

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

PHILIP PROTTER

Une remarque sur les équations différentielles stochastiques à solutions markoviennes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 138-139

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__138_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES
STOCHASTIQUES A SOLUTIONS MARKOVIENNES

J. JACOD et P. PROTTER^(*)

Considérons l'équation différentielle stochastique

$$(*) \quad dX_t = f(X_{t-}) dZ_t, \quad X_0 = x,$$

où Z est une semimartingale sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$ et f est une fonction borélienne telle que, pour chaque x , $(*)$ admette une solution (forte) unique X^x . Il est alors bien connu que si Z est à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS), les processus X^x sont markoviens homogènes, avec un semi-groupe de transition ne dépendant pas de x .

Ce résultat admet une "réciproque" un peu surprenante, et très simple à démontrer:

THEOREME 1. Supposons que f ne s'annule pas. Si les processus X^x sont tous markoviens homogènes avec le même semi-groupe de transition, alors Z est un PAIS.

Démonstration. Notons Ω' l'espace canonique des fonctions réelles càdlàg sur \mathbb{R}_+ , avec le processus canonique X' , la filtration canonique (\mathcal{F}'_t) et le semi-groupe (θ'_t) des translations. Si P'_x désigne la loi de X^x , notre hypothèse signifie que le terme $(\Omega', \mathcal{F}'_t, \theta'_t, X', P'_x)$ est un processus de Markov au sens de Dynkin (ou Blumenthal-Gettoor).

Comme f ne s'annule pas, $(*)$ s'inverse en

$$(1) \quad Z_t = Z_0 + \int_0^t f(X_{s-}^x)^{-1} dX_s^x.$$

On peut donc définir sur Ω' , et relativement à chaque P'_x , l'intégrale stochastique

$$(2) \quad Z'_t = \int_0^t f(X'_{s-})^{-1} dX'_s,$$

et on a aussi:

$$(3) \quad \text{la loi de } Z' \text{ sous } P'_x \text{ est la loi du processus } Z - Z_0.$$

^(*) Supported in part by NSF grant #DMS-8805595

D'autre part Z' est une fonctionnelle additive. Pour toute fonction borélienne positive g , la propriété de Markov et (3) impliquent :

$$E'_x[g(Z'_{t+s}-Z'_t)|\mathcal{F}'_t] = E'_x[g(Z'_s)\circ\theta'_t|\mathcal{F}'_t] = E'_{X'_t}[g(Z'_s)] = E[g(Z_s-Z_0)].$$

On en déduit que $Z'_{t+s}-Z'_t$ est P'_x -indépendant de \mathcal{F}'_t , donc des Z'_r pour $r \leq t$, et aussi que la loi de $Z'_{t+s}-Z'_t$ sous P'_x égale la loi de Z_s-Z_0 . Appliquant une nouvelle fois (3), on obtient le résultat. \square

REMARQUE. Regardons le cas particulier où $f=1$. (*) s'écrit

$$(4) \quad X_t^x = x + Z_t - Z_0$$

et le théorème dit que si les X^x sont markoviens homogènes avec tous le même semi-groupe, alors Z (et donc les X^x également) sont des PAIS. Cela ne veut évidemment pas dire que tout processus markovien homogène est un PAIS ! Le "miracle" provient de ce que (4) s'écrit $X_t^x = X_0^x + Z_t - Z_0$ et que par hypothèse la loi de Z ne dépend pas de X_0^x : or les seuls processus markoviens homogènes X tels que $X_t - X_0$ ait une loi indépendante de celle de X_0 sont les PAIS. \square

Dans le même ordre d'idées, on a le résultat encore plus élémentaire décrit ci-dessous. Supposons que (Ω, \mathcal{F}) soit muni d'une famille P_z de probabilités sous lesquelles Z soit une semimartingale avec $P_z(Z_0=z) = 1$. Si Z est markovien homogène sous chaque P_z , de transition indépendante de z , il est bien connu que le couple (Z, X^x) est markovien homogène de transition indépendante de (z, x) .

THEOREME 2. Si sous chaque P_z et pour chaque x le couple (Z, X^x) est markovien homogène de transition indépendante de (z, x) , alors le processus Z est lui-même markovien homogène sous chaque P_z (de transition évidemment indépendante de z).

Démonstration. Soit $(Q_t)_{t \geq 0}$ le semi-groupe des transitions de (Z, X^x) . On a $Q_t(z, x; A \times R) = P_z(Z_t \in A | Z_0=z \text{ et } X_0^x=x) = P_z(Z_t \in A)$, de sorte que $Q_t(z, x; A \times R) = R_t(z, A)$ ne dépend pas de x . Il est alors immédiat que Z lui-même est markovien homogène de transitions $(R_t)_{t \geq 0}$. \square

Ce résultat ne fait pas vraiment intervenir l'équation (*), et d'ailleurs il n'y a aucune hypothèse sur f ! Seul intervient le fait que les P_z ne dépendent pas de x . Ainsi, assez curieusement, le théorème 2 est beaucoup plus élémentaire que le théorème 1 (qui est d'ailleurs faux sans hypothèse sur f : penser au cas où $f=0$).