MICHEL ÉMERY

Quelques cas de représentation chaotique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 25 (1991), p. 10-23

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1991__25__10_0>

QUELQUES CAS DE REPRÉSENTATION CHAOTIQUE

par M. Emery

Rappelons ce dont il s'agit. Si X désigne une martingale réelle telle que $\langle X,X\rangle_t = t$, Meyer [7] a construit les intégrales multiples

$$\int_{0<t_1<\ldots<t_n} f(t_1,\ldots,t_n)\,dX_{t_1}\ldots dX_{t_n}$$

et montré qu'elles réalisent, pour chaque $n \geq 1$, une injection isométrique de $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_n,\lambda_n)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$, où $\mathcal{S}_n$ désigne l'ensemble des parties à n éléments de $\mathbb{R}_+^*$, identifié au simplexe $\{(t_1,\ldots,t_n)\in\mathbb{R}^n : 0<t_1<\ldots<t_n\}$ et muni de la restriction λ_n de la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$; pour $n=0$, $\mathcal{S}_0=\{\emptyset\}$ est muni de la masse de Dirac en son unique point et, toute fonction sur $\mathcal{S}_0$ étant constante, on définit l'intégrale multiple[1] correspondante comme la v. a. égale à cette constante. L'image de $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_n)$ par cette injection est notée $\mathbf{H}_n(X)$, ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, $\mathbf{H}_n$; on l'appelle le $n^{\text{ième}}$ chaos de la martingale X. Ces chaos $\mathbf{H}_n$ sont des sous-espaces fermés et deux-à-deux orthogonaux de $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Munissant l'ensemble $\mathcal{S}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{S}_n$ des parties finies de $\mathbb{R}_+^*$ de la mesure λ dont la restriction à chaque $\mathcal{S}_n$ est λ_n, on peut associer à toute $f\in\mathrm{L}^1(\mathcal{S},\lambda)$ l'intégrale multiple usuelle[2]

$$\int f(A)\,\lambda(dA) = f(\emptyset) + \sum_{n\geq 1}\int_{0<t_1<\ldots<t_n} f_{|\mathcal{S}_n}(t_1,\ldots,t_n)\,dt_1\ldots dt_n$$

et, à toute $f\in\mathrm{L}^2(\mathcal{S},\lambda)$, l'intégrale stochastique multiple[2]

$$\int f(A)\,dX_A = f(\emptyset) + \sum_{n\geq 1}\int_{0<t_1<\ldots<t_n} f_{|\mathcal{S}_n}(t_1,\ldots,t_n)\,dX_{t_1}\ldots dX_{t_n}\,.$$

Ceci réalise une injection isométrique de $\mathrm{L}^2(\mathcal{S},\lambda)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega,\mathbb{P})$, dont l'image est la somme hilbertienne $\mathbf{H}=\mathbf{H}(X)=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{H}_n(X)$; l'isométrie s'écrit

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{A\in\mathcal{S}} f(A)\,dX_A\Big)^2\Big] = \int_{A\in\mathcal{S}} f(A)^2\,\lambda(dA)\,.$$

1. La multiplicité étant nulle, elle mérite bien peu ce nom!
2. Cette notation compacte pour les sommes d'intégrales multiples est due à Guichardet pour les intégrales usuelles et à Meyer pour les intégrales stochastiques.

Un exemple important d'intégrale stochastique multiple est l'intégrale exponentielle, construite à partir d'une fonction h de $L^2(\mathbb{R}_+^*)$: On définit une fonction sur $\mathcal{S}$ par $A \mapsto h^A = \prod_{t\in A} h(t)$ (elle vérifie $\int (h^A)^2 \lambda(dA) = \exp \int_0^\infty h^2(t)\,dt$ et est donc dans $L^2(\mathcal{S})$); l'intégrale multiple $\int h^A\,dX_A$ est alors l'exponentielle stochastique $E_\infty = \mathcal{E}\int_0^\infty h\,dX$, où $E = \mathcal{E}\int h\,dX$ est la martingale exponentielle définie par

$$E_0 = 1 \quad , \qquad dE_t = E_{t-}\,h(t)\,dX_t \ .$$

En outre, ces fonctions h^A forment, quand h décrit $L^2(\mathbb{R}_+^*)$, une famille totale dans $L^2(\mathcal{S})$; compte tenu de la propriété d'isométrie, les intégrales multiples sont donc caractérisées par leur valeur $\int h^A\,dX_A = \mathcal{E}\int_0^\infty h\,dX$ sur ces fonctions.

Il est facile de vérifier, soit sur leur définition, soit sur la caractérisation qui précède, que les intégrales multiples $\int f(A)\,dX_A$ ne dépendent que de f et de X, et non de la filtration ambiante; l'espace $\mathbf{H}(X)$ est donc inclus dans $L^2(\Omega, \mathcal{N}_\infty^X, \mathbb{P})$, où $(\mathcal{N}_t^X)_{t\geq 0}$ désigne la filtration naturelle de X.

Par définition, on dit que X *possède la propriété de représentation chaotique* (en abrégé : la PRC) lorsque toute v. a. de $L^2(\Omega, \mathcal{N}_\infty^X, \mathbb{P})$ peut s'écrire comme une intégrale multiple, c'est-à-dire lorsque $L^2(\Omega, \mathcal{N}_\infty^X, \mathbb{P}) = \mathbf{H}(X)$.

On remarquera que la PRC est une propriété de la loi de X : si $\mathbb{P}_X$ désigne la probabilité (sur l'espace canonique des processus càdlàg) image de $\mathbb{P}$ par X, alors X a la PRC si et seulement si le processus canonique a la PRC pour $\mathbb{P}_X$.

On observera aussi que la PRC entraîne la propriété de représentation prévisible (pour la filtration naturelle de X) : le théorème d'associativité de Meyer [7] ou l'emploi des exponentielles montre que toute intégrale multiple $\int_{\mathcal{S}_n} f(A)\,dX_A$ est aussi une intégrale prévisible usuelle; donc, sous la PRC, toute v. a. de $L^2(\mathcal{N}_\infty^X)$ est somme d'une constante et d'une i. s. par rapport à X, d'où la propriété de représentation prévisible.

Inversement, la représentation prévisible entraîne-t-elle la représentation chaotique, ou cette dernière est-elle au contraire strictement plus forte? Je l'ignore; l'objet de cet exposé est seulement d'ajouter quelques exemples à la liste des martingales dont on sait qu'elles possèdent la PRC (cf. Azéma-Yor [1], Biane [2], Dermoune [3], Emery [4], He-Wang [5], Meyer [8], Parthasarathy [9]).

Nous allons pour cela définir des développements chaotiques conditionnels. Si l'on remarque que, pour $\Gamma \in \mathcal{F}_0$ non négligeable, les intégrales multiples $\int f(A)\,dX_A$ gardent la même valeur sur Γ lorsqu'on remplace $\mathbb{P}$ par la probabilité conditionnée $\mathbb{P}[\,.\,|\Gamma]$, il s'ensuit que, pour f dans $L^2(\mathcal{S}\times\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{S})\otimes\mathcal{F}_0)$, on peut encore définir l'intégrale multiple $\int f(A)\,dX_A$ et qu'elle vérifie

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{A\in\mathcal{S}} f(A)\,dX_A\Big)^2 \;\Big|\; \mathcal{F}_0\Big] = \int_{A\in\mathcal{S}} f^2(A)\,\lambda(dA)\ .$$

Soient maintenant T un temps d'arrêt, et f un élément de $L^2(\mathcal{S}\times\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{S})\otimes\mathcal{F}_T)$, porté par l'ensemble

$$\mathcal{A}_T = \big\{(A,\omega)\in\mathcal{S}\times\Omega \ :\ A\subset\,]T(\omega),\infty[\big\}\ .$$

En appliquant la remarque précédente à la filtration $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{T+t}$ et à la martingale $Y_t = X_{T+t}$ (dont le crochet est t pour la probabilité $\mathbb{P}[\ .\ | T < \infty]$), on peut définir l'intégrale multiple $\int_{\mathcal{A}_T} f(A)\, dX_A$, caractérisée par les deux propriétés suivantes (isométrie et valeur sur les exponentielles)

$$\text{(i)} \qquad \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)\, dX_A\Big)^2 \,\Big|\, \mathcal{F}_T\Big] = \int_{A\in\mathcal{A}_T} f^2(A)\,\lambda(dA)\ ;$$

$$\text{(ii)} \qquad \forall h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^* \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)\otimes\mathcal{F}_T)\,, \qquad \int_{A\in\mathcal{A}_T} h^A\, dX_A = \mathcal{E}\int_T^\infty h\, dX$$

(ici et dans la suite, la notation $\int_S^T$ signifie $\int_{]\!]S,T]\!]}$).

De façon équivalente, on peut définir directement ces développements chaotiques conditionnels $\int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)\, dX_A$ à partir de la construction de Meyer [7], en remarquant que l'hypothèse que f est mesurable pour $\mathcal{B}(\mathcal{S})\otimes\mathcal{F}_T$ et nulle hors de $\mathcal{A}_T$ implique qu'elle est prévisible au sens de Meyer. En effet, $f(A,\omega) = f(A,\omega)\,\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(A,\omega) = \lim_n f(A,\omega)\,\mathbb{1}_{\mathcal{A}_{T_n}}(A,\omega)$ où T_n est une suite décroissante de temps d'arrêt à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_+$ et de limite T; on peut donc, pour établir la prévisibilité de f, supposer T à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_+$. Mais on a alors

$$f(A) = \sum_{r\in\overline{\mathbb{Q}}_+} \Big[f(A)\,\mathbb{1}_{\{T=r\}}\Big]\,\mathbb{1}_{A\subset]r,\infty[}$$

et, puisque $f(A)\,\mathbb{1}_{\{T=r\}}$ est mesurable pour $\mathcal{B}(\mathcal{S})\otimes\mathcal{F}_r$, f est prévisible. Toujours selon [7], ceci permet de construire l'intégrale multiple $\int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)\, dX_A$, et il est facile de se convaincre que les deux définitions sont équivalentes, par exemple en utilisant l'associativité et les propriétés (i) et (ii) ci-dessus.

Si T est un temps d'arrêt, nous noterons $\mathbf{H}^T(X)$, ou plus brièvement $\mathbf{H}^T$, le sous-espace fermé de L^2 formé des v. a. qui admettent un développement chaotique conditionnel à l'instant T, c'est-à-dire de la forme $\int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)\, dX_A$ avec $f \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B}(\mathcal{S})\otimes\mathcal{F}_T)$. Ce sous-espace $\mathbf{H}^T$ croît avec T : Pour $S \le T$ et h dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)\otimes\mathcal{F}_S)$, on peut écrire $\int_{A\in\mathcal{A}_S} h^A\, dX_A = \int_{B\in\mathcal{A}_T} g(B)\, dX_B$, avec $g(B) = h^B\,\mathcal{E}\int_S^T h\, dX$, donc $\int_{A\in\mathcal{A}_S} h^A\, dX_A$ est dans $\mathbf{H}^T$. De la même façon, on a $\mathbf{H} \subset \mathbf{H}^T$ pour tout T. Pour $T \equiv \infty$, $\mathcal{A}_T = \{\emptyset\}\times\Omega$ et $\mathbf{H}^T$ n'est autre que L^2 tout entier. Lorsque T est un temps d'arrêt de la filtration naturelle $\mathcal{N}^X$ de X, nous noterons $\mathbf{H}^T_{\mathrm{nat}}(X)$ l'espace $\mathbf{H}^T$ construit dans cette filtration naturelle; il est inclus dans $\mathbf{H}^T(X)$ et cette inclusion peut être stricte (car $\mathbf{H}^T_{\mathrm{nat}}(X) \subset \mathrm{L}^2(\mathcal{N}^X_\infty)$ alors que $\mathbf{H}^T(X)$ contient tout $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$ comme chaos d'ordre zéro).

Pour $U \in \mathrm{L}^2$, la projection de U sur $\mathbf{H}^T$ (respectivement $\mathbf{H}$) est une intégrale multiple $\int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)\, dX_A$ (respectivement $\int_{A\in\mathcal{S}} f(A)\, dX_A$); on écrira $\mathbf{C}^A_T(U;X)$ (respectivement $\mathbf{C}^A(U;X)$) les coefficients $f(A)$ ainsi définis. Ils sont définis pour presque tout (A,ω) (respectivement pour presque tout A), puisque l'intégration multiple est injective sur $\mathrm{L}^2(\mathcal{A}_T)$ (respectivement $\mathrm{L}^2(\mathcal{S})$). Comme les exponentielles forment une famille totale, ces coefficients sont respectivement caractérisés par les relations

$$\forall h \in \mathrm{L}^2(\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*)\otimes\mathcal{F}_T) \quad \mathbb{E}[U\,\mathcal{E}\int_T^\infty h\,dX\,|\,\mathcal{F}_T] = \int_{A\in\mathcal{A}_T} \mathrm{C}_T^A(U;X)\,h^A\,\lambda(dA)\;;$$

$$\forall h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*) \quad \mathbb{E}[U\,\mathcal{E}\int_0^\infty h\,dX] = \int_{A\in\mathcal{S}} \mathrm{C}^A(U;X)\,h^A\,\lambda(dA)\,.$$

(Ces relations sont l'écriture rigoureuse des formules suivantes, purement heuristiques mais fort utiles dans la pratique : $\mathrm{C}_T^A(U;X)\,\lambda(dA) = \mathbb{E}[U\,dX_A|\mathcal{F}_T]$ et $\mathrm{C}^A(U;X)\,\lambda(dA) = \mathbb{E}[U\,dX_A]$.)

Il est possible de construire de ces coefficients une version mesurable $\mathrm{C}_t^A(\omega)$, càdlàg en t à (A,ω) fixé, optionnelle en (t,ω) pour A fixé, telle que l'on ait identiquement $\mathrm{C}_t^A(\omega) = \mathrm{C}_t^{A\cap]t,\infty[}(\omega)$, et que, pour tout temps d'arrêt T, les coefficients soient donnés par $\mathrm{C}_T^A(\omega) = \mathrm{C}_{T(\omega)}^A(\omega)$ et $\mathrm{C}_T^A(\omega)1\!\!1_{\mathcal{A}_T}(A,\omega)$ dépende prévisiblement de (A,ω) au sens de Meyer [7]. Pour A fixé, C_t^A est une martingale sur tout intervalle $[a,b[$ dont l'intérieur ne rencontre pas A. Nous n'aurons pas besoin d'une telle version dans la suite, ce qui, Dieu merci, nous dispense de la construire ici.

PROPOSITION 1. — *Soient T un temps d'arrêt, X et Y deux martingales telles que $\langle X,X\rangle_t = \langle Y,Y\rangle_t = t$ et que $X = Y$ sur $[\![0,T]\!]$.*

(i) *Si U et V sont deux v. a. de L^2 telles que $\mathrm{C}_T^A(U;X) = \mathrm{C}_T^A(V;Y)$ pour presque tout $(A,\omega)\in\mathcal{A}_T$, alors on a aussi $\mathrm{C}^A(U;X) = \mathrm{C}^A(V;Y)$ pour presque tout $A\in\mathcal{S}$.*

(ii) *Toute v. a. de $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$ de la forme $\int f(A)\,dX_A$ pour une $f\in\mathrm{L}^2(\mathcal{S})$ s'écrit aussi $\int f(A)\,dY_A$, avec la même f.*

(iii) *On suppose de plus que X possède la PRC et que T est un temps d'arrêt de la filtration naturelle $\mathcal{N}^X$ de X. Alors T est aussi un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{N}^Y$, et on a l'inclusion $\mathcal{N}_T^X \subset \mathcal{N}_T^Y$. Pour que Y possède elle aussi la PRC, il faut et il suffit que*

(a) $$\mathrm{L}^2(\mathcal{N}_\infty^Y) = \mathrm{H}_{\mathrm{nat}}^T(Y)\;;$$

(b) $$\mathcal{N}_T^X = \mathcal{N}_T^Y\,.$$

Bien que de démonstration facile, le (ii) est à la fois surprenant et important par ses conséquences.

DÉMONSTRATION. (i) Pour h dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U\,\mathcal{E}\int_0^\infty h\,dX] &= \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\int_0^T h\,dX\;\mathbb{E}[U\,\mathcal{E}\int_T^\infty h\,dX\,|\,\mathcal{F}_T]\Big]\\ &= \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\int_0^T h\,dX\int_{A\in\mathcal{A}_T}\mathrm{C}_T^A(U;X)\,h^A\,\lambda(dA)\Big]\,.\end{aligned}$$

Les hypothèses entraînent que ceci ne change pas lorsque l'on remplace U par V et X par Y ; donc $\mathbb{E}[U\,\mathcal{E}\int_0^\infty h\,dX] = \mathbb{E}[V\,\mathcal{E}\int_0^\infty h\,dY]$. Puisque cette égalité a lieu pour tout h dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$, elle entraîne $\mathrm{C}^A(U;X) = \mathrm{C}^A(V;Y)$.

(ii) Soit $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$, de la forme $\int f(A)\,dX_A$. Elle est dans $\mathbf{H}^T(X)$ et $\mathbf{H}^T(Y)$ avec les mêmes coefficients

$$\mathbf{C}_T^A(U;X) = \mathbf{C}_T^A(U;Y) = \begin{cases} U & \text{si } A = \emptyset ; \\ 0 & \text{si } A \neq \emptyset . \end{cases}$$

Utilisant (i), on en déduit $\mathbf{C}^A(U;Y) = f(A)$, ce qui signifie que la projection orthogonale de U sur $\mathbf{H}(Y)$ est $\int f(A)\,dY_A$. Pour montrer que cette projection est U elle-même, il ne reste qu'à vérifier que ces deux v. a. ont même norme. C'est immédiat :

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{A\in\mathcal{S}} f(A)\,dY_A\Big)^2\Big] = \int f(A)^2\,\lambda(dA) = \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{A\in\mathcal{S}} f(A)\,dX_A\Big)^2\Big] = \mathbb{E}[U^2]\,.$$

(iii) Soit $\Gamma \in \mathcal{N}_T^X$, de sorte que pour tout t l'événement $\Gamma \cap \{T \leq t\}$ est dans $\mathcal{N}_t^X$. Puisque X a la PRC, la v. a. $\mathbb{1}_{\Gamma\cap\{T\leq t\}}$ se développe en une intégrale multiple $\int_{A\subset]0,t]} f(A)\,dX_A$; comme elle est aussi dans $\mathcal{F}_T$, on peut appliquer (ii) et changer X en Y dans l'intégrale, obtenant ainsi $\Gamma \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{N}_t^Y$. Prenant $\Gamma = \Omega$, on voit que T est aussi un temps d'arrêt de $\mathcal{N}^Y$; prenant Γ arbitraire dans $\mathcal{N}_T^X$, on obtient l'inclusion $\mathcal{N}_T^X \subset \mathcal{N}_T^Y$.

L'inclusion $\mathbf{H}(Y) \subset \mathbf{H}_{\mathrm{nat}}^T(Y) \subset \mathrm{L}^2(\mathcal{N}_\infty^Y)$ a toujours lieu et devient une égalité si Y a la PRC, d'où (a). Toujours si Y a la PRC, nous venons d'établir l'inclusion $\mathcal{N}_T^X \subset \mathcal{N}_T^Y$; l'inclusion inverse s'obtient en échangeant X et Y puisqu'ils vérifient les mêmes hypothèses, d'où (b).

Supposant (a) et (b), il nous reste à établir la PRC pour Y, c'est-à-dire, compte tenu de (a), l'inclusion $\mathbf{H}_{\mathrm{nat}}^T(Y) \subset \mathbf{H}(Y)$. Soit donc V dans $\mathbf{H}_{\mathrm{nat}}^T(Y)$. On peut écrire $V = \int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)\,dY_A$ pour une f dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{A}_T, \mathcal{B}(\mathcal{S})\otimes\mathcal{N}_T^Y)$. L'hypothèse (b) dit que f est mesurable pour $\mathcal{B}(\mathcal{S})\otimes\mathcal{N}_T^X$; nous avons donc le droit de définir un élément U de $\mathrm{L}^2(\mathcal{N}_\infty^X)$ par $U = \int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)\,dX_A$, de sorte que $\mathbb{E}[U^2] = \mathbb{E}[\int_{A\in\mathcal{A}_T} f(A)^2\,\lambda(dA)] = \mathbb{E}[V^2]$. Mais la PRC de X entraîne l'existence de g dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S})$ telle que $U = \int g(A)\,dX_A$. Puisque, par définition de U, on a $\mathbf{C}_T^A(V;Y) = f(A) = \mathbf{C}_T^A(U;X)$, il s'ensuit grâce à (i) que $\mathbf{C}^A(V;Y) = \mathbf{C}^A(U;X) = g(A)$, et la projection de V sur $\mathbf{H}(Y)$ est donc $\int g(A)\,dY_A$. Pour établir la PRC de Y, il ne reste qu'à montrer que cette projection est V elle-même, et il suffit pour cela de vérifier qu'elle a la bonne norme :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{A\in\mathcal{S}} g(A)\,dY_A\Big)^2\Big] &= \int g(A)^2\,\lambda(dA) \\ &= \mathbb{E}\Big[\Big(\int_{A\in\mathcal{S}} g(A)\,dX_A\Big)^2\Big] = \mathbb{E}[U^2] = \mathbb{E}[V^2]\,. \qquad \blacksquare\end{aligned}$$

Il est bien entendu possible de donner de cette proposition une version conditionnelle, dans laquelle on a deux temps d'arrêt S et T tels que $S \leq T$ et on suppose seulement que $dX = dY$ sur $]\!]S,T]\!]$; les conclusions doivent alors être affaiblies et portent seulement sur des développements chaotiques conditionnels à l'instant S. (Nous ne ferons plus ce genre de remarque dans la suite.)

COROLLAIRE 2. — *Soient X et Y deux martingales indépendantes telles que $\langle X,X\rangle_t = \langle Y,Y\rangle_t = t$, possédant la PRC; soit T un temps d'arrêt de la filtration naturelle de X. Le processus*

$$Z_t = \begin{cases} X_t & si\ t \leq T \\ X_T + Y_{t-T} - Y_0 & si\ t \geq T \end{cases}$$

est, pour sa filtration naturelle, une martingale telle que $\langle Z,Z\rangle_t = t$ et possède la PRC.

Ce corollaire permet d'allonger la liste des cas de représentation chaotique en utilisant uniquement des ciseaux et de la colle; il répond lorsque X est un brownien et Y un processus de Poisson compensé à une question de Stricker [10].

DÉMONSTRATION. Nous allons bien sûr appliquer la proposition 1 (iii) à X et Z; l'indépendance de X et Y entraîne facilement, en se ramenant à une structure produit et en utilisant le théorème de Fubini, que Z est une martingale, de crochet t, et vérifiant la condition (b). Reste (a), c'est-à-dire la PRC conditionnelle $L^2(\mathcal{N}^Z_\infty) \subset \mathbf{H}^T_{\text{nat}}(Z)$. Mais $\mathcal{N}^Z_\infty$ est incluse dans $\mathcal{N}^X_T \vee \mathcal{N}^Y_\infty$; par ailleurs les v. a. de la forme $1\!\!1_{\Gamma\cap\Delta}$ avec $\Gamma \in \mathcal{N}^X_T$ et $\Delta \in \mathcal{N}^Y_\infty$ sont totales dans $L^2(\mathcal{N}^X_T \vee \mathcal{N}^Y_\infty)$ (car le complémentaire de $\Gamma \cap \Delta$ étant l'union disjointe de trois événements du même type, les unions finies disjointes de tels événements forment l'algèbre de Boole engendrée par $\mathcal{N}^X_T \cup \mathcal{N}^Y_\infty$). Il suffit donc de montrer que les v. a. de la forme $1\!\!1_{\Gamma\cap\Delta}$ sont dans $\mathbf{H}^T_{\text{nat}}(Z)$. La PRC de Y permet d'écrire $1\!\!1_\Delta = \int_{A\in\mathcal{S}} f(A)\,dY_A$; on en tire $1\!\!1_\Delta = \int_{A\in\mathcal{A}_T} g(A)\,dZ_A$, avec $g(A,\omega) = f\big(A - T(\omega)\big)$, où $A - T(\omega)$ désigne la translation (l'égalité $\int_{A\in\mathcal{S}} f(A)\,dY_A = \int_{A\in\mathcal{A}_T} g(A)\,dZ_A$ se vérifie par exemple sur les exponentielles); donc $1\!\!1_{\Gamma\cap\Delta} = \int_{A\in\mathcal{A}_T} [g(A)1\!\!1_\Gamma]\,dZ_A$ est dans $\mathbf{H}^T_{\text{nat}}(Z)$, et le (a) est établi. ∎

Au vu de la proposition 1 (ii), il n'est pas étonnant que la PRC soit une propriété locale. C'est ce que dit la proposition 4 ci-dessous; pour l'établir, nous aurons besoin d'un petit lemme de théorie générale des processus.

LEMME 3. — *Soient X et Y deux processus mesurables, de filtrations naturelles $\mathcal{N}^X$ et $\mathcal{N}^Y$, et T un temps d'arrêt de ces deux filtrations tel que $X = Y$ sur $[\![0,T]\!]$. Si S est un temps d'arrêt de $\mathcal{N}^Y$ vérifiant $S \leq T$, alors S est aussi un temps d'arrêt de $\mathcal{N}^X$, et les tribus $\mathcal{N}^X_S$ et $\mathcal{N}^Y_S$ ont même restriction à l'événement $\{S < T\}$.*

DÉMONSTRATION. Pour $0 < \delta \leq \varepsilon$, $\mathcal{N}^Y_t$ est incluse dans $\sigma(Y_s, s \leq t+\delta)$ et $\sigma(X_s, s \leq t+\delta)$ dans $\mathcal{N}^X_{t+\varepsilon}$. En restriction à l'événement $\Omega_\delta = \{t+\delta \leq T\}$, on a l'égalité $\sigma(Y_s, s \leq t+\delta) = \sigma(X_s, s \leq t+\delta)$, d'où, toujours en restriction à Ω_δ, $\mathcal{N}^Y_t \subset \mathcal{N}^X_{t+\varepsilon}$. Puisque Ω_δ lui-même est dans $\mathcal{N}^X_{t+\varepsilon}$ et $\{S \leq t\}$ dans $\mathcal{N}^Y_t$, on obtient

$$\{S \leq t < t+\delta \leq T\} = \{S \leq t\} \cap \Omega_\delta \in \mathcal{N}^X_{t+\varepsilon}\,.$$

Faisant tendre d'abord δ puis ε vers zéro, on en déduit que $\{S \leq t < T\}$ est dans $\mathcal{N}_t^X$. Puisqu'il en va de même de $\{T \leq t\}$, cela entraîne que

$$\{S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t < T\}$$

est aussi dans $\mathcal{N}_t^X$, donc S est un temps d'arrêt de $\mathcal{N}^X$.

Il reste à montrer que tout événement Γ de $\mathcal{N}_S^Y$ inclus dans $\{S < T\}$ est aussi dans $\mathcal{N}_S^X$; la réciproque s'obtiendra en échangeant X et Y. La v. a. $R = T \wedge (S\mathbb{1}_\Gamma + \infty\mathbb{1}_{\Gamma^c}) = S\mathbb{1}_\Gamma + T\mathbb{1}_{\Gamma^c}$ est un temps d'arrêt de $\mathcal{N}^Y$, majoré par T. Par la première partie de ce lemme, R est donc aussi un temps d'arrêt de $\mathcal{N}^X$, et $\Gamma = \{R = S < T\}$ est dans $\mathcal{N}_S^X$. ∎

PROPOSITION 4. — *Soit $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de martingales, toutes de crochet $\langle X^n, X^n\rangle_t = t$ et possédant la PRC; soit, pour chaque n, T_n un temps d'arrêt de la filtration $\mathcal{N}^{X^n}$. On suppose que $\sup_n T_n = \infty$ et qu'il existe Y tel que, pour chaque n, $Y = X^n$ sur $[\![0, T_n]\!]$. Alors Y est une martingale, $\langle Y, Y\rangle_t = t$, et Y possède la PRC.*

DÉMONSTRATION. Quitte à remplacer $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la suite double $X^{mn} = X^n$ et T_n par $T_{mn} = T_n \wedge m$, on peut supposer chaque T_n fini. Il est clair que Y est une martingale de crochet t, puisque c'est vrai sur chaque $[\![0, T_n]\!]$; par la proposition 1 (iii), T_n est un temps d'arrêt de $\mathcal{N}^Y$ et $\mathcal{N}_{T_n}^{X^n} \subset \mathcal{N}_{T_n}^Y$. La réunion $\bigcup_n \mathrm{L}^2(\mathcal{N}_{T_n}^Y)$ est totale dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{N}_\infty^Y)$, car si U est orthogonal à chaque $\mathrm{L}^2(\mathcal{N}_{T_n}^Y)$, la martingale $\mathbb{E}[U|\mathcal{N}_t^Y]$, nulle sur chaque $[\![0, T_n]\!]$, est identiquement nulle, donc U est aussi orthogonal à $\mathrm{L}^2(\mathcal{N}_\infty^Y)$. Il s'ensuit que pour établir la PRC de Y, il suffit de vérifier à n fixé que $\mathrm{L}^2(\mathcal{N}_{T_n}^Y) \subset \mathbf{H}(Y)$.

La v. a. $K = \inf\{m : T_m > T_n\}$ est finie car T_n l'est, et mesurable pour $\mathcal{N}_{T_n}^Y$ car $\{K > k\} = \bigcap_{m\leq k}\{T_m \leq T_n\}$; donc tout $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{N}_{T_n}^Y)$ s'écrit $\sum_k U_k$, où $U_k = U\mathbb{1}_{\{K=k\}} \in \mathrm{L}^2(\mathcal{N}_{T_n}^Y)$ est porté par $\{K = k\}$. Pour montrer que U est dans $\mathbf{H}(Y)$, on peut travailler séparément avec chaque U_k ; en conséquence, nous avons le droit de supposer que $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{N}_{T_n}^Y)$ est porté par $\{T_k > T_n\}$ où n et k sont fixés. Posons $S = T_k \wedge T_n$, de sorte que $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{N}_S^Y)$. Le lemme 3, appliqué à $X = X^k$ et $T = T_k$, dit que $\mathcal{N}_S^{X^k}$ et $\mathcal{N}_S^Y$ coïncident sur $\{T_k > T_n\}$, donc $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{N}_S^{X^k})$. Puisque X^k a la PRC, U est dans $\mathbf{H}(X^k)$ et la proposition 1 (ii) appliquée à X^k, Y et S dit que U est aussi dans $\mathbf{H}(Y)$. ∎

Les résultats qui précèdent permettent, par recollement, de construire des martingales ayant la PRC à partir de processus pour lesquels la PRC est déjà établie. Le théorème qui suit est d'un esprit différent et fournit, pour des martingales ayant la propriété de représentation prévisible, une condition suffisante pour la PRC. Il ne s'agit pas d'un résultat bien profond : il ne s'intéresse qu'à des processus à variation finie, n'ayant sur tout compact qu'un nombre p. s. fini de sauts; la démonstration consiste essentiellement à se ramener par un changement de temps au cas d'un processus de Poisson.

THÉORÈME 5. — *Soit X une martingale. On suppose que, dans sa filtration naturelle, X a pour crochet $\langle X,X\rangle_t = t$, possède la propriété de représentation prévisible et vérifie l'équation*[1] $d[X,X]_t = dt + \Phi_t\, dX_t$, *où Φ est un processus prévisible ne s'annulant pas et tel que $\int_0^t \Phi_s^{-2} ds < \infty$ p. s. pour tout t. Alors X possède la PRC.*

DÉMONSTRATION. Le processus croissant $\int \Phi^{-2} d\langle X,X\rangle$ est localement intégrable, car fini et continu; l'intégrale $Y = \int \Phi^{-1}\, dX$ existe, est une martingale locale et vérifie $d[Y,Y] = \Phi^{-2}(dt + \Phi\, dX)$, donc aussi $Y_t = [Y,Y]_t - \int_0^t \Phi_s^{-2}\, ds$. Sa filtration naturelle $\mathcal{N}^Y$ est, par construction même, incluse dans la filtration ambiante $\mathcal{N}^X$; nous allons voir que *ces deux filtrations sont égales.* Le processus croissant continu $C_t = \int_0^t \Phi_s^{-2}\, ds = [Y,Y]_t - Y_t$ est adapté à $\mathcal{N}^Y$; soit Ψ une version prévisible pour $\mathcal{N}^Y$ de $(dC_t/dt)^{-1/2}$, de sorte que $\Psi = \Phi$ hors d'un ensemble négligeable pour $dt\otimes\mathbb{P}$. Comme $\langle X,X\rangle_t = t$, on a aussi $Y = \int \Psi^{-1}\, dX$, donc $X = X_0 + \int \Psi\, dY$. Puisque X a la propriété de représentation prévisible, X_0 est une constante, et X est adapté à $\mathcal{N}^Y$.

La formule $Y = [Y,Y] - \int \Phi^{-2}\, dt$ montre que le processus Y est à variation finie, et à sauts unité. Si l'on désigne par $T_1,\ldots,T_n,\ldots$ ses temps successifs de saut (avec $0 = T_0 < T_1 \leq \ldots \leq T_n \leq \ldots$ et $T_{n+1} > T_n$ sur $\{T_n < \infty\}$), Y a même filtration naturelle que le processus de comptage $N_t = \sum_n \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$ (ceci est établi par Lepingle-Meyer-Yor dans [6], sous l'hypothèse supplémentaire que tous les T_n sont finis; mais ils n'utilisent pas cette hypothèse pour ce résultat). Remarquer que les T_n sont aussi les temps de saut de X, et que, Φ étant prévisible pour la filtration naturelle de N, il existe, pour chaque $n \geq 0$, une fonction borélienne f_n sur $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\Phi_t = f_n(T_1,\ldots,T_n;t)$ sur $]\!]T_n,T_{n+1}]\!]$. Sur une extension convenable de Ω, construisons pour $n \geq 0$ des processus prévisibles Φ^n et des martingales X^n tels que

$$\begin{aligned}
&\text{sur } [\![0,T_{n+1}]\!],\ \Phi^n = \Phi \text{ et } X^n = X,\\
&\text{sur }]\!]T_{n+1},\infty[\![,\ \Phi^n_t = f_n(T_1,\ldots,T_n;t)\\
&\text{et } X^n \text{ vérifie } d[X^n,X^n]_t = dt + \Phi^n_t\, dX^n_t.
\end{aligned}$$

L'existence et la PRC conditionnelle $\mathrm{L}^2(\mathcal{N}^{X^n}_\infty) \subset \mathbf{H}^{T_n}_{\mathrm{nat}}(X^n)$ du processus X^n se déduisent facilement de la proposition 1 de [4] par conditionnement à $\mathcal{N}^X_{T_n}$; noter que X^n est simplement obtenu en extrapolant à $]\!]T_{n+1},\infty[\![$ la formule donnant Φ sur $]\!]T_n,T_{n+1}]\!]$, de sorte que $\Phi^n_t = f_n(T_1,\ldots,T_n;t)$ sur tout l'intervalle $]\!]T_n,\infty[\![$ Pour démontrer le théorème, en utilisant la proposition 4, nous n'avons plus qu'à établir la PRC séparément pour chaque X^n. Ceci peut se faire par récurrence. Pour $n = 0$, X^n est la solution de l'équation de structure $d[X,X]_t = dt + f_0(t)\, dX_t$, d'où la PRC par [4]. Si X^n a la PRC pour un $n \geq 0$, X^{n+1}, qui est égal à X^n sur $[\![0,T_{n+1}]\!]$, l'a aussi par la proposition 1 (iii) : le (a) n'est autre que la PRC conditionnelle mentionnée plus haut, et (b) résulte de ce que $\mathcal{N}^{X^n}_{T_{n+1}}$ et $\mathcal{N}^{X^{n+1}}_{T_{n+1}}$ sont tous deux égaux à $\sigma(T_1,\ldots,T_{n+1})$. ∎

---

1. Ce type de formule est ce qu'on appelle une *équation de structure*; remarquer que l'existence d'un Φ prévisible vérifiant cette équation est une conséquence des autres hypothèses.

Ce théorème redonne le résultat de Biane [2] selon lequel les martingales d'Azéma, d'équation de structure $d[X,X]_t = dt + (\alpha + \beta X_{t-})dX_t$, possèdent la PRC lorsque $\beta < -2$ et $X_0 \neq -\alpha/\beta$; il peut aussi fournir de nouveaux cas de représentation chaotique, tels l'exemple exponentiel ci-dessous.

PROPOSITION 6. — *Soient λ, x et e trois réels. Sous les conditions initiales $X_0 = x$, $E_0 = e$, l'équation de structure*[1]

$$\begin{cases} d[X,X]_t = dt + dE_t \\ dE_t = E_{t-}\,\lambda dX_t \end{cases}$$

a une solution, unique en loi; elle possède la PRC.

DÉMONSTRATION. Si $e = 0$, l'équation exponentielle $dE = E_-\,\lambda dX$ a, quelle que soit la martingale X, une solution et une seule, $E = 0$, d'où $dE = 0$; si $\lambda = 0$, on a aussi $dE = 0$. Dans ces deux cas, l'unique solution de $d[X,X]_t = dt + dE_t = dt$ est "le" mouvement brownien, et il a la PRC. Nous supposerons donc $\lambda e \neq 0$.

<u>Existence</u>. Soit R un processus de Poisson compensé, c'est-à-dire une martingale telle que $d[R,R]_t = dt + dR_t$. Résolvons l'équation différentielle stochastique forte

$$dF = \lambda^2 F_-^2\, dR\,, \quad F_0 = e\,;$$

sa solution F est bien définie sur un intervalle $[\![0,S[\![$, où S, s'il est fini, est un temps d'explosion. Plus précisément, F est obtenue par récurrence, en posant $\Delta F = \lambda^2 F_-^2$ aux instants de saut de R et en résolvant $dF = -\lambda^2 F_-^2\, dt$ entre les sauts de R; cette équation différentielle ordinaire peut donner lieu à explosion à un instant fini S; dans ce cas on a $F_t = \lambda^{-2}/(t-S)$ sur un voisinage à gauche de S. Observons (cela sera utile plus loin) que F et F_- ne s'annulent pas : entre deux sauts, $1/F$ satisfait l'équation ordinaire non explosive $d(1/F) = \lambda^2\, dt$, et lors d'un saut, F ne pourrait s'annuler que lorsque $F_- = -\lambda^{-2}$, mais ceci ne se produit que sur une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles, alors que les instants de saut sont totalement inaccessibles.

Introduisons le changement de temps $\tau_t = \int_0^t \lambda^2 F_{s-}^2\, ds$, défini pour $0 \leq t < S$; la formule explicite précédente montre que sur $\{S < \infty\}$ l'intégrale définissant τ diverge, donc sur cet événement $\tau_{S-} = +\infty$. Le changement de temps inverse, C_t, est défini sur $[\![0,T[\![$ où $T = \tau_{S-} \leq \infty$, et on peut poser, sur $[\![0,T[\![$,

$$E_t = F_{C_t} \quad ; \qquad X_t = x + \int_0^t \frac{dE_s}{\lambda E_{s-}}$$

(ce dernier est bien défini sur $[\![0,T[\![$, car F_- ne s'annule pas en temps fini). Sur $[\![0,T[\![$, on a bien $dX = dE/\lambda E_-$ et

$$\begin{aligned} d[X,X]_t &= d[E,E]_t/\lambda^2 E_{t-}^2 = d[F,F]_{C_t}/\lambda^2 F_{C_t-}^2 \\ &= \lambda^2 F_{C_t-}^2\, d[R,R]_{C_t} = \lambda^2 E_{t-}^2\, dC_t + \lambda^2 F_{C_t-}^2\, dR_{C_t} \\ &= dt + dF_{C_t} = dt + dE_t\,; \end{aligned}$$

---

1. Rappelons que, par définition, la solution X d'une équation de structure est toujours une martingale.

il ne nous reste qu'à montrer que T est infini. Mais sur $\{T < \infty\}$, nous avons vu plus haut que $S = \infty$, donc T est la limite des instants de saut de E (ou de X, ce sont les mêmes), et T est donc prévisible. Puisque $\langle X, X\rangle_t = t$ sur $[\![0, T[\![$, l'arrêté $X^{|T-}$ est une martingale, donc $E^{|T-} = e\,\mathcal{E}(\lambda X^{|T-})$ est une martingale locale et, par changement de temps, sur $\{T < \infty\}$, la limite $F_{C_T-} = F_{S-} = F_\infty$ existe et est finie. Or cette limite ne peut être que zéro (si F tend vers une limite finie F_∞, les sauts ΔF tendent vers zéro, donc F_-^2 tend vers zéro). Donc, sur $\{T < \infty\}$, on a $E_{T-} = 0$. La formule explicite

$$E_t = e\,\exp\bigl(\lambda(X_t - x)\bigr) \prod_{0<s<T} (1 + \lambda\Delta X_s)\exp(-\lambda\Delta X_s)$$

montre que le produit infini $\prod_{0<s<T}(1 + \lambda\Delta X_s)\exp(-\lambda\Delta X_s)$ devrait être divergent, d'où a fortiori $\sum_{0<s<T} \Delta X_s^2 = \infty$, ce qui est incompatible avec une limite finie en $T-$ pour $[X, X] = t + E$. Ceci établit par l'absurde que $T \equiv \infty$, et la construction de (X, E) a été faite sur $[\![0, \infty[\![$.

Unicité. Si (X, E) est une solution, posons $T = \inf\{t : E_t = 0\}$; puisque E est une exponentielle, E_- ne s'annule pas sur $[\![0, T]\!]$. On peut donc définir sur $[\![0, T]\!]$ un processus croissant et une martingale locale par

$$C_t = \int_0^t \frac{ds}{\lambda^2 E_{s-}^2} \quad ; \qquad Q_t = \int_0^t \frac{dX_s}{\lambda E_{s-}}$$

et l'on a alors $d[Q, Q]_t = d[X, X]_t/\lambda^2 E_{t-}^2 = dC_t + dQ_t$. Désignant par τ l'inverse de C, la martingale locale $R_t = Q_{\tau_t}$ vérifie $d[R, R]_t = dt + dR_t$ sur $[\![0, C_T]\!]$ et est donc la restriction à cet intervalle d'un processus de Poisson compensé. C'est un jeu d'enfant de vérifier qu'inversement X et E sont obtenus à partir de R par la construction effectuée lors de la démonstration d'existence, le temps T s'identifiant avec son homonyme. Il en résulte que la loi de (X, E) est l'image de celle de R par cette construction, d'où l'unicité et a fortiori la propriété de représentation prévisible.

Propriété de représentation chaotique. Elle résulte aussitôt du théorème 5 : il suffit de vérifier que Φ^{-2} est p. s. localement intégrable; or $\Phi = \lambda E_-$ et nous avons vu que E et E_- ne s'annulent pas, ce qui entraîne que Φ^{-2} est localement borné trajectoire par trajectoire. ∎

Pour conclure cet exposé, voici deux remarques que je n'ai pas su utiliser dans l'étude des représentations chaotiques. Peut-être un lecteur sera-t-il plus habile que moi ?

Tout d'abord, une forme plus précise de la proposition 1 (i). Cette proposition dit que, si l'on connaît la restriction à $[\![0, T]\!]$ de la martingale X et les coefficients $\mathbf{C}_T^A(U; X)$ de la projection de U sur $\mathbf{H}_{\mathrm{nat}}^T(X)$, alors les coefficients $\mathbf{C}^A(U; X)$ sont bien déterminés. Ceci laisse espérer l'existence d'une formule qui permettrait de calculer ces coefficients à partir des $\mathbf{C}_T^A(U; X)$ et de $X^{|T}$. C'est presque ce que nous allons obtenir : La formule qui suit n'utilise pas seulement $X^{|T}$, mais toute la martingale X ; cependant X y intervient uniquement par l'intermédiaire de coefficients $\mathbf{C}^B(V;X)$, où V est mesurable pour $\mathcal{F}_T$, et la proposition 1 (ii) vient à point pour nous dire que ces $\mathbf{C}^B(V;X)$ ne font qu'en apparence intervenir le futur de X après T.

Soit donc U dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$; X et T sont fixés et il s'agit de calculer les $\mathbf{C}^A(U)$ en fonction des $\mathbf{C}^B_T(U)$ — nous ne faisons plus figurer X dans les notations. Pour h dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^*)$, nous cherchons à mettre $\mathbb{E}\big[U\,\mathcal{E}\int_0^\infty h\,dX\big]$ sous la forme $\int h^A f(A)\,\lambda(dA)$, et les $f(A)$ seront les coefficients cherchés. On écrit

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[U\,\mathcal{E}\textstyle\int_0^\infty h\,dX\big] &= \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\textstyle\int_0^T h\,dX\;\mathbb{E}\big[U\,\mathcal{E}\int_T^\infty h\,dX\,\big|\,\mathcal{F}_T\big]\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\mathcal{E}\textstyle\int_0^T h\,dX\;\displaystyle\int_{B\in\mathcal{A}_T}\mathbf{C}^B_T(U)\,h^B\,\lambda(dB)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\int_{B\in\mathcal{S}} h^B\,\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(B)\,\mathbf{C}^B_T(U)\,\mathcal{E}\textstyle\int_0^T h\,dX\,\lambda(dB)\Big] \\
&= \int_{B\in\mathcal{S}} h^B\,\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(B)\,\mathbf{C}^B_T(U)\,\mathcal{E}\textstyle\int_0^T h\,dX\big]\,\lambda(dB) \\
&= \int_{B\in\mathcal{S}} h^B\,\mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(B)\,\mathbf{C}^B_T(U)\,\mathbb{E}\big[\mathcal{E}\textstyle\int_0^{\inf B} h\,dX\,\big|\,\mathcal{F}_T\big]\Big]\,\lambda(dB) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\text{car } T\le\inf B \text{ pour } B\in\mathcal{A}_T \\
&= \int_{B\in\mathcal{S}} h^B\,\mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(B)\,\mathbf{C}^B_T(U)\,\mathcal{E}\textstyle\int_0^{\inf B} h\,dX\big]\,\lambda(dB) \\
&= \int_{B\in\mathcal{S}} h^B\,\Big[\int_{C\subset]0,\inf B[}\mathbf{C}^C\big[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(B)\,\mathbf{C}^B_T(U)\big]\,h^C\,\lambda(dC)\Big]\,\lambda(dB) \\
&= \int_{A\in\mathcal{S}} h^A\sum_{B\prec A}\mathbf{C}^B\big[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(A\setminus B)\,\mathbf{C}^{A\setminus B}_T(U)\big]\,\lambda(dA)
\end{aligned}
$$

(dans cette dernière formule, B décrit les sections commençantes de A), et on en déduit que

$$\mathbf{C}^A(U)=\sum_{B\prec A}\mathbf{C}^B\big[\mathbb{1}_{\mathcal{A}_T}(A\setminus B)\,\mathbf{C}^{A\setminus B}_T(U)\big]\,.$$

Puisque, pour chaque v. a. V, les coefficients $\mathbf{C}^B(V)$ ne sont bien définis que pour presque tout B, on pourrait croire mal définie cette expression, qui fait intervenir des termes du type $\mathbf{C}^B(V_B)$. Tel n'est pas le cas, et le sens à donner à la formule précédente est parfaitement clair : si $A=\{t_1,\dots,t_n\}$, elle signifie simplement que

$$\mathbf{C}^A(U)=\sum_{k=0}^n\mathbf{C}^{\{t_1,\dots,t_k\}}\big[\mathbb{1}_{\{T<t_{k+1}\}}\,\mathbf{C}_T^{\{t_{k+1},\dots,t_n\}}(U)\big]$$

(avec $t_0=0$ et $t_{n+1}=\infty$), et sous cette forme les difficultés ont disparu.

Afin de mettre ce résultat sous forme un peu plus agréable, remarquons que pour B dans $\mathcal{S}$ et non vide, on peut écrire $\{\sup B > T\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \Omega_r$, où les événements Ω_r sont disjoints et où, sur Ω_r, on a $\sup B > r > T$. Donc pour V dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{F}_T)$, on a $V\mathbb{1}_{\{\sup B>T\}} = \sum_r V\mathbb{1}_{\Omega_r}$, d'où $\mathbf{C}^B\big[V\mathbb{1}_{\{\sup B>T\}}\big] = 0$ et $\mathbf{C}^B(V) = \mathbf{C}^B\big[V\mathbb{1}_{\{B\subset[0,T]\}}\big]$. Nos coefficients se réécrivent finalement

$$\mathbf{C}^A(U) = \sum_{B\subset A} \mathbf{C}^B\big[\mathbb{1}_{\{B=A\cap[0,T]\}}\, \mathbf{C}_T^{A\cap]T,\infty[}(U)\big] ,$$

ou encore, si $A = \{t_1, \ldots, t_n\}$,

$$\mathbf{C}^A(U) = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{C}^{\{t_1,\ldots,t_k\}}\big[\mathbb{1}_{\{t_k\le T<t_{k+1}\}}\, \mathbf{C}_T^{\{t_{k+1},\ldots,t_n\}}(U)\big] .$$

Voici pour terminer une condition suffisante pour qu'une v. a. U de $\mathrm{L}^2(\Omega)$ soit développable en chaos. La martingale X est toujours fixée, et nous supposerons qu'elle a la propriété de représentation prévisible, de sorte que toute martingale M_t vérifie $dM_t = H_t\, dX_t$ pour un processus prévisible H (que nous nommerons *la dérivée* de M), bien défini hors d'un ensemble négligeable pour $dt\otimes\mathbb{P}$; nous supposerons aussi (cela fait partie de la représentation prévisible) que la tribu $\mathcal{F}_0$ est dégénérée. En revanche, nous ne supposons pas que la filtration ambiante est la filtration naturelle de X. Il nous faut préciser un peu la construction des coefficients $\mathbf{C}_t^A(U)$ évoquée plus haut, ainsi que celle d'autres coefficients $\mathbf{\Gamma}_t^A(U)$; puisque U est fixé, nous les noterons aussi $\mathbf{C}_t(A)$ et $\mathbf{\Gamma}_t(A)$. Sans entrer dans les détails, voici sur un exemple comment on peut les obtenir. Si $A = \{a,b,c\}$ avec $a < b < c$, on définit $\mathbf{C}_t(A)$ sur l'intervalle $[c,\infty[$ comme la martingale $M_t = \mathbb{E}[U|\mathcal{F}_t]$ et $\mathbf{\Gamma}_t(A)$ sur le même intervalle comme la dérivée de cette martingale; puis sur l'intervalle $[b,c[$, on définit $\mathbf{C}_t(A)$ comme la martingale $M_t = \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_c(A)|\mathcal{F}_t]$ et $\mathbf{\Gamma}_t(A)$ comme sa dérivée; on recommence sur $[a,b[$ en prenant $\mathbf{\Gamma}_b(A)$ comme valeur finale pour la martingale, et enfin sur $[0,a[$ à l'aide de $\mathbf{\Gamma}_a(A)$. Ceci peut être fait de façon rigoureuse et, pour $t < \inf A$, les coefficients $\mathbf{C}_t(A)$ ainsi obtenus sont bien ceux qui figurent dans la projection de U sur l'espace chaotique conditionnel $\mathbf{H}^t = \mathbf{H}^t(X)$ (c'est d'ailleurs essentiellement ainsi que l'on établit l'existence d'une bonne version de ces $\mathbf{C}_t(A)$; remarquer aussi que cette construction rend évidente la proposition 1 (i)).

La projection orthogonale de U sur $\mathbf{H}^t$ a pour norme carrée

$$F(t) = \mathbb{E}\Big[\int_{A\subset]t,\infty[} \mathbf{C}_t^2(A)\, \lambda(dA)\Big] ;$$

puisque $\mathbf{H}^s \subset \mathbf{H}^t$ pour $s < t$, la fonction F est croissante. Lorsque t tend vers l'infini, $F(t)$, qui est minorée par $\mathbb{E}[\mathbf{C}_t^2(\emptyset)] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[U|\mathcal{F}_t]^2\big]$, tend vers $\mathbb{E}[U^2]$; pour $t = 0$, $F(t)$ est le carré de la norme de la projection de U sur $\mathbf{H}^0$, c'est-à-dire sur $\mathbf{H}$ puisque $\mathcal{F}_0$ est dégénérée. Il en résulte que *pour que U soit dans* $\mathbf{H}$, *il faut et il suffit que F soit constante, c'est-à-dire décroissante.* Nous allons donc majorer les accroissements de F. Pour $s < t$,

$$F(t) - F(s) = \mathbb{E} \int_{A \subset]t,\infty[} \mathbf{C}_t^2(A)\, \lambda(dA) - \mathbb{E} \int_{A \subset]s,\infty[} \mathbf{C}_s^2(A)\, \lambda(dA)$$

$$= \mathbb{E} \int_{A \subset]t,\infty[} \Big[\mathbf{C}_t^2(A) - \mathbf{C}_s^2(A) - \int_{\substack{B \subset]s,t] \\ B \neq \emptyset}} \mathbf{C}_s^2(B \cup A)\, \lambda(dB)\Big]\, \lambda(dA)\,.$$

Mais pour $A \subset \,]t,\infty[$ le processus $\mathbf{C}_u(A)$ est sur l'intervalle $[s,t]$ une martingale de dérivée $\mathbf{\Gamma}_u(A)$, donc $\mathbb{E}[\mathbf{C}_t^2(A) - \mathbf{C}_s^2(A)] = \mathbb{E} \int_s^t \mathbf{\Gamma}_u^2(A)\, du$; et on peut par ailleurs minorer l'intégrale en B par une intégrale de s à t, en ne gardant que les B ayant un seul élément. Il vient

$$F(t) - F(s) \leq \int_{A \subset]t,\infty[} \mathbb{E}\Big[\int_s^t \left[\mathbf{\Gamma}_u^2(A) - \mathbf{C}_s^2(\{u\} \cup A)\right] du\Big]\, \lambda(dA)$$

$$= \int_s^t \int_{A \subset]t,\infty[} \mathbb{E}\left[\mathbf{\Gamma}_u^2(A) - \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u(A)|\mathcal{F}_s]^2\right]\, \lambda(dA)\, du$$

$$= \int_s^t \int_{A \subset]t,\infty[} \mathbb{E}\left[\left(\mathbf{\Gamma}_u(A) - \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u(A)|\mathcal{F}_s]\right)^2\right]\, \lambda(dA)\, du$$

$$\leq \int_s^t \int_{A \subset]u,\infty[} \left\|\mathbf{\Gamma}_u(A) - \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u(A)|\mathcal{F}_s]\right\|_2^2\, \lambda(dA)\, du\,.$$

Considérons maintenant une subdivision $\sigma = \{0 = t_0 < \ldots < t_n < \ldots\}$ de $\mathbb{R}_+$ dont le pas $\sup_n(t_{n+1} - t_n)$ est destiné à tendre vers zéro, et posons $\underline{\sigma}(u) = t_n$ pour $t_n \leq u < t_{n+1}$. On a

$$F(\infty) - F(0) = \sum_n F(t_{n+1}) - F(t_n)$$

$$\leq \int_0^\infty \int_{A \subset]u,\infty[} \left\|\mathbf{\Gamma}_u(A) - \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u(A)|\mathcal{F}_{\underline{\sigma}(u)}]\right\|_2^2\, \lambda(dA)\, du\,;$$

pour A et u fixés, $\|\mathbf{\Gamma}_u(A) - \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u(A)|\mathcal{F}_{\underline{\sigma}(u)}]\|_2^2$ tend vers zéro. Pour obtenir le résultat cherché $F(\infty) = F(0)$, il suffit que cette convergence soit dominée, donc il suffit que

$$\int_0^\infty \int_{A \subset]u,\infty[} \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u^2(A)]\, \lambda(dA)\, du < \infty\,.$$

Reécrivons cette intégrale sous la forme

$$\int_{A \in \mathcal{S}} \int_0^{\inf A} \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u^2(A)]\, du\, \lambda(dA)$$

et utilisons le fait que, sur l'intervalle $[0, \inf A[$, le processus $\mathbf{\Gamma}_u(A)$ est la dérivée de la martingale $\mathbf{C}_u(A)$ pour majorer $\int_0^{\inf A} \mathbb{E}[\mathbf{\Gamma}_u^2(A)]\, du$ par $\mathbb{E}[\mathbf{C}_{\inf A-}^2(A)]$. On obtient ainsi la condition suivante : *pour que la v. a.* $U \in \mathrm{L}^2(\mathcal{F}_\infty)$ *soit dans* $\mathbf{H}(X)$, *il suffit que*

$$\int_{A \in \mathcal{S}} \mathbb{E}[\mathbf{C}_{\inf A-}^2(A)]\, \lambda(dA) < \infty\,.$$

RÉFÉRENCES

[1] J. Azéma et M. Yor. Étude d'une martingale remarquable. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[2] Ph. Biane. Chaotic representation for finite Markov chains. *Stochastics and Stochastics Reports* 30, 61–68, 1990.

[3] A. Dermoune. Distributions sur l'espace de P. Lévy et calcul stochastique. *Ann. Inst. Henri Poincaré 26*, 101–119, 1990.

[4] M. Emery. On the Azéma martingales. *Séminaire de Probabilités XXIII*, Lecture Notes in Mathematics 1372, Springer 1989.

[5] S.-W. He and J.-G. Wang. Chaos Decomposition and Property of Predictable Representation. *Science in China* (Series A) Vol. 32 No. 4, 1989.

[6] D. Lepingle, P.-A. Meyer et M. Yor. Extrémalité et remplissage de tribus pour certaines martingales purement discontinues. *Séminaire de Probabilités XV*, Lecture Notes in Mathematics 850, Springer 1981.

[7] P.-A. Meyer. Un cours sur les intégrales stochastiques. Appendice au chapitre IV : Notions sur les intégrales multiples. *Séminaire de Probabilités X*, Lecture Notes in Mathematics 511, Springer 1976.

[8] P.-A. Meyer. Diffusions quantiques I et II, *Séminaire de Probabilités XXIV*, Lecture Notes in Mathematics 1426, Springer 1990.

[9] K. R. Parthasarathy. Remarks on the quantum stochastic differential equation $dX = (c-1)X\,d\Lambda + dQ$. Technical report 8809, Indian Statistical Institute (Dehli Centre).

[10] Ch. Stricker. À propos d'une conjecture de Meyer. *Séminaire de Probabilités XXII*, Lecture Notes in Mathematics 1321, Springer 1988.