Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Juan Ruiz de Chavez
Paul-André Meyer

Positivité sur l'espace de Fock

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 461-465
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__461_0>

POSITIVITÉ SUR L'ESPACE DE FOCK

par J. RUIZ de CHAVEZ[1] et P.A. MEYER

Introduction. Nous nous proposons dans cette note de regrouper divers résultats simples sur le thème suivant : comment reconnaître qu'une v.a. f sur l'espace de Wiener est positive en connaissant, soit son développement suivant les chaos de Wiener $f = \int \hat{f}(A)dX_A$ (notation courte des intégrales stochastiques multiples, *cf. Sém. Prob. XXI*, p. 34), soit sa "fonction caractéristique" $\tilde{f}(u) = <\mathcal{E}(u), f>$ ($\mathcal{E}(u)$ est le vecteur exponentiel $\exp(\int u_s dX_s - \frac{1}{2}\int u_s^2 ds)$).

1. Recherche d'un "théorème de Bochner" Soit G un groupe localement compact commutatif, et soit $\widehat{G}$ son groupe dual (noté additivement : $\chi_{x+y} = \chi_x\chi_y$). Le théorème de Bochner caractérise les fonctions continues $\hat{f}$ sur $\widehat{G}$ qui sont transformées de Fourier de mesures positives bornées, par la propriété de "type positif"

$$\sum_i \overline{\lambda}_i\lambda_j \hat{f}(x_j - x_i) \geq 0 \tag{1}$$

pour toute suite finie de nombres complexes λ_i et d'éléments x_i de $\widehat{G}$. On peut aussi mettre le théorème de Bochner sous la "forme continue"

$$\int_{\widehat{G}} (\check{\varphi} * \varphi)(x)\hat{f}(x)\,dx \geq 0 \tag{2}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction continue à support compact sur $\widehat{G}$, et $\check{\varphi}(x) = \overline{\varphi(-x)}$.

Appliquons cela au cas trivial du jeu de pile ou face (le "bébé Fock") : le groupe G est ici l'ensemble $\Omega = \{-1,1\}^N$ (avec ses coordonnées x_i et sa mesure de Haar $\mathbb{P}$ sous laquelle les x_i sont des v.a. de Bernoulli symétriques indépendantes). Le groupe $\widehat{G}$ est l'ensemble des parties A de $\{1,\ldots,N\}$, l'addition étant la différence symétrique Δ, et le caractère correspondant x_A étant le produit des x_i, $i \in A$. La transformée de Fourier d'une v.a. f sur Ω correspond au "développement en chaos" $f = \sum_A \hat{f}(A)x_A$. Les caractères étant tous réels, il est inutile de s'encombrer des fonctions complexes, et la v.a. (réelle) f est positive si et seulement si

$$\sum_i \lambda_i\lambda_j \hat{f}(A_i \Delta A_j) \geq 0 \tag{3}$$

pour toute suite d'ensembles A_i et de nombres réels λ_i. La "forme continue" (2) du théorème s'écrit

$$\sum_H \hat{f}(H) \sum_{A\Delta B=H} \lambda(A)\lambda(B) \geq 0\,. \tag{4}$$

[1] 1. Le séjour en France de J. Ruiz de Chavez a été subventionné par une bourse de coopération scientifique avec les pays en développement de la Communauté Européenne.

Rappelons maintenant l'analogie entre les développements en chaos pour le jeu de pile ou face et pour le mouvement brownien : Ω est à présent l'espace de Wiener, et la v.a. réelle $f \in L^2$ admet un développement suivant les chaos de Wiener, écrit en "notation courte" $f = \int \hat{f}(A) dX_A$. Il doit y avoir un "théorème de Bochner" permettant de reconnaître sur la fonction $\hat{f}$ la positivité de f. Nous ne nous demanderons pas si toute fonction ou classe de fonctions $\hat{f}(A)$ satisfaisant à la condition de "type positif" est le développement en chaos d'une mesure positive sur Ω.

Nous commençons par rappeler un lemme bien connu, avec sa démonstration pour éviter des recherches inutiles au lecteur. Nous disons qu'une v.a. est *d'ordre fini* si son développement en chaos de Wiener ne comporte qu'un nombre fini d'intégrales multiples.

THÉORÈME. *Les combinaisons linéaires de vecteurs exponentiels, $\mathcal{E}(u)$ (u réelle) sont denses dans tout L^p, $1 < p < \infty$. Il en est de même des v.a. d'ordre fini.*

DÉMONSTRATION. Un argument simple de transformation de Fourier montre que les combinaisons linéaires de vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(iu)$ (u réelle) sont denses dans L^p. Soit alors $\varphi \in L^q$ (l'exposant conjugué de p) orthogonale aux vecteurs exponentiels réels ; la fonction entière $<\varphi, \mathcal{E}(zu)>$ est nulle sur l'axe réel, donc nulle, et il en résulte que $\varphi = 0$. Quant aux vecteurs d'ordre fini, il suffit de démontrer que le développement de Wiener d'un vecteur exponentiel $\mathcal{E}(u)$ converge dans L^p. Le cas $p \leq 2$ est évident. Pour $p > 2$, la norme L^2 du terme d'ordre n est de la forme $K^n/\sqrt{n!}$, tandis que le rapport de la norme L^p à la norme L^2 est en C^n, donc la série est normalement convergente. □

Considérons une v.a. d'ordre fini $\ell = \int \lambda(A) dX_A$. D'après le lemme précédent, les v.a. de ce type sont denses dans L^4, donc leurs carrés sont denses dans le cône positif de L^2, et pour tester la positivité d'une v.a. $f \in L^2$ il suffit d'écrire que $\mathbb{E}[f\ell^2] \geq 0$, ce qui s'écrit grâce à la formule de multiplication des intégrales stochastiques

$$\int \hat{f}(H) \sum_{A+B=H} \lambda(A+C)\lambda(B+C)\, dH dC \geq 0 \tag{5}$$

Ceci est l'analogue exact de (4). On peut encore transformer l'intégrale suivant une formule connue (*Sém. Prob. XX*, p. 308, formule (7))

$$\int \lambda(A+C)\lambda(B+C)\hat{f}(A+B)\, dAdBdC \geq 0\,. \tag{6}$$

REMARQUES. 1) On pourrait écrire formellement des choses analogues pour le produit de Poisson, mais le problème de densité serait plus délicat, et la formule encore moins utilisable.

2) On peut estimer l'inefficacité de la forme (5) en y portant le développement de Wiener d'un carré $f = g^2$, calculé au moyen de la formule de multiplication. Le résultat devrait être évident, mais ne l'est pas.

Passons aux critères utilisant les vecteurs exponentiels. Les vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(u)$, où u est réelle — et peut si on le désire être choisie C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^*$ — forment un ensemble total dans L^4, et il suffit d'écrire que $\mathbb{E}[f\ell^2] \geq 0$, ℓ désignant maintenant une combinaison linéaire réelle finie $\sum_i \lambda_i \mathcal{E}(u_i)$ de vecteurs exponentiels. La condition de positivité est alors, compte tenu de la formule $\mathcal{E}(u)\mathcal{E}(v) = e^{<u,v>}\,\mathcal{E}(u+v)$, et en introduisant la fonction caractéristique $\tilde{f}(u) = <\mathcal{E}(u), f>$ (produit scalaire réel!)

$$\sum_i \lambda_i \lambda_j \, e^{<u_i,u_j>}\,\tilde{f}(u_i+u_j) \geq 0 \,.$$

Cela signifie que le noyau sur $L^2(\mathbb{R}_+) \times L^2(\mathbb{R}_+)$

$$K_f(u,v) = \tilde{f}(u+v)e^{<u,v>} \tag{7}$$

est de type positif.

Une variante consiste à utiliser, toujours pour u réelle, les vecteurs exponentiels complexes $\mathcal{E}(iu)$ et à poser $\mathcal{T}f(u) = e^{-\|u\|^2/2}\tilde{f}(u)$: ceci correspond à la définition de la transformation T de Hida, *Brownian Motion,* p. 137, et pour cette "transformée de Fourier" on retombe sur une propriété de type positif (en $u \in \mathcal{C}_c^\infty$) de type classique, dans l'esprit des travaux de Hida et plus récemment de Krée.

2. Opérateurs de seconde quantification. Nous allons utiliser le critère (7) pour démontrer rapidement le théorème de Glimm et Jaffe (*cf.* [1], [2]) suivant lequel la seconde quantification P d'une contraction T du premier chaos est un noyau markovien sur l'espace de Wiener (on rappelle que P est définie par la relation $P\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(Tu)$). Nous restons dans le cas réel.

Soit f une v.a. ; calculons la fonction caractéristique $\tilde{g}$ de $g = Pf$, en commençant par le cas où f est un vecteur exponentiel $\mathcal{E}(v)$. Alors

$$\tilde{g}(u) = <\mathcal{E}(u), Pf> \; = \; <\mathcal{E}(u), \mathcal{E}(Tv)> \; = e^{<u,Tv>} = e^{<T^*u,v>} = \tilde{f}(T^*u)\,. \tag{8}$$

Cette relation s'étend à une fonction f arbitraire, par linéarité et densité. Il s'agit alors de démontrer que si le noyau K_f est de type positif, (*cf.* (7)) il en est de même du noyau K_g, où $g = Pf$. Or on a

$$K_g(u,v) = \tilde{g}(u+v)e^{<u,v>} \; = \tilde{f}(T^*u + T^*v)e^{<T^*u,T^*v>}\; e^{<u,v> - <T^*u,T^*v>}\,.$$

Cette expression apparaît comme le produit ponctuel de deux noyaux de type positif

$$\tilde{f}(T^*u + T^*v)e^{<T^*u,T^*v>} \quad \text{et} \quad e^{B(u,v)}\,,$$

où $B(u,v)$ est la forme bilinéaire symétrique positive $<u,v> - <T^*u,T^*v>$. C'est donc encore un noyau de type positif, et le théorème est établi, plus simplement que dans les références citées plus haut.

Notons que des résultats analogues (sous des conditions plus fortes sur T) ont été établis par Surgailis dans le cas Poissonien (*cf.* [3]), à partir d'une interprétation probabiliste des opérateurs de seconde quantification.

3. Opérateurs carré du champ itérés. Désignons par $L = -N$ le laplacien d'Ornstein-Uhlenbeck sur l'espace de Wiener. Bakry a défini les opérateurs carré du champ itérés par récurrence, de la manière suivante

$$\Gamma_0(f,g) = fg$$
$$2\Gamma_{n+1}(f,g) = L\Gamma_n(f,g) - \Gamma_n(Lf,g) - \Gamma_n(f,Lg)\,,$$

et il a montré la positivité des fonctions $\Gamma_n(f,f)$. Nous allons chercher à retrouver, par nos méthodes, ce résultat de Bakry. On supposera pour simplifier que f,g sont ici des v.a. d'ordre fini, ou des combinaisons linéaires finies de vecteurs exponentiels, de sorte qu'il n'y a aucune difficulté à appliquer L autant de fois qu'on le désire.

Il est facile de calculer le développement en chaos de Wiener de la fonction $\Gamma_n(f,g)$: il ressemble beaucoup à la formule de multiplication des intégrales stochastiques

$$\hat{h}(H) = \sum_{A+B=H} \int \hat{f}(A+M)\hat{g}(B+M)|M|^n dM\,, \tag{9}$$

où $|M|$ est le nombre d'éléments de M. En prenant $f=\mathcal{E}(a)$, $g=\mathcal{E}(b)$ on obtient

$$\Gamma_n(\mathcal{E}(a),\mathcal{E}(b)) = <a,b>^n e^{<a,b>}\,\mathcal{E}(a+b)\,, \tag{10}$$

formule qu'il est d'ailleurs facile de démontrer directement, sans passer par (9). En particulier, la fonction caractéristique de $\Gamma_n(\mathcal{E}(a),\mathcal{E}(b))$ est égale à $<a,b>^n e^{<a,b>} e^{<a+b,u>}$. La positivité de Γ_n peut maintenant s'énoncer ainsi : soit f une fonction de la forme $\sum_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta\Gamma_n(\mathcal{E}(a_\alpha),\mathcal{E}(a_\beta))$. Alors le noyau associé à f par (7)

$$K_f(u,v) = \sum_{\alpha\beta}\theta_\alpha\theta_\beta <a_\alpha,a_\beta>^n e^{<a_\alpha,a_\beta>} e^{<a_\alpha+a_\beta,u+v>} e^{<u,v>} \tag{11}$$

est de type positif. On est amené à écrire que les formes quadratiques $\sum_{ij}\lambda_i\lambda_j K_f(u_i,u_j)$ sont positives, et il suffit pour cela que le noyau

$$K(a,u\,;\,b,v) = <a,b>^n e^{<a,b>} e^{<a+b,u+v>} e^{<u,v>}$$

soit de type positif. Or si on supprime le premier facteur la propriété est vraie, car on est alors en train d'écrire la positivité de Γ_0, propriété triviale. Et introduire alors le premier facteur revient à faire le produit ponctuel de deux noyaux de type positif, ce qui préserve la propriété désirée. La démonstration est achevée.

4. Remarques sur le "bébé Fock". Comme nous l'avons rappelé au début de cette note, le "bébé Fock" est l'espace $L^2(\Omega)$, où $\Omega = \{-1,1\}^N$ est muni de la loi qui fait des coordonnées x_i des v.a. de Bernoulli indépendantes. Une base orthonormale de cet espace de Hilbert est formé des v.a. $x_A = \prod_{i\in A} x_i$, A parcourant l'ensemble des parties de $\{1,\ldots,N\}$, et le produit ordinaire ("produit de Bernoulli") de deux v.a. développées dans cette base correspond à la table de multiplication $x_A x_B = x_{A\Delta B}$, découlant par associativité des relations $x_i^2 = 1$. Nous allons aussi introduire un autre produit associatif, le *produit de Wick*, donné par la formule $x_A \,{:}\, x_B = x_{A+B} = x_{A\cup B}$ si $A\cap B = \emptyset$, 0 sinon (découlant par associativité des relations $x_i^2 = 0$, qui correspond à $dX_t^2 = 0$ pour le produit de Wick continu). Si $f = \sum_A \hat{f}(A)x_A$, $g = \sum_A \hat{g}(A)x_A$, le développement en chaos de $h = f \,\colon\!\!\colon g$ est donné par la formule

$$\hat{h}(A) = \sum_{B+C=A} \hat{f}(B)\hat{g}(C)\,,$$

exactement la même que sur le vrai Fock. L'existence de ce produit donne un sens à la notion de seconde quantification sur le "bébé Fock" : étant donné un opérateur linéaire T sur le premier chaos

$$T(x_i) = \sum_j t_i^j x_j\,,$$

nous définissons sa seconde quantification $\tilde{T}$ par la relation

$$\tilde{T}(x_A) = \prod_{i\in A} T(x_i)\,,$$

le produit à droite étant un produit de Wick. Cela a un sens puisque les x_A forment une base.

Pour $u = (u_i) \in \mathbb{C}^N$, identifié à l'élément $\sum_i u_i x_i$ du premier chaos, l'exponentielle $\mathcal{E}(u)$ est la variable aléatoire $\prod_i (1 + u_i x_i)$ (cela correspond exactement à l'exponentielle stochastique de la martingale discrète d'accroissement $u_i x_i$ à l'instant i). Il est intéressant de remarquer que $\mathcal{E}(u)$ est, comme dans le cas du vrai Fock l'exponentielle de Wick $\sum_n u^{:n}/n!$. En revanche, on n'a pas $\tilde{T}\mathcal{E}(u) = \mathcal{E}(Tu)$.

Les définitions précédentes permettent de donner un sens au problème de la positivité des opérateurs de seconde quantification, mais pour l'instant nous n'avons pas de résultats sur ce sujet.

REFERENCES

[1] Ruiz de Chavez (J.). Espaces de Fock pour les processus de Wiener et de Poisson. *Sém. Prob. XIX*, Springer LN n° 1123, 1985, p. 230–241.

[2] Simon (B.). *The $P(\varphi)_2$ euclidean quantum field theory*. Princeton University Press, 1974.

[3] Surgailis (D.). On multiple Poisson stochastic integrals and associated Markov semi-groups. *Prob. and Math. Stat.*, 3, 1984, p. 217–239.

Juan RUIZ de CHAVEZ, Universidad Autónoma Metropolitana (Iztapalapa), Mexico D.F. (Mexique), et Laboratoire de Probabilités, Université de Paris VI.

P.A. MEYER, Université Louis-Pasteur, Strasbourg.