}(T, E_n)$ et des $\mathbb{D}(T, E_n)$, d'où le résultat du lemme et celui du théorème.

4. Mesures sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$.

Nous munissons $\mathbb{C}(T, E)$ et $\mathbb{D}(T, E)$ des tribus $\Pi(\mathbb{C})$ et $\Pi(\mathbb{D})$ induites par la tribu produit $\mathbb{B}(E^T)$; nous notons $\mathbb{M}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{M}(\mathbb{D})$ l'ensemble des mesures positives bornées sur $\mathbb{C}(T, E)$ et sur $\mathbb{D}(T, E)$; nous commençons par caractériser les mesures de Radon :

Théorème 4.1.1 : *Soit μ une mesure positive bornée sur* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. sur* $\mathbb{D}(T, E)$*); alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte $\mathbb{K}$ de* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. de* $\mathbb{D}(T, E)$*) telle que* $\mu(\mathbb{K}^c) \leq \varepsilon$ (i.e. μ est tendue).

(2) *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout élément* b *de* $\Pi(\mathbb{C})$ *(resp. de* $\Pi(\mathbb{D})$*), il existe une partie compacte $\mathbb{K}$ de* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. de* $\mathbb{D}(T, E)$*) contenue dans* b *telle que* $\mu(b - \mathbb{K}) \leq \varepsilon$ (i.e. μ est intérieurement régulière pour les compacts).

(3) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte* K *de* E *telle que* $\mu\{x : \exists\, t \in T, x(t) \notin K\} \leq \varepsilon$ (i.e. μ est faiblement tendue).

Nous dirons que *μ est une mesure de Radon* si elle vérifie les trois propriétés ci-dessus.

Démonstration : L'implication (1) $\Rightarrow$ (3) résulte directement du lemme 2.1.1; l'implication (2) $\Rightarrow$ (1) est immédiate ; il suffit donc de montrer que (3) $\Rightarrow$ (2) :

Sous la propriété (3), fixant $\varepsilon > 0$ et une partie compacte K de E associée, notant S une suite dense dans T, nous constatons que $\{x : \forall\, t \in T, x(t) \in K\} = \{x : \forall\, t \in S, x(t) \in K\}$est un sous-ensemble de $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, E)$) mesurable pour la tribu $\Pi(\mathbb{C})$ (resp. la tribu $\Pi(\mathbb{D})$) ; nous pouvons alors associer à μ la mesure $\mu' = \mathbf{I}_{\{x : \forall t \in T, x(t) \in K\}}.\mu$; c'est une mesure positive bornée portée par le sous-espace polonais $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. l'espace polonais $\mathbb{D}(T, K)$) Sur ce sous-espace polonais, $\mathbb{B}(E^T)$ induit la tribu borélienne (proposition 3.1.2) de sorte que μ' est une mesure positive bornée sur cet espace polonais, c'est donc une mesure de Radon sur cet espace ; pour tout a appartenant à la tribu $\Pi(\mathbb{C})$ (resp. à la tribu $\Pi(\mathbb{D})$), il existe alors une partie compacte $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, K)$) contenue dans a telle que :

$$\mu(a - \mathbb{K}) \leq \mu\{\exists\, t \in T : x(t) \notin K\} + \mu'(a - \mathbb{K}) \leq 2\varepsilon ;$$

$\mathbb{K}$ sera alors aussi une partie compacte de $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, E)$) contenue dans a de sorte que (2) est satisfaite, le théorème est démontré.

Corollaire 4.1.2 : *Soit μ une mesure de Radon sur* $\{\mathbb{C}, \Pi(\mathbb{C})\}$ *(resp. sur* $\{\mathbb{D}, \Pi(\mathbb{D})\}$*, alors la tribu borélienne* $\mathbb{B}(\mathbb{C})$) *(resp.* $\mathbb{B}(\mathbb{D})$) *est contenue dans la tribu complétée pour μ de la tribu* $\Pi(\mathbb{C})$ *(resp. la tribu* $\Pi(\mathbb{D})$*).*

Ceci résulte en effet immédiatement de la caractérisation ci-dessus des mesures de Radon et du fait que la tribu borélienne $\mathbb{B}(\mathbb{C})$) (resp. $\mathbb{B}(\mathbb{D})$) induit sur l'espace polonais $\mathbb{C}(T, K)$ (resp. l'espace polonais $\mathbb{D}(T, K)$), K compact, la même tribu que la tribu produit.

4.2 Si E est un espace lusinien de l'un des types (a),...,(f) énumérés en 3.2, l'espace $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. l'espace $\mathbb{D}(T, E)$) est lusinien et dans ces conditions, ([5], 1.5) toute mesure positive bornée pour la tribu $\Pi(\mathbb{C})$ (resp. la tribu $\Pi(\mathbb{D})$) ou pour la tribu $\mathbb{B}(\mathbb{C})$) (resp. la tribu $\mathbb{B}(\mathbb{D})$) est une mesure de Radon ; dans une situation peut-être un peu plus générale, on a la même propriété :

Soit E un espace lusinien régulier, on sait que l'espace produit E^N est aussi lusinien régulier ; notons $\mathbb{K}(E)$ l'ensemble des suites relativement compactes dans E. Nous introduisons la propriété suivante :

4.2.1 L'ensemble $\mathbb{K}(E)$ est mesurable dans E^N ; de plus pour toute probabilité μ sur E^N, on a :

$$\mu(\mathbb{K}(E) = \sup\{\mu(k^N), \text{k compact dans E}\}.$$

On sait que si E a l'un des types (a),...,(f), il possède cette propriété 4.2.1 ([5], théorème 1.8).

Corollaire 4.2.2 : *Si l'espace lusinien* E *possède la propriété* 4.2.1, *alors toute mesure positive bornée sur* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. sur* $\mathbb{D}(T, E)$*) pour la tribu* $\Pi(\mathbb{C})$ *(resp. pour la tribu* $\Pi(\mathbb{D})$*) est une mesure de Radon.*

Démonstration : Notons μ une mesure positive bornée sur $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. sur $\mathbb{D}(T, E)$), fixons une suite $S = (s_n)$ dense dans T et notons μ' l'image de μ par l'application : $x \to (x(s_n), n \in N)$ de $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, E)$) dans E^N ; pour tout élément x de $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, E)$), l'ensemble $\{x(s_n), n \in N\}$ est relativement compact dans E ; il en résulte que μ' est portée par le sous-ensemble $\mathbb{K}(E)$ de E^N et l'hypothèse 4.2.1 montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie compacte k de telle que $\mu'\{x=(x_n) : \exists\, n \in N, x_n \notin k\} \le \varepsilon$; ceci fournit :

$$\mu\{x : \exists\, t \in T\, , x(t) \notin k\} \le \varepsilon,$$

c'est le résultat d'après le théorème 4.1.

4.3 La caractérisation et les propriétés des mesures de Radon sur $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. sur $\mathbb{D}(T, E)$) nous conduisent à n'introduire les structures de convergence étroite que sur l'ensemble de ces mesures de Radon que nous noterons $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{C})$ (resp. $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{D})$). Pour ces mesures de Radon, toute fonction continue bornée sur $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. sur $\mathbb{D}(T, E)$) est intégrable et on peut donc définir la convergence étroite à partir de toutes ces fonctions qu'elles soient $\Pi(\mathbb{C})$-mesurables (resp. $\Pi(\mathbb{D})$-mesurables) ou non. On pourra alors appliquer les théorèmes généraux sur les propriétés de la convergence étroite des mesures de Radon sur les espaces complètement réguliers généraux. Sur certaines parties, la structure de la convergence étroite sera d'ailleurs particulièrement simple :

Théorème 4.3.1 : *Soit* (K_n) *une suite croissante de parties compactes de* E *; soit* M *l'ensemble des probabilités sur* $\mathbb{C}(T, E)$ *(resp. sur* $\mathbb{D}(T, E)$*) telles que :*

$$\forall\, n \in N,\ \mu\{\, x : \forall\, t \in T,\ x(t) \in K_n\} > 1 - 2^{-n}\ ;$$

dans ces conditions et pour la topologie de la convergence étroite, M *est lusinien.*

La démonstration du théorème sera basée sur l'argument technique suivant :
Soient F et G deux parties compactes de E ; à toute mesure positive bornée sur l'espace polonais sur $\mathbb{C}(T, F)$ (resp. sur l'espace polonais $\mathbb{D}(T, F)$), on peut associer la mesure positive bornée μ' définie par le produit $I_{\{x : \forall t \in T,\ x(t) \in G\}}.\mu$ sur l'espace polonais $\mathbb{C}(T, G)$ (resp. sur l'espace polonais $\mathbb{D}(T, G)$) ; on définit ainsi une application $\theta_{F,G}$ de $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, F))$ dans $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, G))$ (resp. de $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, F))$ dans $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, G))$; on a alors :

Lemme 4.3.2 : *Si* F *et* G *sont compacts dans* E, *alors l'application* $\theta_{F,G}$ *est une application borélienne de* $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, F))$ *dans* $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, G))$ *(resp. de* $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, F))$ *dans* $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, G))$*).*

Démonstration : Puique toute famille séparante de fonctions réelles continues sur un espace polonais engendre sa tribu borélienne, il suffit de montrer que pour tout entier $n > 0$, toute application continue f de E^n dans **R** et tout élément $t = (t_1,\ldots,t_n)$ de T^n, l'application

$$\mu \to \int f[x\circ t]\ \theta_{F,G}(\mu)(dx) = \int f[x(t_1),\ldots,x(t_n)]\ \theta_{F,G}(\mu)(dx)$$

est une application mesurable de $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, F))$ (resp. de $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, F))$dans **R**. Puisque F et G sont compacts, il existe une application g continue de F dans [0, 1] telle que $g^{-1}\{1\} = F \cap G$, notons $S = (s_k)$ une suite dense dans T, on a alors :

$$\int f[x\circ t]\ \theta_{F,G}(\mu)(dx) = \lim_{K\to\infty}\ \lim_{N\to\infty} \int f[x\circ t] \prod_{k=1}^{K} \{g\circ x(s_k)\}^N \mu(dx),$$

d'où le résultat du lemme.

Démonstration du théorème :
(a) Utilisant la suite croissante (K_n) de l'énoncé, nous notons $\prod$ l'espace produit polonais des espaces polonais $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, K_n))$ (resp. des espaces polonais $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, K_n))$) et nous posons :

$$\theta_n = \theta_{K_{n+1},K_n}\ ,\quad A = \{\mu = (\mu_n) \in \textstyle\prod : \theta_n.\mu_{n+1} = \mu_n\, ,\ \|\mu_n\| \in [1\text{-}2^{-n}, 1]\}\ ;$$

cet ensemble A est alors borélien dans $\prod$ d'après le lemme 4.3.2 et est donc lusinien.
Notons dans ces conditions s l'application de A dans $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{C})$ (resp. dans $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{D})$)) définie par $s(\mu) = \sup\{\underline{\mu}_n, n \in N\}$; alors s est une application injective de l'espace lusinien A dans l'espace séparé $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{C})$ (resp. l'espace séparé $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{D})$) et $s(A) = M$ sera lusinien si s est continue.

(b) Montrons que s est continue : Soit en effet Φ un filtre sur A convergeant dans A vers $m = (m_n)$, soit de plus f une fonction continue sur $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. sur $\mathbb{D}(T, E)$)) à valeurs dans [0, 1] ; pour tout entier n et puisque A a la topologie produit, on a $\lim_{\mu\in\Phi} \int f\, d\mu_n = \int f\, dm_n$, on en déduit :

$$\int f\, ds(m) = \sup_{n\in N} \int f\, dm_n = \sup_{n\in N} \lim_{\mu\in\Phi} \int f\, d\mu_n \leq \lim_{\mu\in\Phi} \int f\, ds(\mu)\ ;$$

appliquant le même calcul à (1 - f) et utilisant le fait que s(m) et s(μ) sont des probabilités, on en déduit par addition $\int f\, ds(m) = \lim_{\mu\in\Phi} \int f\, ds(\mu)$, c'est la continuité de s ; le caractère lusinien de M est donc établi.

4.4 Certaines parties relativement compactes de $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{C})$ et $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{D})$.

L'application des corollaires 2.1.5 et 2.2.3 et des propriétés de compacité des mesures de Radon tendues sur les espaces complètement réguliers fournit des conditions suffisantes de compacité relative :

Théorème 4.4 : *Soit* M *un ensemble de mesures de Radon sur* $\mathbb{C}$(T, E) *(resp. sur* $\mathbb{D}$(T, E)*). On suppose qu'il existe une suite* (K_n) *de parties compactes de* E *telles que :*

(1) $\forall\, n \in N, \forall\, \mu \in M, \mu\{x : \exists\, t \in T, x(t) \notin K_n\} \leq 2^{-n}$.

Dans ces conditions, pour que M *soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'il existe une famille séparante* F *de fonctions continues réelles sur* E *telles que :*

(2) $\forall\, f \in F$, *l'ensemble* f∘M *est relativement compact dans* $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, R))$

(resp. $\forall (f,g) \subset F$, *l'ensemble* (f+g)∘M *est relativement compact dans* $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, R))$*).*

4.5 Une autre topologie sur $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, E))$ (resp. sur $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, E))$).

On pourrait envisager ([6]) d'introduire une autre topologie sur l'ensemble $\mathbb{M}(\mathbb{C})$ (resp. sur l'ensemble $\mathbb{M}(\mathbb{D})$) de *toutes* les mesures positives bornées sur $\mathbb{C}$(T, E) (resp sur $\mathbb{D}$(T, E)). Cette topologie, *presque étroite*, serait définie à partir des seules fonctions continues bornées et $\mathbb{II}$-mesurables ; elle induirait sur l'ensemble $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{C})$ (resp. sur l'ensemble $\overline{\mathbb{M}}(\mathbb{D})$) des mesures de Radon une topologie moins fine que la topologie étroite avec laquelle elle coinciderait si E était polonais; dans la situation générale, on aurait seulement :

Théorème 4.5 : (a) *La topologie presque étroite est séparée.* (b) *Soit* (μ_k) *une suite de probabilités de Radon sur* $\mathbb{C}$(T, E) *(resp sur* $\mathbb{D}$(T, E)*) ; on suppose qu'elle est faiblement tendue, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante* (K_n) *de parties compactes de* E *telles que :*

$$\forall\, n \in N, \forall\, k \in N,\ \mu\{x : \forall\, t \in T, x(t) \in K_n\} > 1 - 2^{-n}.$$

Alors (μ_k) *converge pour la topologie presque étroite si et seulement si elle converge pour la topologie étroite.*

Démonstration : (a) Soit μ un élément de $\mathbb{M}(\mathbb{C})$ (resp. de $\mathbb{M}(\mathbb{D})$) ; soient de plus $(t_1,\ldots,t_n)$ une suite de n éléments de T et $(y_1,\ldots y_n)$ une suite de n parties fermées de F ; l'espace E étant lusinien régulier est parfaitement normal et il existe donc pour tout $k \in [1, n]$, une application continue f_k de E dans [0, 1] telle que $f_k^{-1}\{1\} = F_k$; on en déduit :

$$\mu\{x : \forall\, k \in [1, n], x(t_k) \in F_k\} = \lim_{p\to\infty} \int [\prod_{k=1}^{n} f_k \circ x(t_k)]^p \, d\mu(x).$$

Dans ces conditions, soient μ et ν deux éléments de $\mathbb{M}(\mathbb{C})$ (resp. de $\mathbb{M}(\mathbb{D})$) non séparés par la topologie presque étroite ; les fonctions : $x \to [\prod_{k=1}^{n} f_k \circ x(t_k)]^p$ étant continues bornées et Π-mesurables, on aura :

$$\int [\prod_{k=1}^{n} f_k \circ x(t_k)]^p \, d\mu(x) = \int [\prod_{k=1}^{n} f_k \circ x(t_k)]^p \, d\nu(x),$$

et donc :

$$\mu\{x : \forall\, k \in [1, n], x(t_k) \in F_k\} = \nu\{x : \forall\, k \in [1, n], x(t_k) \in F_k\} ;$$

μ et ν coincident donc sur une famille de générateurs de $\Pi(\mathbb{C})$ (resp. de $\Pi(\mathbb{D})$) stable par 2-intersection, on a alors $\mu = \nu$ de sorte que la topologie est séparée.

(b) Soit f une fonction continue réelle sur E ; nous lui avons associé une application $(f\circ)$ de $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, E))$ dans $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, \mathbf{R}))$ (resp. de $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, E))$ dans $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, \mathbf{R}))$) ; pour toute application continue bornée h de $\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$ (resp.de $\mathbb{D}(T, \mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$), on a alors :

$$\int h(x)[f\circ\mu])(dx) = \int h\{f\circ x\} d\mu(x) ;$$

l'application : $x \to h\{f\circ x\}$ de $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. de $\mathbb{D}(T, E)$) dans $\mathbf{R}$ est continue bornée et Π-mesurable de sorte que l'égalité ci-dessus montre que l'application : $\mu \to f\circ\mu$ est continue pour la topologie presque étroite sur $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, E)$ (resp. sur $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, E))$) et elle transforme tout ensemble relativement compact de $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, E)$ (resp. de $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, E))$) pour la topologie presque étroite en un ensemble relativement compact de $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$ (resp. de $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, \mathbf{R}))$) pour la topologie étroite usuelle. Dans ces conditions, soit (μ_k) une suite de probabilités de Radon sur $\mathbb{C}(T, E)$ (resp. sur $\mathbb{D}(T, E)$) faiblement tendue et convergente pour la topologie presque étroite ; pour tout couple (f, g) de fonctions continues réelles sur E, la suite image $\{(f+g)\circ\mu_k, k\in \mathbf{N}\}$ sera relativement compacte dans $\mathbb{M}(\mathbb{C}(T, \mathbf{R})$ (resp. dans $\mathbb{M}(\mathbb{D}(T, \mathbf{R}))$) ; le théorème 4.4 indique donc que la suite (μ_k) est relativement compacte pour la topologie étroite ; comme elle converge pour une topologie séparée moins fine, elle converge aussi pour cette topologie étroite, c'est le résultat.

Références

[1] P. Billingsley, Convergence of probability measures, J. Wiley, New-York, 1968.

[2] N.Bourbaki Eléments de Mathématique, Topologie générale, Chapitres V à X, nouvelle édition, Masson, Paris, 1981.

[3] C. Dellacherie et P.A. Meyer Probabilités et Potentiel, Chapitres I à IV, Hermann, Paaris, 1975.

[4] X. Fernique Processus linéaires, processus généralisés, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 17, 1, 1967, 1-92.

[5] X. Fernique Fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens, Expositiones Math., 8, 4, 1990, à paraître.

[6] X. Fernique Les fonctions aléatoires à valeurs dans les espaces lusiniens et leurs modifications régulières, Proceedings of the Vilnius Conference on Probability and Mathematicals Statistics, 1989, à paraître.

[7] A. Jakubowski, On the Skorohod topology, Ann. Inst. Henri Poincaré, 22, 3, 1986, 263-285.

Xavier Fernique,
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Unité associée au C.N.R.S.,
Université Louis Pasteur,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cédex (France).