SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

AZZOUZ DERMOUNE

Application du calcul symbolique au calcul de la loi de certains processus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 402-406

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__402_0>

APPLICATION DU CALCUL SYMBOLIQUE AU CALCUL DE LA LOI DE CERTAINS PROCESSUS

d'après A. DERMOUNE [1]

1. Introduction. Nous utilisons ici les notations des exposés “Eléments de probabilités quantiques” ([4]), combinées avec celles de P. Krée [2]. Dans la première partie nous travaillons sur l'espace de Fock symétrique $\Gamma(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}_+)$, nous désignons par $\mathcal{U}$ le sous–espace dense des fonctions étagées à support compact, et par $\mathcal{E}$, appelé le *domaine exponentiel,* l'ensemble des combinaisons linéaires finies de vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(u)$, $u \in \mathcal{U}$ (toutefois, au début on pourrait prendre $u \in \mathcal{H}$).

Page 248 de [4], on démontre les faits suivants, d'après Hudson–Parthasarathy

1) Les opérateurs

$$X(t) = a_t^+ + a_t^- + ca_t^\circ$$

(où a_t^+, a_t^-, a_t° sont les opérateurs de création, d'annihilation et de nombre) admettent des extensions autoadjointes $\widehat{X}(t)$ qui commutent, et qui forment donc un processus stochastique au sens classique.

2) La loi de ce processus dans l'état vide est celle d'un processus de Poisson compensé, de hauteur de sauts égale à c et d'intensité $1/c^2$. Pour $c = 0$ on trouve un mouvement brownien.

La démonstration de [4] est assez longue et compliquée. En fait, ce que l'on construit, c'est directement (à l'aide des relations de commutation de Weyl) une famille à deux paramètres d'opérateurs unitaires $W(u,t)$ qui commutent tous entre eux, et qui pour tout t fixé constituent un groupe à un paramètre en u. En dérivant par rapport à u pour $u=0$ on obtient alors une famille d'opérateurs autoadjoints $W'(t)$ qui commutent, et on vérifie que $W'(t) = X(t)$ sur le domaine exponentiel $\mathcal{E}$. On prend alors $\widehat{X}(t) = W'(t)$. De plus, connaissant les opérateurs $W(u,t) = e^{iuW'(t)}$ on trouve très facilement la fonction caractéristique des v.a. $W'(t)$ dans l'état vide (et on peut alors trouver la loi jointe du processus en remarquant que celui–ci est à accroissements indépendants).

La démonstration ne prouve pas que l'opérateur $X(t)$ est *essentiellement autoadjoint* sur $\mathcal{E}$ (c'est à dire que $W'(t)$ est la seule extension autoadjointe de $X(t)$). On peut

[1] Note de P.A. Meyer. Je remercie vivement A. Dermoune de m'avoir autorisé à extraire cet exposé de sa thèse. Je l'ai rédigé dans le langage de mes exposés antérieurs de ce Séminaire. Pour une présentation moins incomplète du langage des noyaux et symboles, voir les réf. [2],[3] et [5].

démontrer cela en prouvant que les vecteurs exponentiels sont des vecteurs analytiques pour $X(t)$ (théorème de Nelson).

Dans cette note, on va utiliser le calcul symbolique de P. Krée (voir [3]) pour déterminer de manière plus simple la loi de ce processus, et pour étendre le résultat de Hudson–Parthasarathy au cas des espaces de Fock multiples, où l'opérateur de nombre est remplacé par la matrice des opérateurs de nombre et d'échange.

2. Rappels de calcul symbolique. Nous allons adopter une version un peu moins générale que celle présentée dans [3], mais suffisante pour nos besoins. On pourra consulter aussi [5].

Soit A un opérateur défini sur le domaine exponentiel $\mathcal{E}$. Alors le *symbole* $S(A\,;\,u,v)$ de A est la fonction de deux variables $u,v\in\mathcal{U}$

$$S(A\,;\,u,v)=e^{-<u,v>}<\mathcal{E}(u),\,A\mathcal{E}(v)>\ . \tag{1}$$

Dans la théorie plus générale de [2], le domaine de A ne contient pas nécessairement les vecteurs $\mathcal{E}(u)$, $u\in\mathcal{U}$, mais seulement les puissances tensorielles $u^{\otimes n}$, de sorte que (1) est une série formelle et non une vraie fonction.

Puisque les vecteurs exponentiels sont denses, la connaissance du symbole $S(A\,;\cdot,\cdot)$ détermine l'opérateur A sur le domaine exponentiel. Le symbole de l'opérateur adjoint A^* est égal à $\overline{S(A\,;\,v,u)}$. Le symbole est aussi appelé *symbole de Wick*, parce que le symbole du produit de Wick de deux opérateurs est le produit ordinaire de leurs symboles. Indiquons les symboles de quelques opérateurs.

1) Opérateurs de création, d'annihilation, et de nombre

$$S(a_h^+\,;\,u,v)=<u,h>\ ,\ S(a_h^-\,;\,u,v)=<h,v>\ ,\ S(a_i^\circ\,;\,u,v)=<u,hv>\ . \tag{2}$$

2) *Opérateur de multiplication W_h de Wiener par $\mathcal{E}(h)$* ($h\in\mathcal{H}$). On identifie l'espace de Fock à l'espace $L^2(\Omega)$ associé à la mesure de Wiener. Le vecteur exponentiel $\mathcal{E}(u)$ se lit alors comme l'exponentielle stochastique

$$\mathcal{E}(u)=e^{\int u(s)\,dX(s)-\int u^2/2}$$

(on note $\int uv$ le produit scalaire bilinéaire $<\bar{u},v>$). On a alors la formule de multiplication suivante pour le produit de Wiener de deux vecteurs exponentiels :

$$\mathcal{E}(h)\mathcal{E}(v)=\mathcal{E}(v+h)e^{\int hv}\ ,$$

et on trouve alors facilement le symbole cherché

$$S(W_h\,;\,u,v)=e^{\int hv+<u,h>}\ . \tag{3}$$

3) *Opérateur de multiplication P_h de Poisson par $\mathcal{E}(h)$*. Si l'on identifie l'espace de Fock à l'espace $L^2(\Omega)$ associé à un processus de Poisson de hauteur de sauts c et d'intensité $1/c^2$, on a l'expression des vecteurs exponentiels

$$\mathcal{E}(u)=e^{-\int u(s)\,ds/c}\prod_S(1+cu(s))\ ,$$

S étant l'ensemble des instants de saut de la trajectoire. D'où la formule de multiplication des vecteurs exponentiels $\mathcal{E}(h)\mathcal{E}(v) = \mathcal{E}(v + h + cvh)\, e^{(h,v)}$, et on en déduit l'expression du symbole

$$S(P_h\,;\, u, v) = e^{\int hv + <u, h + chv>} \quad . \tag{4}$$

Cette formule contient la précédente pour $c = 0$. Il n'est donc pas nécessaire de traiter le cas particulier du processus de Wiener.

4) *Opérateur de multiplication par une intégrale stochastique* $\int h(s)dX(s)$. C'est la dérivée pour $\varepsilon = 0$ de l'opérateur de multiplication par $\mathcal{E}(\varepsilon h)$. Donc pour le symbole on trouve

$$<\bar{h}, v> + <u, h> + c<u, hv> \ ,$$

et si h est réelle, on trouve le même symbole que pour $a_h^- + a_h^+ + ca_h^\circ$. Donc l'opérateur de multiplication est une extension de ce dernier opérateur. Comme les opérateurs de multiplication par les intégrales stochastiques sont (par construction) autoadjoints et commutent tous, nous avons construit très simplement les extensions autoadjointes indiquées par Hudson–Parthasarathy. Ici encore il faudrait montrer l'unicité des extensions autoadjointes par le théorème de Nelson.

2. Espace de Fock multiple. Dans la théorie de l'espace de Fock multiple, l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ n'est plus $L^2(\mathbb{R}_+)$ mais $L^2(\mathbb{R}_+, E)$ où E est un espace de Hilbert de dimension finie ν. En choisissant une base orthonormale de cet espace, nous considérons $\mathcal{H}$ comme une somme directe de ν copies de $L^2(\mathbb{R}_+)$. $\Gamma(\mathcal{H})$ est donc le produit tensoriel de ν copies de l'espace de Fock simple. On peut aussi l'identifier à l'espace $L^2(\Omega)$ où Ω est engendré par ν processus indépendants (X_t^i), qui sont des processus de Wiener ou de Poisson du type considéré plus haut (non nécessairement tous de même loi).

Les vecteurs exponentiels s'écrivent maintenant sous la forme $\mathcal{E}(\mathbf{u})$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur (u_i) d'éléments de $\mathcal{U}$. Le symbole $S(A\,;\,\mathbf{u},\mathbf{v})$ reste défini par la formule (1). Cependant, la formule (1) est une formule valable pour tous les espaces de Fock, tandis que nous considérons $\mathbf{u}$ comme un vecteur de ν éléments de $\mathcal{U}$, donc le symbole d'un opérateur, tel que nous l'utilisons ici, dépend du choix de la base de E utilisée. On peut noter en revanche que la multiplication des éléments de $L^2(\mathbb{R}_+, E)$ par les fonctions scalaires $h \in \mathcal{U}$ ne dépend pas du choix de la base de E.

On a maintenant toute une matrice d'opérateurs de création, d'annihilation, de nombre et d'échange, indexés par une fonction $h \in \mathcal{U}$ *scalaire* et *réelle* (typiquement, h est l'indicatrice d'un intervalle $]0, t]$). Leur symboles sont

— Pour les opérateurs de création a_h^{i+}, le symbole est $<u_i, h>$, et pour les opérateurs d'annihilation correspondants $<h, v_i>$.

— Pour les opérateurs de nombre $a_h^{i\circ}$, le symbole est $<u_i, hv_i>$, mais on voit aussi apparaître toute une nouvelle série d'*opérateurs d'échange,* de symboles $<u_i, hv_j>$.

La notation la plus commode est celle d'Evans (voir les autres articles de ce volume pour plus de détails) qui consiste à introduire des indices grecs ρ, σ prenant les valeurs

$1,\dots,\nu$ et en plus la valeur 0, à ajouter à tout vecteur–test $\mathbf{u}$ une composante $u_0=1$, et à noter $a_i^0(h)$, $a_0^i(h)$, $a_i^i(h)$ et $a_i^j(h)$ les opérateurs de création, d'annihilation, de nombre et d'échange. Il y a alors une seule formule pour tous les symboles

$$S(a_\rho^\sigma(h)\,;\,\mathbf{u},\mathbf{v}) = <u_\sigma, hv_\rho> \ . \tag{5}$$

L'opérateur $a_0^0(h)$ est alors défini par cette formule comme étant le produit de l'identité par l'intégrale de h.

Il est clair que l'opérateur adjoint de $a_\rho^\sigma(h)$ (sur le domaine exponentiel) est égal à $a_\sigma^\rho(h)$. Donc si l'on prend une matrice hermitienne fixe (m_ρ^σ), on obtient en posant

$$X(h) = \sum_{\rho,\sigma} m_\rho^\sigma a_\rho^\sigma(h) \tag{6}$$

une famille d'opérateurs dont les symboles ont la symétrie hermitienne en les variables $\mathbf{u},\mathbf{v}$. On peut donc espérer que ces opérateurs auront des extensions autoadjointes. Il est plus clair de ne pas faire intervenir la composante d'indice 0 dans le produit scalaire, et on a alors un symbole de la forme

$$m\int h + <u, h\mu> + <h\mu^*, v> + <\mathbf{u}, hM\mathbf{v}> \ ,$$

où m est un scalaire réel, μ est un vecteur, et M est une matrice hermitienne. Nous admettrons ici que ces opérateurs sont en effet essentiellement autoadjoints sur le domaine exponentiel (ce qui pourrait se déduire du théorème de Nelson). Alors si l'on coupe h en la somme de $hI_{]0,t]} = h_1$ et $hI_{]t,\infty]} = h_2$, les opérateurs $X(h_1)$ et $X(h_2)$ opèrent sur deux facteurs différents de la décomposition de l'espace de Fock en produit tensoriel à l'instant t, et cela entraîne que les deux opérateurs commutent, et que les v.a. qui leurs correspondent sont indépendantes. On en déduit aisément que les v.a. $X(h)$ peuvent s'interpréter comme les intégrales stochastiques $\int h(s)dX(s)$ relativement à un processus à accroissements indépendants $X(t)$, dont nous voulons déterminer la loi dans l'état vide.

Nous allons faire un "changement de base" dans l'espace de Fock pour simplifier la matrice M. Les éléments de l'espace de Fock se développent en intégrales stochastiques multiples par rapport aux ν courbes $X^i(t)$, à accroissements orthogonaux, et mutuellement orthogonales, et ces développements ont une signification indépendante de l'interprétation probabiliste utilisée. Mais on peut aussi bien utiliser un système de courbes $Y^i(t) = \sum_j \lambda_j^i X^j(t)$, où $\Lambda = (\lambda_j^i)$ est une matrice unitaire. Si $\mathbf{u}$ est un vecteur d'éléments de $L^2(\mathbb{R}_+)$, le vecteur noté maintenant $\mathcal{E}(\mathbf{u})$ est l'exponentielle de l'élément $\sum_i \int u_i(s)dY^i(s)$, et correspond donc à l'ancien vecteur $\mathcal{E}(\Lambda\mathbf{u})$, et le symbole de l'opérateur A dans la nouvelle base est donc égal à $S(A\,;\,\Lambda\mathbf{u},\Lambda\mathbf{v})$, et en particulier le nouveau symbole de $X(h)$ est

$$m\int h + <u, h\theta> + <h\theta^*, v> + <\mathbf{u}, hN\mathbf{v}> \ ,$$

où $\theta = \Lambda\mu$ et $N = \Lambda^* M\Lambda$. Choisissant Λ de telle sorte que N soit diagonale, nous voyons que le symbole de $X(h)$ s'écrit comme la somme de la constante $m\int h$ (correspondant à l'addition au processus $X(t)$ d'un terme déterministe mt) et de ν termes de la forme

$$p_i(\int bu_i, h + \int hv_i) + q_i \int h\bar{u}_i v_i ,$$

où p_i et q_i sont réels. La forme diagonale de cette somme signifie que l'on va ajouter des processus indépendants. Si $p_i = 0$, $q_i \neq 0$, le symbole correspond à un processus p.s. nul dans l'état vide (mais qui est un processus de Poisson à sauts égaux à q_i dans les états cohérents différents de l'état vide). Si $p_i \neq 0$ on peut le mettre en facteur, et on tombe alors sur le cas particulier traité par Hudson–Parthasarathy et rappelé dans la première partie : pour $q_i \neq 0$ un processus de Poisson compensé de hauteur de sauts q_i et d'intensité $(p_i/q_i)^2$, pour $q_i = 0$ un mouvement brownien de variance p_i^2. Ainsi la loi est complètement déterminée.

REFERENCES

[1] : Hudson R.L., Parthasarathy K.R., Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. *Comm. Math. Phys*, 93, 1984, 301-323.

[2] : Krée P., La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastique. *Stochastic Analysis and Related Topics, Proc. Silivri 1986,* Springer LN 1316, 170–233.

[3] : Krée P., Raczka R., Kernels and symbols in quantum field theory. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Sect A,* 28, 1978, 41-73.

[4] : Meyer P.A., Eléments de Probabilités Quantiques, *Sém. Prob. XX,* Springer LN 1204.

[5] : Meyer P.A., Distributions, noyaux, symboles d'après P. Krée. *Sém. Prob. XXI,* Springer LN 1321, 467–476.

Pour obtenir le texte original de la thèse, s'adresser à :

A. Dermoune, Département de Mathématiques Pures
Université de Clermont-Ferrand
Complexe Scientifique des Cézeaux
BP 45, F-63170 Aubière.