LAURENT SCHWARTZ

Quelques corrections et améliorations à mon article « Le semi-groupe d'une diffusion en liaison avec les trajectoires »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 488-489

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__488_0>

Quelques corrections et améliorations à mon article

"Le Semi-groupe d'une diffusion en liaison avec les trajectoires"

paru dans le Séminaire de Probabilités de 1988.

Laurent SCHWARTZ

Cet article contient quelques erreurs, que je corrige ici. En outre, je simplifie certaines démonstrations, et les erreurs signalées ici à partir de III) apportent, par leur correction, un enrichissement aux énoncés de l'article.

(I) A **(0.5.2)**, j'ai écrit que les implications (0.1) $\Rightarrow$ (0.3) et (0.2) $\Rightarrow$ (0.3) étaient triviales. C'est vrai de la deuxième, mais pas de la première. En effet, si on pose $R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} P_t dt$, il n'est pas évident que $R(\lambda)g$ soit une fonction barrière pour $L - \lambda I$, pour $g \in C_0(V)$ et ≥ 0 ; car c'est $(\widetilde{L} - \lambda I)R(\lambda)g$ qui est $-g \leq 0$ et non $(L - \lambda I)R(\lambda)g$, et on ne sait justement pas que $\widetilde{L} = L$.

Donc la démonstration prouve seulement que (0.3) $\Leftrightarrow$ (0.2) $\Rightarrow$ (0.1).

Mais de toute façon mon but n'était pas de redémontrer *ici* l'équivalence, qui est traitée dans les références de (3), mais au contraire de démontrer directement (0.1) $\Rightarrow$ (0.2) à (7.3) sans passer par les fonctions-barrières.

(II) Dans la Proposition (6.1), j'ai énoncé : on suppose que tous les points de $\dot{A}$ sont réguliers pour A (en fait il suffit même de supposer que tous les points de $\dot{A}$, réguliers pour $\overline{A}$, sont réguliers pour A) $\cdots$

Ce deuxième énoncé, donné entre parenthèses sans démonstration (c'est toujours dangereux !), et non utilisé dans la suite, est faux.

Cette hypothèse plus faible est bien suffisante pour que, pour tout x_0, $S^{x_0} = T^{x_0}$**P**-ps. En effet, si $x_0 \in V \setminus A$, $X^{x_0}_{S^{x_0}}$ et $X^{x_0}_{T^{x_0}}$ sont dans $\dot{A} \cup \{\infty\} \subset \overline{A} \cup \{\infty\}$; mais $\overline{A} \setminus \overline{A}^r$ est semi-polaire, (1) donc polaire pour une diffusion L, donc n'est jamais rencontré par la trajectoire aux temps > 0 ; donc $X^{x_0}_{S^{x_0}}$ et $X^{x_0}_{T^{x_0}}$ sont **P**-ps. dans $(\dot{A} \cap \overline{A}^r) \cup \{\infty\}$ $=(\dot{A} \cap A^r) \cup \{\infty\}$. Il suffit de reprendre la démonstration de 1) de (6.1) en remplaçant $\dot{A} \cup \{\infty\}$ par $(\dot{A} \cap A^r) \cup \{\infty\}$.

Par contre, cette hypothèse plus faible n'entraîne pas la continuité presque sûre au point x_0 de $x \mapsto S^x$ et $x \mapsto T^x$. La partie 2) de la démonstration reste inchangée, mais 3) ne subsiste que pour $x_0 \in \dot{A} \cap A^r$; pour $x_0 \in \dot{A}$ et irrégulier pour A (donc aussi pour $\overline{A}$), $S^{x_0} = T^{x_0} > 0$ **P**-ps. ; la conclusion pour $\tau > S^{x_0}(\omega) = T^{x_0}(\omega)$ subsiste et montre que $x \mapsto S^x$ et $x \mapsto T^x$ sont **P**-ps. semi-continues supérieurement au point x_0, mais elles ne sont pas continues, car il existe des $x \in A$ convergeant vers x_0, alors $S^x = T^x = 0$ et $S^{x_0} = T^{x_0} > 0$.

(III.1) Le théorème (4.4) énoncé dans l'article est inexact.

La condition $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ pour $x \in V$, $0 \leq t \leq +\infty$ est bien suffisante, mais n'est pas nécessaire ; la démonstration de sa nécessité utilise $t = t_0 - 2\varepsilon_n$, ce qui n'est possible que pour $t_0 > 0$. Le véritable énoncé est le suivant :

Théorème (4.4) modifié.— *Les propriétés (4.0), (4.1), (4.2), (4.3) sont équivalentes à l'ensemble des trois propriétés suivantes :*

a) $x \mapsto \zeta^x$ *est continue en probabilité (ou seulement en loi) sur* V *;*

b) *pour* $x \in V, 0 < t < +\infty$, $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ *;*

c) ($\mathbf{P}\{\zeta^x = 0\}$ *n'est pas forcément nulle, mais)* $x \mapsto \mathbf{P}\{\zeta^x = 0\}$ *est continue sur* V.

Démonstration. Utilisons la remarque suivant (5bis.3.1.5) : la continuité en (t, x) est équivalente à la continuité séparée en t et en x.

Dire que $t \mapsto \mathbf{P}\{t < \zeta^x\} = \zeta^x(\mathbf{P})]t, +\infty]$ est continue, c'est dire que $\zeta^x(\mathbf{P})$ est diffuse sur $]0, +\infty[$, c-à-d. que $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ pour $x \in V$, $0 < t < +\infty$, c'est b).

Dire que $x \mapsto \zeta^x(\mathbf{P})(]t, +\infty])$ est continue, et, par complémentarité, que $x \mapsto \zeta^x(\mathbf{P})[0, t]$ est continue, c'est dire, pour $t > 0$ de manière que le point frontière t de $]t, +\infty]$ ne porte pas de masse pour les $\zeta^x(\mathbf{P})$, que $x \mapsto \zeta^x(\mathbf{P})$ est étroitement continue, ou que $x \mapsto \zeta^x$ est continue en loi sur V ; sa semi-continuité inférieure presque sûre entraîne sa continuité en probabilité, qui est a). Pour t=0, cela exprime que $x \mapsto \mathbf{P}\{\zeta^x = 0\}$ est continue, qui est c).

Suivant (4.4.1) de l'article, cette dernière condition peut aussi s'écrire : $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = 0 \text{ et } \zeta^x > 0\}$ tend vers 0 quand x tend vers $x_0 \in V$. ∎

Ce raisonnement est plus simple que celui de l'article publié ; je n'avais pas vu que la continuité en loi. et la semi-continuité inférieure presque sûre entraînaient la continuité en probabilité. C'est en fait ce que j'avais redémontré dans l'article !

Contre-exemple Un contre-exemple simple montre que la condition $\mathbf{P}\{\zeta^x = 0\}$ n'était pas nécessaire. Prenons $P \equiv 0$, $\mathbf{P}(t, x) \equiv 0$. C'est $\mathbf{E}(f(X_t^x)) = 0$ pour toute f borélienne bornée (nulle à l'∞), donc $X_t^x \equiv \infty$, $\zeta^x \equiv 0$. Donc $\mathbf{P}\{\zeta^x = 0\} = 1$ pour tout x.

(III.2) Cette modification en entraîne d'autres dans la suite, nous ne les donnerons que très rapidement, la démonstration simplifiée est la même. Au paragraphe 5, la condition $P_0 f \in CB(V)$ a été oubliée au début de (5.0) ; dans (5.4), on remplace $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ par l'ensemble des conditions b) et c) de (4.4) modifié.

(III.3) Au théorème (5bis.1), on remplace $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0\} = 0$ pour $t_0 \geq 0$ par : $\mathbf{P}\{\zeta^{x_0} = t_0\}$ pour $t_0 > 0$ et $x \mapsto \mathbf{P}\{\zeta^x = 0\}$ est continue au point x_0 ; pour que $(t, x) \mapsto \mathbf{P}(t, x)$ soit étroitement continue aux points (t_0, ∞), $t_0 > 0$, il faut et il suffit que ζ^x tende vers 0 en probabilité pour x tendant vers ∞, et pour qu'elle soit continue aux points (t_0, ∞), $t_0 \geq 0$, il faut et il suffit que $\mathbf{P}\{\zeta^x = 0\}$ tende vers 1 pour x tendant vers ∞.

(III.4) (5.bis.2) : la continuité partielle en t a été déjà vue au présent problème (4.4) modifié : on trouve la condition $\mathbf{P}\{\zeta^x = t\} = 0$ pour $0 < t < +\infty$.

(5bis.3) : la continuité partielle en x demande le théorème (5bis.3.1) de l'article publié ; il n'y a rien à y modifier sauf quelques coquilles : remplacer (resp. pour $t > 0$) par : (resp. et pour $t > 0$), et supprimer (resp. pour $t > 0$) dans (3.1.3).

(III.5) Il y a deux coquilles dans les exemples (5.4.2) :
dans (5.4.2.2), $X_t^x = \frac{x}{(1-tx)_+} = \frac{1}{(\frac{1}{x}-t)_+}$;

dans (5.4.2.4), $X_t^x = \infty$ pour $x = \infty$.

A la fin de **1.**, j'ai bien indiqué qu'on n'impose plus $X_0^x = x$ **P**-ps., toutefois on impose quand même $X_t^\infty = \infty$, $\zeta^\infty = 0$, et $(t, x, \omega) \mapsto X_t^x(\omega)$ borélienne.

Note de bas de page

(1) Blumenthal-Getoor, Markov Processes and Potential Theory, Acad. Press, prop.3.3, p.80.