Youssef Ouknine

Temps local du produit et du sup de deux semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 477-479
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__477_0>

Séminaire de Probabilités XXIV 1988/89

TEMPS LOCAL DU PRODUIT ET DU SUP DE DEUX SEMIMARTINGALES

par Y. Ouknine

Nous nous proposons dans ce travail de donner des formules pour le temps local du produit de deux semimartingales, et du *sup* de deux semimartingales continues. P.A. Meyer nous a signalé que de telles formules ont été obtenues avant nous par Yan [3] et [4] (en chinois). Comme elles sont peu connues, nous les présentons ici tout de même : pour la première, nous donnons une démonstration très voisine de la démonstration de Yan, qui était plus courte que la nôtre.

Temps locaux. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ une base stochastique fixée, vérifiant les conditions habituelles de la théorie générale des processus. Le temps local de la semimartingale Z en 0 est défini par la "formule de Tanaka"

$$(1) \qquad Z_t^+ = Z_0^+ + \int_0^t 1_{\{Z_s>0\}}\, dZ_s + \sum_{s\leq t} (1_{\{Z_{s-}\leq 0\}}\, Z_s^+ + 1_{\{Z_{s-}<0\}}\, Z_s^-) + \tfrac{1}{2} L_t(Z)\,.$$

En utilisant le fait que la mesure $dL_s(Z)$ est diffuse et portée par $\{s\,:\, Z_s = 0\}$, on déduit de (1) la formule très simple (donnée par Yan [3])

$$\tfrac{1}{2} L_t(Z) = PC \int_0^t 1_{\{Z_{s-}=0\}}\, dZ_s^+ = \tfrac{1}{2} L_t(Z^+)\,.$$

où la notation PC appliquée à un processus à variation finie signifie que l'on en garde seulement la partie continue. Nous désignons aussi par $L_t^-(Z)$ le temps local de $-Z$, donné par

$$\tfrac{1}{2} L_t^-(Z) = PC \int_0^t 1_{\{Z_{s-}=0\}}\, dZ_s^-\,.$$

Temps local du produit. Voici la première formule :

THÉORÈME. *Soient X et Y deux semimartingales. Alors le temps local en 0 de leur produit $Z = XY$ est donné par*

$$L_t(Z) = \int_0^t X_{s-}^+\, dL_s(Y) + \int_0^t Y_{s-}^+\, dL_s(X) + \int_0^t X_{s-}^-\, dL_s^-(Y) + \int_0^t Y_{s-}^-\, dL_s^-(X)\,.$$

DÉMONSTRATION. Nous calculons la partie continue $PC(1_{\{Z_{s-}=0\}}\, dZ_s^+)$. Nous avons $Z^+ = X^+Y^+ + X^-Y^-$. La formule d'intégration par parties donne trois termes contenant X^+, Y^+

$$(a)\,:\, 1_{\{Z_{s-}=0\}}\, X_s^+\, dY_s^+\,,\ (b)\,:\, 1_{\{Z_{s-}=0\}}\, Y_s^+\, dX_s^+\,,\ (c)\,:\, 1_{\{Z_{s-}=0\}}\, [dX_s^+, dY_s^+]\,,$$

et trois termes analogues avec X^-, Y^-, qui feront appararaître des temps locaux L^-. Commençons par (c) : il s'agit d'un processus à variation finie, valant

$$[1_{\{X_{s-}=0\}}\, dX_s^+, dY_s^+] + [dX_s^+, 1_{\{X_{s-}\neq 0, Y_{s-}=0\}}\, dY_s^+]$$

et donc purement discontinu : l'application de l'opérateur PC donne donc 0. Ensuite, le terme (a)

$$1_{\{Y_{s-}=0\}}\, X_s^+\, dY_s^+ + 1_{\{X_{s-}=0, Y_{s-}=0\}}\, X_s^+\, dY_s^+ .$$

L'application de PC au premier terme donne $\frac{1}{2}X_s^+ dL_s(Y)$, et l'application de PC au second donne 0. Le terme (b) se traite de même, et on obtient l'énoncé en ajoutant les termes analogues pour X^-, Y^-. □

REMARQUE. Le même raisonnement conduit à une formule plus agréable (*cf.* [3]) si l'on utilise le temps local symétrique $d\hat{L}_t(Z) = dL_t(Z) + dL_t(-Z) = 2PC(1_{\{Z_{s-}=0\}}\, d|Z|_s)$, car alors on a simplement $|Z| = |X||Y|$.

Temps local d'un sup. Ici aussi, il existe un travail de Yan [4], mais il est plus difficilement accessible. Il semble que nous n'obtenons pas exactement la même formule que Yan.

THÉORÈME. *Soient X et Y deux semimartingales continues. Alors le temps local en* 0 *de leur sup $Z = X \vee Y$ est donné par*

$$L_t(Z) = \int_0^t 1_{\{Y_s\leq 0\}}\, dL_s(X) + \int_0^t 1_{\{X_s<0\}}\, dL_s(Y) + \int_0^t 1_{\{X_s=Y_s=0\}}\, dL_s(Y^+ - X^+) .$$

DÉMONSTRATION. Nous avons

$$\tfrac{1}{2} dL_s(Z) = 1_{\{Z_s=0\}}\, dZ_s^+ = 1_{\{Y_s<X_s=0\}}\, dZ_s^+ + 1_{\{X_s<Y_s=0\}}\, dZ_s^+ + 1_{\{X_s=Y_s=0\}}\, dZ_s^+ .$$

Appelons ces trois termes (a), (b), (c). Dans l'ouvert aléatoire prévisible $\{Y < X\}$ les semimartingales Z et X^+ sont égales, donc (a) vaut (*cf.* [5]) $1_{\{Y_s<0\}}\, 1_{\{X_s=0\}}\, dX_s^+ = \frac{1}{2}1_{\{Y_s<0\}}\, dL_s(X)$. De même, (b) vaut $\frac{1}{2}1_{\{X_s<0\}}\, dL_s(Y)$. Pour (c), nous pouvons écrire $(X\vee Y)^+ = X^+ \vee Y^+ = X^+ + (Y^+ - X^+)^+$, et par conséquent

$$(c) = \tfrac{1}{2}1_{\{Y_s=0\}}\, dL_s(X) + \tfrac{1}{2}1_{\{X_s=Y_s=0\}}\, dL_s(Y^+ - X^+) .$$

Le premier de ces deux termes s'ajoute à (a) pour former le premier terme de (2), et le second donne le dernier terme de (2).

Un cas où ce dernier terme est nul est celui où $L(Y - X) = 0$. En effet, on établit dans ce cas, grâce au nombre de montées et à l'approximation du temps local que

$$L_t(Y^+ - X^+) = \int_0^t 1_{\{Y_s<0\}}\, dL_s(Y)$$

(voir Weinryb [2]). Par suite

$$1_{\{X_s=Y_s=0\}}\, dL_s(Y^+ - X^+) = 1_{\{X_s=Y_s=0\}}\, 1_{\{Y_s<0\}}\, dL_s(Y) = 0 .$$

REMARQUE. Yan indique dans [4] la formule

$$L(X \vee Y) + L(X \wedge Y) = L(X) + L(Y)$$

qui est démontrée dans [1] à partir de l'approximation du temps local par les nombres de montées. En voici une démonstration purement algébrique. Nous rappelons d'abord que $L(Z) = L(Z^+)$ pour toute semimartingale Z. Cela permet de se ramener au cas où X et Y sont positives. La formule revient à vérifier

$$\begin{aligned} 1_{\{X=Y=0\}} d(X \vee Y) + (1_{\{0=X<Y\}} + 1_{\{0=Y<X\}} + 1_{\{X=0=Y\}}) d(X \wedge Y) = \\ = 1_{\{X=0\}} dX + 1_{\{Y=0\}} dY \end{aligned}$$

On remplace $d(X \wedge Y)$ par dY dans l'ouvert aléatoire prévisible $\{Y < X\}$, et par dX dans $\{X < Y\}$. On remplace aussi $d(X \vee Y)$ par $dX + dY - d(X \wedge Y)$, et alors on obtient le résultat cherché.

Ce résultat s'étend aux semimartingales discontinues, en remplaçant X, Y par X_-, Y_- dans les indicatrices et en appliquant l'opérateur PC. Il y a cependant une difficulté : l'ensemble prévisible $H = \{Y_- < X_-\}$, par exemple, n'est plus un ouvert aléatoire, et on ne peut appliquer automatiquement la théorie de [5] pour remplacer la semimartingale $X \vee Y$ par la semimartingale X qui lui est égale dans H. Cependant, la semimartingale $Z = X \vee Y - X$ est telle que $Z_- = 0$ dans H, donc $1_H dZ = 1_H (1_{\{Z_-=0\}} dZ)$, et cette dernière semimartingale est à variation finie, et nulle dans tout intervalle ouvert où Z est constante, donc dans l'intérieur de H. Donc $PC(1_H dZ) = 0$ et le remplacement est permis.

Je remercie P.A. Meyer pour ses commentaires sur la première rédaction de ce travail, qui ont permis de l'améliorer.

REFERENCES

[1] OUKNINE (Y.). Généralisation d'un lemme de S. Nakao et applications. *Stochastics,* **29**, 1988, p. 149–157.

[2] WEINRYB (S.). Etude d'une équation différentielle stochastique avec temps local. *C.R.A.S. Paris,* **296**, 1985, p. 519–521.

[3] YAN (J.A.). Some formulas for the local time of semimartingales *Chinese Ann. of M.,* 1980, p. 545–551.

[4] YAN (J.A.). A formula for local times of semimartingales. *Dong Bei Shu Xue,* **1**, 1985, p. 138–140.

[5] ZHENG (W.A.). Semimartingales in predictable random open sets. *Sém. Prob. XVI,* Lect. Notes in M. 920, 1982, p. 370–379.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Cadi Ayyad
Marrakech, MAROC