LUCA PRATELLI

Sur le lemme de mesurabilité de Doob

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 46-51
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__46_0>

Sur le lemme de mesurabilité de Doob

Luca Pratelli

Università di Pisa, Dipartimento di Matematica

Via Buonarroti 2, I - 56100 Pisa

Résumé - On étudie les espaces mesurables G tels que le lemme de mesurabilité de Doob soit valable en toute généralité pour des fonctions à valeurs dans G.

Introduction

Etant donnés un ensemble E, un espace mesurable $(F, \mathcal{F})$ et une application f de E dans F, considérons sur E la tribu $\mathcal{E}$ "engendrée par f", c'est-à-dire constituée par les ensembles de la forme $f^{-1}(A)$, avec A élément de $\mathcal{F}$. Il est bien connu que, dans ces conditions, toute fonction mesurable g sur $(E, \mathcal{E})$ est de la forme

$$g = h \circ f,$$

avec h fonction mesurable sur $(F, \mathcal{F})$.

Ce lemme classique, qui remonte à Doob, n'est démontré habituellement que pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\overline{\mathbb{R}}$). Certains auteurs ajoutent cependant que la démonstration s' étend aisément au cas des fonctions à valeurs dans un espace métrique complet et séparable (voir [1], Chap. I, n. 18, p. 18-19).

N. Pintacuda [2] a donné récemment une caractérisation simple des "espaces de Doob": c'est-à-dire des espaces mesurables G tels que le lemme de Doob soit valable, en toute généralité, pour des fonctions à valeurs dans G.

Dans le présent article, après avoir redémontré de manière plus directe le résultat principal de Pintacuda, et avoir remarqué que les espaces de Doob séparables ne sont rien d'autre que les espaces mesurables lusiniens (au sens de [1]), nous passons à étudier les espaces de Doob non séparables. Nous démontrons entre autre qu'étant donné un ensemble I, de cardinal $\aleph_1$, il existe une partition de $\{0,1\}^I$ formée de deux parties, dont l'une n'est pas un espace de Doob, tandis que l'autre est un espace de Doob non isomorphe à aucune partie mesurable d'un produit d'espaces séparables et séparés.

1. Hypothèses, notations, rappels

Un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ est dit ***séparable*** si la tribu $\mathcal{E}$ de ses parties mesurables possède un système dénombrable de générateurs.

Rappelons que, dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$, les *atomes* sont les classes d'équivalence définies par l'application $x \mapsto \epsilon_x$ qui à tout élément x de E associe la mesure de Dirac ϵ_x (considérée comme une mesure sur la tribu $\mathcal{E}$). Lorsque cette application est injective (c'est-à-dire lorsque chaque atome est réduit à un point), l'espace $(E, \mathcal{E})$ est dit ***séparé***.

Dans la suite, un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ sera souvent appelé ***espace***, et désigné simplement par E. Toute partie de E (mesurable ou non dans E) sera considérée comme un sous-espace de E, c'est-à-dire comme munie de la tribu induite par celle des parties mesurables de E. De même, pour toute famille $((E_i, \mathcal{E}_i))_{i \in I}$ d'espaces, le produit cartésien $\prod_{i \in I} E_i$ sera considéré comme muni de la tribu produit $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{E}_i$. Enfin, l'ensemble $\{0,1\}$ sera considéré comme muni de la tribu de toutes ses parties.

Etant donnés deux espaces $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F})$ et une application f de E dans F, celle-ci sera dite ***stricte*** si la tribu $\mathcal{E}$ coincide avec la tribu engendrée par f:

$$\mathcal{E} = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}.$$

(1.1) Proposition. *Pour tout espace G, les conditions qui suivent sont équivalentes:*

(a) *Etant donnés deux espaces E, F, une application stricte f de E dans F et une application mesurable g de E dans G, celle-ci est constante sur chacune des classes d'équivalence définies par f.*

(b) *Etant donnés un espace E et une application mesurable g de E dans G, celle-ci est constante sur chacun des atomes de E.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b): Il suffit d'appliquer l'hypothèse (a) en prenant

$$F = \{0,1\}^{\mathcal{E}}, \qquad f(x) = (I_A(x))_{A \in \mathcal{E}}$$

(où $\mathcal{E}$ désigne la tribu des parties mesurables de E).

(b) $\Rightarrow$ (c): Il suffit d'appliquer l'hypothèse (b) en prenant $E = G$ et g égale à l'application identique.

(c) $\Rightarrow$ (a): Supposons G séparé, et soit (x, x') un couple d'éléments de E, avec $f(x) = f(x')$. Il s'agit de prouver que $g(x) = g(x')$. Remarquons à cet effet que les images des deux mesures de Dirac ϵ_x, $\epsilon_{x'}$ par l'application mesurable f sont identiques. Puisque f est stricte, ceci implique $\epsilon_x = \epsilon_{x'}$, donc $\epsilon_{g(x)} = \epsilon_{g(x')}$. Il en résulte ($G$ etant séparé) $g(x) = g(x')$.

2. Espaces injectifs

Suivant la terminologie de N. Pintacuda [2], un espace G sera dit *injectif* si, pour tout espace F et toute partie E de F (mesurable ou non dans F), toute application mesurable de E dans G peut être prolongée en une application mesurable de F dans G.

On reconnaît immédiatement que l'espace $\{0,1\}$ est injectif et que le produit d'une famille quelconque d'espaces injectifs est encore un espace injectif.

(2.1) Proposition. *Pour qu'un espace G soit injectif, il suffit qu'il existe un espace H injectif et deux applications mesurables $u : G \to H, v : H \to G$, telles que $v \circ u$ coïncide avec l'identité de G.*

Démonstration. Considérons un espace F, une partie E de F et une application mesurable g de E dans G. Puisque H est injectif, il existe une application mesurable h de F dans H qui prolonge $u \circ g$. On voit alors que $v \circ h$ est une application mesurable de F dans G, qui prolonge g. Cela prouve que G est injectif.

(2.2) Corollaire. *Toute partie mesurable d'un espace injectif est un espace injectif.*

(2.3) Proposition. *Supposons que l'espace G possède un recouvrement dénombrable $(G_i)_{i \geq 1}$ formé de parties mesurables, dont chacune est un espace injectif. L'espace G est alors injectif.*

Démonstration. D'après le corollaire précédent, on pourra supposer, sans diminuer la généralité, que $(G_i)_{i \geq 1}$ est une partition de G.

Considérons un espace F, une partie E de F et une application mesurable g de E dans G. Pour tout i, l'ensemble $g^{-1}(G_i)$ est mesurable dans E: il est donc de la forme $E \cap A_i$, avec A_i partie mesurable de F. Quitte à remplacer A_i par $A_i \cap \left(\bigcap_{j<i} A_j\right)^c$, on pourra supposer les A_i deux à deux disjoints. Désignons par A leur réunion. On a $E \subset A$. Pour tout i, la restriction de g à $E \cap A_i$ peut être prolongée en une application mesurable h_i de A_i dans G_i. En recollant les h_i, on obtient une application mesurable de A dans G, qu'on peut prolonger en une application mesurable de F dans G (en lui donnant une valeur constante sur l'ensemble mesurable $F \backslash A$). Cela prouve que l'espace G est injectif.

(2.4) Proposition. *Soit E un espace séparé (non réduit à un point), et soit x un élément de E, tel que $E \backslash \{x\}$ soit injectif.*

L'ensemble $\{x\}$ est alors mesurable dans E.

Démonstration. L'espace $E \backslash \{x\}$ étant injectif, il existe une application mesurable f de E dans $E \backslash \{x\}$ qui prolonge l'identité de $E \backslash \{x\}$. Puisque E est séparé, et que $f(x)$ est distinct de x, il existe une partie mesurable A de E telle que l'on ait $f(x) \in A$ (c'est-à-dire $x \in f^{-1}(A)$), mais $x \notin A$. L'ensemble A est alors mesurable dans $E \backslash \{x\}$, de sorte que l'ensemble $\{x\} = f^{-1}(A) \backslash A$ est mesurable dans E.

(2.5) Proposition. *Etant donnés les espaces mesurables $(E, \mathcal{E}), (F, \mathcal{F}), (G, \mathcal{G})$ et les applications $f : E \to F, g : E \to G, h : F \to G$, liées par la relation $g = h \circ f$, supposons f stricte et surjective.*

La mesurabilité de h équivaut alors à celle de g.

Démonstration. L'application $A \mapsto f^{-1}(A)$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}$ est un homomorphisme d'algèbres de Boole. Cet homomorphisme est surjectif (car f est stricte) et injectif (car f est surjective). Il est donc un isomorphisme d'algèbres de Boole, d' où la conclusion.

3. Espaces de Doob

Nous dirons qu'un espace G possède la *propriété de Doob* (ou que G est un *espace de Doob*) si pour toute application stricte f d'un espace E dans un espace F, les applications mesurables de E dans G sont celles de la forme $h \circ f$, avec h application mesurable de F dans G.

En utilisant cette terminologie, le résultat principal de [2] peut être énoncé de la manière suivante:

(3.1) Théorème. *Pour qu'un espace G possède la propriété de Doob, il faut et il suffit qu'il soit séparé et injectif.*

Démonstration. Supposons d'abord que G possède la propriété de Doob. Il résulte alors de (1.1) que G est séparé.

En outre, G est injectif, comme on le voit en appliquant la propriété de Doob au cas particulier où E est un sous-espace de F et f est l'injection canonique de E dans F. (On remarquera que celle-ci est stricte par définition même de sous-espace).

Réciproquement, supposons G séparé et injectif, et démontrons que G possède la propriété de Doob. Considérons à cet effet une application stricte f d'un espace E dans un espace F, et une application mesurable g de E dans G. Puisque G est séparé, il existe, en vertu de (1.1), une application h de $f(E)$ dans G, telle que l'on ait $g = h \circ f$.

Il résulte de la proposition (2.5) (appliquée en prenant $F = f(E)$) que h est mesurable en tant qu'application du sous-espace $f(E)$ de F dans l'espace G. Puisque celui-ci est injectif, h peut être prolongée en une application mesurable de l'espace F tout entier dans G, et cela prouve que G possède la propriété de Doob.

(3.2) Proposition. *Les espaces de Doob séparables sont les espaces mesurables lusiniens(au sens de* [1]). *Par conséquent, tous les espaces de Doob séparables non dénombrables sont isomorphes (en particulier, isomorphes à* R *ou à* $\{0,1\}^{\mathsf{N}}$).

Démonstration. Il est clair, tout d'abord, qu'un espace lusinien est séparable et de Doob, car il est dénombrable ou isomorphe à $\{0,1\}^{\mathsf{N}}$.

Réciproquement, soit E en espace séparable, et supposons qu'il possède la propriété de Doob, c'est-à-dire (voir (3.1)) qu'il soit séparé et injectif. Puisque E est séparable et séparé, on pourra supposer qu'il est un sous-espace de $\{0,1\}^{\mathsf{N}}$ (voir [1], Chap. I, n. 11, p. 15). Puisque E est injectif, l'application identique de E se prolonge en une application mesurable f de $\{0,1\}^{\mathsf{N}}$ dans E.

On a alors

$$E = \{x \in \{0,1\}^{\mathsf{N}} : (x, f(x)) \in \Delta\},$$

où Δ désigne la diagonale de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Cela prouve que E est une partie mesurable de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donc un espace mesurable lusinien.

Nous nous proposons maintenant de montrer, par des exemples, que la situation est beaucoup plus compliquée pour ce qui concerne les espaces non séparables.

Rappelons tout d'abord un résultat concernant les espaces séparables:

Proposition. *Soit E un espace séparé.*

(a) *Si E est séparable, alors toute partie de E réduite à un point est mesurable* (voir [1], Chap. I, n. 10).

(b) *Si E est un produit d'espaces séparables et séparés, et s'il existe une partie mesurable de E réduite à un point, alors E est séparable.*

Fixons maintenant un ensemble d'indices I *non dénombrable*, et plaçons nous dans l'espace produit $\{0,1\}^I$. Pour tout élément α de I, désignons par X_α l'application coordonnée d'indice α. En outre, désignons par O l'élément de $\{0,1\}^I$ dont toutes les coordonnées sont nulles, et par e_α l'élément dont toutes cordonnées sont nulles, sauf celle d'indice α (égale à 1).

Posons enfin

$$E = \{\sum_{\alpha\in I} X_\alpha \le 1\} = \{O\} \cup \{e_\alpha : \alpha \in I\}.$$

(3.4) Théorème. *Avec les notations qu'on vient de fixer, on a les conclusions suivantes:*

(a) *Les parties mesurables de E sont les parties dénombrables de $E\backslash\{O\}$ et leurs complémentaires par rapport à E. Par conséquent, $\{O\}$ est la seule partie de E, réduite à un point, qui ne soit pas mesurable.*

(b) *L' espaces obtenu en munissant I de la tribu engendrée par les parties réduites à un point n'est pas injectif.*

(c) *Le complémentaire de E dans $\{0,1\}^I$ n'est pas injectif.*

(d) *Si I a cardinal $\aleph_1$, l'espace E est injectif (donc de Doob).*

(e) *En tout cas, l'espace E n'est pas isomorphe à une partie mesurable d'un produit d'espaces séparables et séparés.*

(f) *Si D_1, D_2 sont deux espaces mesurables lusiniens non équipotents, les deux espaces (non séparables) $D_1 \times E, D_2 \times E$ (qui sont de Doob si I a cardinal $\aleph_1$) ne sont pas isomorphes.*

Démonstration. (a) La tribu des parties mesurables de $\{0,1\}^I$ est engendrée par les ensembles de la forme $\{X_\alpha = 1\}$, de sorte que sa trace sur E est engendrée par les ensembles de la forme

$$\{X_\alpha = 1\} \cap E = \{e_\alpha\}.$$

L'assertion (a) est ainsi démontrée.

(b) L'espace obtenu en munissant I de la tribu engendrée par les parties réduites à un point est isomorphe à l'espace

$$E\backslash\{O\} = \{e_\alpha : \alpha \in I\}.$$

Celui-ci n'est pas injectif, car l'ensemble $\{O\}$ n'est pas mesurable dans E (voir (2.4)).

(c) Pour démontrer que le complémentaire E^c de E dans $\{0,1\}^I$ n'est pas injectif, il suffit (voir (2.2)) de prouver que, pour tout élément α de I, l'espace

$$E^c \cap \{X_\alpha = 1\} = \{X_\alpha = 1\}\backslash\{e_\alpha\}$$

n'est pas injectif. Mais cela résulte aussitôt du fait que l'espace en question est isomorphe à $\{0,1\}^I\backslash\{O\}$ et que $\{O\}$ n'est pas mesurable dans $\{0,1\}^I$ (voir (2.4)).

(d) Supposons que le cardinal de I soit $\aleph_1$. On peut alors munir I d'une relation de bon ordre, par rapport à laquelle tout élément possède un ensemble de prédécesseurs au plus dénombrable.

Pour prouver que l'espace E est injectif, il suffit de construire une application v de $\{0,1\}^I$ dans E, dont la restriction à E coïncide avec l'identité (voir (2.1)). Posons $v(O) = O$ et, pour tout élément x de $\{0,1\}^I\backslash\{O\}$, $v(x) = e_\alpha$, où $\alpha = \min\{\beta \in I : X_\beta(x) = 1\}$.

Il est clair que v coïncide sur E avec l'identité.

En outre, v est mesurable: pour le voir, il suffit de prouver que, pour tout élément β de I, l' ensemble $v^{-1}(e_\beta)$ est mesurable dans $\{0,1\}^I$. Or ceci résulte de la relation

$$v^{-1}(e_\beta) = \{X_\beta = 1\} \cap \bigcap_{\alpha<\beta} \{X_\alpha = 0\},$$

compte tenu du fait que l'ensemble $\{\alpha \in I : \alpha < \beta\}$ est dénombrable.

(e) Puisque l'ensemble $\{O\}$ n'est pas mesurable dans E, l'espace E n'est pas séparable (voir (3.3)(a)). En raisonnant par l'absurde, supposons que E soit isomorphe à une partie mesurable d'un produit d'espaces séparables et séparés. D'après (3.3)(b), cette hypothèse entraîne que E est séparable (car tout ensemble du type $\{e_\alpha\}$ est mesurable dans E). On aboutit ainsi à une contradiction.

(f) Les seules parties de $D_i \times E$ réduites à un point et non mesurables sont celles de la forme $\{(x,O)\}$, avec $x \in D_i$. Il suffit donc de remarquer que l'ensemble de ces parties est équipotent à D_i.

Bibliographie

[1] C. Dellacherie - P.-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chap. I à IV. Hermann, 1975.

[2] N. Pintacuda, *Sul lemma di misurabilità di Doob*, Boll. Un. Mat. Ital. (7) 3-A (1989), 237-241.