

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Diffusions quantiques (exposé en 3 parties)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 370-396

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__370_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DIFFUSIONS QUANTIQUES I : EXEMPLES ÉLÉMENTAIRES

par P.A. Meyer

Université Louis-Pasteur, Strasbourg

Introduction

Nous nous proposons de présenter en quelques exposés l'essentiel d'un remarquable travail de Evans et Hudson [2], qui apporte beaucoup d'idées nouvelles au calcul stochastique non commutatif. Ce premier exposé est une introduction, qui cherche à expliquer *ce que font* Evans et Hudson dans le cas de certains processus de Markov classiques, et par exemple, à chercher quelles sont les deux opérations qui fournissent concrètement les structures de *bimodule* apparaissant chez Evans et Hudson (ou dans un article récent de Sauvageot [4]). Cela amène à voir ces processus classiques sous un jour nouveau, et par exemple à se poser un problème de représentation chaotique pour des processus de Markov, avec des coefficients dépendant du point initial.

Grâce au petit séminaire de Probabilités Quantiques de Paris VI, le problème de convergence du développement chaotique soulevé dans cet exposé a été résolu par Ph. Biane (article à paraître dans *Stochastics*). Nous présentons les résultats de Biane dans l'exposé II.

Enfin, les notes préliminaires à cet exposé ont conduit Parthasarathy à développer le sujet suivant des directions nouvelles. On trouvera dans ce volume l'article de Parthasarathy et Sinha. Nous avons ajouté à cet exposé une dernière section sur le cas discret non commutatif, pour tenir compte des remarques et résultats de Parthasarathy dans son exposé au Congrès de Vilnius.

1 Considérons d'abord une équation différentielle stochastique au sens d'Ito sur \mathbb{R}^d , à coefficients C^∞

$$(1.1) \quad dX_t^i = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^i(X_t) dB_t^{\alpha} + b^i(X_t) dt$$

avec $\alpha = 1, \dots, \nu$. Soit f une fonction de classe C^∞ . Nous avons alors

$$(1.2) \quad d(f \circ X_t) = \sum_{\alpha} L_{\alpha} f(X_t) dB_t^{\alpha} + L_0 f(X_t) dB_t^0 \quad (dB_t^0 = dt),$$

où $f \mapsto L_{\alpha}(f)$ et $f \mapsto L_0(f)$ sont des opérateurs différentiels respectivement du premier et du second ordre, qui se déduisent de (1.1) par la formule d'Ito. Ayant écrit cela, on est arrivé à une formulation *sans coordonnées* de la notion d'é.d.s. gouvernée par le temps t et ν mouvements browniens indépendants, formulation sans doute bien connue, mais qui n'était pas au premier plan chez les probabilistes. Elle s'applique aussi bien aux é.d.s. sur une variété V .

L'opérateur L_0 est le générateur de la diffusion, et il ne dépend donc pas de la façon dont on décrit celle-ci au moyen d'une é.d.s.. Si l'on considère deux fonctions f et g , et que l'on écrit que $d(fg \circ X_t) = d(f \circ (X_t)g \circ (X_t))$, on obtient les relations

$$(1.3) \quad \begin{aligned} L_0(fg) - fL_0g - (L_0f)g &= \sum_{\alpha} L_{\alpha}f L_{\alpha}g \\ L_{\alpha}(fg) - fL_{\alpha}g - (L_{\alpha}f)g &= 0. \end{aligned}$$

La première nous donne l'opérateur carré du champ associé au semi-groupe, et la seconde nous dit que les L_{α} sont des dérivations. On n'est pas habitué en probabilités classiques à considérer que ces relations forment un tout, comme nous le verrons.

Une autre formule dont nous retrouverons l'analogue est la *formule d'Isobe-Sato*¹ (cf. Hu-Meyer [3]) donnant le développement en chaos de la v.a. $h \circ X_t$. Le coefficient de $dB_{s_1}^{\alpha_1} \dots dB_{s_p}^{\alpha_p}$ est, pour $X_0 = x$

$$(1.4) \quad f_p(x, s_1, \alpha_1, \dots, s_p, \alpha_p, t, h) = P_{s_1} L_{\alpha_1} P_{s_2 - s_1} L_{\alpha_2} \dots L_{\alpha_p} P_{t - s_p} h \quad \text{au point } x$$

On peut tenter de dégager la structure de cette construction, en vue d'une interprétation non commutative : les mouvements browniens sont réalisés sur Ω , et ce sont des processus *scalaires*; notons \mathcal{L} l'algèbre $L^{\infty}(\Omega)$. Nous avons d'autre part une algèbre de fonctions sur l'espace "courbe" V , $\mathcal{A} = C^{\infty}(V)$, et le processus X est une famille indexée par $t \in \mathbb{R}_+$ d'homomorphismes $j_t : f \mapsto f \circ X_t$ de \mathcal{A} dans \mathcal{L} . Enfin, les opérateurs L_{α} et L_0 sont des opérateurs sur \mathcal{A} , mais l'é.d.s. elle-même est une égalité sur Ω . Noter que Ω n'est pas l'espace canonique des browniens scalaires tout seuls : l'é.d.s. comporte, il ne faut pas l'oublier, une *condition initiale*, que nous n'avons pas écrite ci-dessus : l'algèbre \mathcal{L} réalise un "couplage" de l'algèbre engendrée par les browniens scalaires et de l'algèbre \mathcal{A} , qui se traduit par une opération de celle-ci sur \mathcal{L} , la multiplication par $f \circ X_0$ ($f \in \mathcal{A}$). Quant au processus X_t lui-même, il donne lieu à une famille d'homomorphismes de \mathcal{A} dans \mathcal{L} , associant à f la v.a. $f \circ X_t$.

Dans ce langage, qui est celui de la théorie des processus stochastiques non commutatifs, élaboré par Accardi, Frigerio et Lewis [1], il est facile de passer au cas des diffusions quantiques d'Evans-Hudson, les semimartingales directrices scalaires dB_t^{α} étant alors remplacées par les semimartingales d'opérateurs fondamentales de l'espace de Fock construit sur un mouvement brownien de dimension ν , i.e. les processus de création, d'annihilation, de nombre et d'échange. Nous étudierons ces diffusions quantiques dans l'exposé III.

Chaînes de Markov finies discrètes

2 Nous allons retrouver cette structure dans un exemple absolument élémentaire, celui d'une chaîne de Markov en temps discret $n = 0, \dots, T$, à valeurs dans un ensemble fini E à $\nu + 1$ points numérotés de 0 à ν . L'algèbre \mathcal{A} est ici l'algèbre (de dimension finie) de toutes les fonctions sur E .

¹ Cette formule a été établie, avant Isobe-Sato (1983), par Veretennikov et Krylov, On explicit formulas for solutions of stochastic differential equations, *Mat. Sbornik* 100, 1976. Nous continuons ici à appeler "formule d'Isobe-Sato" pour nous conformer à un usage déjà établi.

La matrice de transition de la chaîne est notée $P=(p(i, j))$, et nous supposons que les coefficients sont tous >0 (cette hypothèse est un peu trop forte, cf. plus loin). Le générateur est ici $A=P-I$. L'algèbre \mathcal{L} est constituée de toutes les fonctions sur $\Omega = E^{T+1}$. Enfin, nous identifions la fonction $f \in \mathcal{A}$ à la fonction $f \circ X_0 \in \mathcal{L}$.

Si les couples i, j ne communiquaient pas tous, il existerait dans Ω des trajectoires impossibles, et dans \mathcal{L} un idéal non trivial de fonctions nulles p.p. pour toutes les mesures initiales. Notre hypothèse nous évite de nous en inquiéter.

Les fonctionnelles additives de la chaîne sont de la forme

$$Z_k = \sum_{i=1}^{i=k} z(X_{i-1}, X_i).$$

Nous noterons dZ_k l'accroissement $Z_k - Z_{k-1} = z(X_{k-1}, X_k)$, par analogie avec le temps continu. Les f.a. qui sont des martingales correspondent aux $z(\cdot, \cdot)$ telles que $Pz(\cdot) = \sum_j p(\cdot, j) z(\cdot, j) = 0$. Nous allons rechercher une base orthonormale Z^σ de l'espace des f.a., au sens suivant

$$(2.1) \quad \mathbb{E} [dZ_k^\sigma dZ_k^\tau | \mathcal{F}_{k-1}] = \delta^{\sigma\tau},$$

dont la première fonctionnelle soit $Z_k^0 = k$. Les autres sont alors des fonctionnelles additives martingales. D'une manière générale, les indices $\rho, \sigma, \tau \dots$ pourront prendre la valeur 0, mais non les indices désignés par α, β, γ .

Sur les fonctions z^σ correspondantes, ces relations s'écrivent

$$\forall i, \quad \sum_j p(i, j) \bar{z}^\sigma(i, j) z^\tau(i, j) = \delta^{\sigma\tau}.$$

Cela revient à choisir une base orthonormale de fonctions de deux variables pour un "produit scalaire" qui n'est pas scalaire, mais à valeurs dans l'algèbre \mathcal{A}

$$(2.2) \quad \langle y, z \rangle = P(\bar{y}z) = \sum_j p(\cdot, j) \bar{y}(\cdot, j) z(\cdot, j),$$

base dont le premier vecteur est la fonction 1. La construction est triviale : pour tout i fixé il s'agit de la construction d'une base orthonormale ordinaire pour une certaine forme hermitienne, et la seule condition est que le rang de cette forme ne dépende pas de i , autrement dit que le nombre N_i des points j que l'on peut atteindre à partir de i ne dépende pas de i . Notre hypothèse de stricte positivité nous débarrasse de ce problème (sur lequel nous revenons ci-dessous dans une remarque), et α varie désormais de 1 à ν .

A partir d'une telle base de martingales, nous pouvons définir des "intégrales stochastiques multiples", qui sont des sommes finies de la forme

$$(2.3) \quad f = \sum_p \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_p \\ \alpha_1, \dots, \alpha_p}} c_p(X_0, i_1, \alpha_1, \dots, i_p, \alpha_p) dZ_{i_1}^{\alpha_1} \dots dZ_{i_p}^{\alpha_p},$$

où $p \leq N$. On a une "formule d'isométrie"

$$(2.3) \quad \mathbb{E}[|f|^2 | X_0] = \sum_p \sum |c_p(X_0, i_1, \alpha_1, \dots, i_p, \alpha_p)|^2.$$

Les coefficients du développement en chaos dépendent du point initial X_0 : on est en train de travailler, du point de vue algébrique, sur des "chaos à valeurs dans \mathcal{A} ". Noter aussi que, le point initial étant fixé, l'espace de Hilbert engendré par les intégrales stochastiques multiples est isomorphe au "bébé Fock" des exposés antérieurs, engendré par ν jeux de pile ou face indépendants.

Pour montrer que toute v.a. admet un développement chaotique (2.3), il suffit de compter les dimensions. Supposant X_0 déterministe, Ω a $(\nu + 1)^T$ points, tous de mesure > 0 . D'autre part, le nombre des parties à p éléments de $1, \dots, T$ est $\binom{T}{p}$, et pour chacune d'elle le choix des indices α donne ν possibilités, d'où aussi un total de $(\nu + 1)^T$.

Qui dit représentation chaotique dit aussi, à plus forte raison, représentation prévisible. On peut donc écrire

$$(2.4) \quad f(X_n) - f(X_0) - \sum_{1 \leq k < n} Af(X_k) = \sum_{\alpha} \sum_{1 \leq k < n} L_{\alpha} f(X_k) dZ_k^{\alpha},$$

la martingale au premier membre étant ainsi représentée comme intégrale stochastique prévisible. Si on laisse au premier membre seulement $f(X_n)$, on obtient une "formule d'Ito". Les opérateurs L_{α} sur \mathcal{A} sont donnés par

$$(2.5) \quad L_{\alpha} f(i) = \sum_j p(i, j) \bar{z}^{\alpha}(i, j) f(j).$$

Il est commode de noter $\sum_{k < n} L_{\alpha} f(X_k) dZ_k^0$ la somme où intervient le générateur.

On a aussi une "formule d'Isobe-Sato" pour le calcul du développement en chaos d'une v.a. de la forme $f(X_n)$

$$(2.6) \quad c_p(X_0, i_1, \alpha_1, \dots, i_p, \alpha_p, n, h) = P^{i_1} L_{\alpha_1} P^{i_2 - i_1} L_{\alpha_2} \dots L_{\alpha_p} P^{n - i_p} h \quad \text{au point } X_0.$$

REMARQUE (ajoutée après la lecture de l'exposé de Parthasarathy à Vilnius). La condition essentielle pour la construction des martingales permettant le développement en chaos est la constance du nombre N_i , qui fixe la dimension du "bébé Fock" utilisé. Or toute chaîne de Markov peut être considérée comme image d'une chaîne de Markov possédant cette propriété, que l'on peut construire ainsi : son espace d'états E' est formé de E (états "réels") et d'états "fantômes" ξ_{ij} "appartenant" chacun à un état "réel" j tel que $p(i, j) > 0$. Pour tout i , le nombre des états fantômes ξ_{ij} est égal à $N - N_i$, où N est le plus grand des N_i . Les nouveaux coefficients $p'(i, \cdot)$ sont calculés en répartissant la masse $p(i, j)$ entre j et les états fantômes appartenant à j , la masse attribuée à chacun étant > 0 . Ce choix étant fait, chaque état réel i conduit exactement à N états de E' . On définit ensuite les coefficients $p'(\xi_{ij}, \cdot)$ comme égaux aux coefficients $p'(j, \cdot)$ correspondants. Il est clair que l'image de la chaîne de matrice de transition p' par la projection $\xi_{ij} \mapsto j$ des états fantômes sur les états réels est une chaîne de matrice p . Le nombre des martingales nécessaires pour développer les v.a. de la nouvelle chaîne (et donc aussi de l'ancienne) est N , et le nombre des états fantômes ajoutés est $\sum_{i \in E} N - N_i$, mais ce nombre est loin d'être minimal, car chaque état j a été subdivisé plusieurs fois, et on pourrait identifier entre eux des états ξ_{ij} correspondant au même j et à des i différents.

Formules de multiplication

3 Puisque les z^ρ constituent une base des fonctions de deux variables sur l'algèbre des fonctions d'une variable, il existe une formule de la forme

$$(3.1) \quad z^\rho z^\sigma = \sum_\tau C_\tau^{\rho\sigma} z^\tau,$$

où les coefficients $C_\tau^{\rho\sigma} = P(z^\rho z^\sigma \bar{z}^\tau)$ sont des fonctions sur E , qui satisfont à des identités exprimant l'associativité (et ici la commutativité) du produit. Ainsi

$$(3.2) \quad \sum_\pi C_\pi^{\lambda\mu} C_\rho^{\pi\nu} = \sum_\pi C_\rho^{\lambda\pi} C_\pi^{\mu\nu}.$$

On peut préciser le rôle particulier de l'élément unité $1 = z^0$: on a $C_\tau^{\sigma 0} = C_\tau^{0\sigma} = \delta_\tau^\sigma$, et d'autre part le choix des z^α nous donne $C_0^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$, à condition que les fonctions z^α soient réelles, car sinon l'orthogonalité nous donnerait un renseignement sur $\bar{z}^\alpha z^\beta$; nous les supposons réelles désormais. Nous pouvons obtenir des équations comparables à (1.3) en écrivant dans la formule d'Ito (2.4) que l'application $f \mapsto f(X_1)$ est un homomorphisme d'algèbres :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} L_0(fg) - fL_0g - (L_0f)g &= \sum_\alpha L_\alpha f L_\alpha g \\ L_\gamma(fg) - fL_\gamma g - (L_\gamma f)g &= \sum_{\alpha\beta} C_\gamma^{\alpha\beta} L_\alpha f L_\beta g \end{aligned}$$

Nous allons maintenant nous occuper de la chaîne sous l'aspect du "calcul stochastique quantique", c'est à dire en cherchant à décrire sur la représentation chaotique l'opérateur de multiplication par la v.a. $f \circ X_k$, opérateur que nous désignerons par $J_k(f)$. On va procéder par récurrence sur k , à partir de $J_0(f)$ qui multiplie simplement les coefficients par $f \circ X_0$: ceci est l'équivalent discret d'une équation différentielle stochastique quantique.

La première chose est de regarder l'effet de la multiplication par dZ_k^α sur un monôme $dZ_{i_1}^{\alpha_1} \dots dZ_{i_p}^{\alpha_p}$. Si ce monôme ne contient aucun z_k^β , l'effet de la multiplication est de rajouter le terme dZ_k^α , et ceci correspond à un opérateur de création que nous noterons $da^{\alpha+}(k)$. Si le monôme contient dZ_k^β avec $\beta \neq \alpha$, la formule de multiplication fait apparaître tous les termes $C_\gamma^{\alpha\beta}(X_{k-1}) dZ_k^\gamma$ à la place de dZ_k^β , et le remplacement de dZ_k^β par dZ_k^γ correspond, suivant le cas, à un opérateur de nombre ou d'échange que nous noterons $da_\beta^\gamma(k)$. Enfin, si le terme dZ_k^α figure dans le monôme, le terme $C_0^{\alpha\beta} = \delta^{\alpha\beta}$ de la formule (3.1) fournit un monôme duquel dZ_k^α a disparu, et cela correspond à un opérateur d'annihilation $da^{-\alpha}(k)$. Evans et Hudson ont une jolie notation pour cela : ils notent $da_0^\alpha(k)$ et $da_\alpha^0(k)$ respectivement les opérateurs de création et d'annihilation, et $da_0^0(k)$ l'opérateur qui transforme en 0 tous les monômes contenant un dZ_k^γ et laisse invariants les autres. Avec ces notations, la multiplication par dZ_k^ρ s'écrit toujours $\sum_{\sigma,\tau} C_\tau^{\rho\sigma}(X_{k-1}) da_\sigma^\tau(k)$. Alors, compte tenu de (2.4) on a la formule

$$(3.4) \quad J_k(f) = J_{k-1}(f) + \sum_{\sigma\tau} J_{k-1}(\mu_\tau^\sigma(f)) da_\sigma^\tau(k),$$

où l'on a posé $\mu_r^\sigma(f) = \sum_r \text{ho} L_\rho f C_r^{\rho\sigma}$. On a donc une matrice $M(f)$ à coefficients dans \mathcal{A} . Et si l'on fait un petit calcul explicite utilisant l'associativité (3.2), la formule (3.4) se transforme en une formule universelle qui ne contient plus les $C_r^{\rho\sigma}$

$$(3.5) \quad \mu_r^\sigma(fg) - f\mu_r^\sigma(g) - \mu_r^\sigma(f)g = \sum_\rho \mu_r^\rho(f)\mu_\rho^\sigma(g).$$

Cela s'écrit encore $M(fg) - fM(g) - M(f)g = M(f)M(g)$, et signifie simplement que $I + M$ est un homomorphisme de \mathcal{A} dans l'algèbre des matrices à coefficients dans \mathcal{A} . C'est précisément cet homomorphisme (ou plutôt sa variante continue) qui définit la structure de bimodule à droite de laquelle se servent Evans et Hudson. Quelle en est la signification? Tout simplement, l'algèbre des fonctions de deux variables $g(i, j)$ est munie de deux multiplications par les fonctions d'une variable, la multiplication par $f(i)$, et la multiplication par $f(j)$, et les z^σ constituent une base pour cette algèbre considérée comme \mathcal{A} -module pour la première multiplication, tandis que $M(f)$ est la matrice dans cette base de la seconde multiplication par f . On peut alors vérifier que l'adjoint de la seconde multiplication par f (relativement au produit scalaire à valeurs dans \mathcal{A}) est la seconde multiplication par \bar{f} ; il en résulte que l'on a $\mu_r^\sigma(f) = \mu_\sigma^r(\bar{f})$.

Le cas des chaînes continues

4 Considérons à présent une chaîne de Markov à temps continu sur l'espace d'états fini E . Les notations standard Ω, X_t, \dots de la théorie des processus de Markov seront employées sans autre référence. Nous désignons par P_t le semi-groupe de transition, par e_j la fonction sur E qui vaut 1 au point j et 0 ailleurs, par $p_{ij}(t)$ la matrice de transition, de sorte que $P_t e_j = \sum_i e_i p_{ij}(t)$. Nous désignons par A le générateur, par a_j la fonction $Ae_j = \sum_i e_i a_{ij}$ (ainsi $a_{ii} = -q_i, a_{ij} = q_{ij}$ pour $i \neq j$ avec les notations classiques des chaînes de Markov). Nous supposons encore pour simplifier que tous les a_{ij} sont différents de 0. Le noyau de Lévy N est donné par $n_{ij} = a_{ij}$ pour $i \neq j, n_{ii} = 0$.

Toutes les f.a. martingales sont de la forme

$$(4.1) \quad S_g(t) = \sum_{s \leq t, \Delta X_s \neq 0} g(X_{s-}, X_s) - \int_0^t N g(X_{s-}) ds$$

L'espace des fonctionnelles additives martingales peut donc s'identifier à l'espace des fonctions $g(i, j)$ de deux variables sur $E \times E$, nulles sur la diagonale. Comme plus haut, recherchons des martingales Z_t^α de la forme S_{z^α} , telles que l'on ait

$$\langle \bar{Z}^\alpha, Z^\beta \rangle_t = \delta^{\alpha\beta} t$$

Sur les fonctions z^α , cela s'écrit $\sum_j n(i, j) \bar{z}^\alpha(i, j) z^\beta(i, j) = \delta^{\alpha\beta}$, et on se retrouve devant le même genre de problèmes que pour les noyaux discrets, mais pour des fonctions nulles sur la diagonale. Comme tous les $a(i, j)$ sont différents de 0, on peut encore trouver ν telles fonctions. Biane a démontré que toute v.a. admet effectivement un développement chaotique par rapport aux Z^α : nous renvoyons pour cela, et pour la formule d'Isobe-Sato, etc, à la note jointe à celle-ci.

Nous allons faire un choix explicite de ces martingales. Nous désignons d'abord par F^{uv} la martingale (4.1) correspondant à $g(i, j) = e_u(i)e_v(j)$ avec $u \neq v$. Deux martingales relatives à deux couples différents ont un crochet droit nul, et pour $u = v$ on a

$$d[F^{uv}, F^{uv}]_t = n(u, v)e_u \circ X_t dt + dF_t^{uv} \quad ; \quad d\langle F^{uv}, F^{uv} \rangle_t = n(u, v)e_u \circ X_t dt$$

Posons ensuite $M^{uv} = F^{uv}/\sqrt{n(u, v)}$; cette fois le crochet oblique est simplement $e_u \circ X_t dt$, et le crochet droit est

$$d[M^{uv}, M^{uv}]_t = e_u \circ X_t dt + dM_t^{uv}/\sqrt{n(u, v)}$$

Posons enfin (l'ensemble E étant maintenant identifié, suivant Biane, au groupe des entiers (mod $\nu + 1$) et α ne prenant pas la valeur 0)

$$(4.2) \quad Z^\alpha = \sum_i M^{i, i+\alpha}.$$

Nous avons alors une base (réelle) de l'espace des martingales. De plus, nous avons en posant $v_\alpha(i) = 1/\sqrt{n(i, i + \alpha)}$

$$(4.3) \quad d[Z^\alpha, Z^\alpha]_t = dt + v_\alpha(X_{t-}) dZ_t^\alpha,$$

tous les autres crochets étant nuls. On est donc amené à introduire des coefficients $C_\alpha^{\alpha\alpha} = v_\alpha(\cdot)$, tous les autres $C_\gamma^{\alpha\beta}$ étant nuls, auxquels on ajoute comme dans le cas discret $dZ_t^0 = dt$, $L_0 = A$, $C_\tau^{\alpha 0} = C_\tau^{0\alpha} = \delta_\tau^\alpha$, et $C_0^{00} = 0$. D'autre part, dans la formule d'Ito

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t L_0 f(X_s) ds + \sum_\alpha \int_0^t L_\alpha f(X_{s-}) dZ_s^\alpha,$$

nous pouvons calculer les opérateurs L_α

$$L_\alpha f(i) = \sum_j n(i, j) z^\alpha(i, j) (f(j) - f(i)) = \sqrt{n(i, i + \alpha)} (f(i + \alpha) - f(i)).$$

Comme nous l'avons fait dans le cas discret, nous allons calculer les opérateurs de multiplication $J_t f$ par la v.a. $f \circ X_t$. Ici nous aurons une vraie équation différentielle stochastique gouvernée par les différentielles $da_\alpha^0(t)$ et $da_\alpha^0(t)$ des opérateurs de création et d'annihilation, $da_\beta^2(t)$ des opérateurs de nombre et d'échange, et $da_0^0(t) = I dt$ (en tout, cela fait des $da_\rho^\sigma(t)$, ces indices pouvant prendre la valeur 0), obéissant à la table de multiplication

$$(4.4) \quad da_\rho^\sigma(t) da_\tau^\sigma(t) = \hat{\delta}_\rho^\sigma da_\tau^\sigma(t),$$

le symbole de Kronecker modifié $\hat{\delta}$ étant tel que $\hat{\delta}_0^0 = 0$. Ces opérateurs seront présentés plus en détail dans l'exposé III.

Cette équation différentielle stochastique en réalité ne fait qu'exprimer la formule d'intégration par parties ordinaire pour les intégrales stochastiques, avec son terme

supplémentaire provenant du crochet droit, donné par la formule (4.3). Pour la clarté, conservons à celle-ci, pour un instant, sa forme générale

$$d[Z^\alpha, Z^\beta]_t = \delta^{\alpha\beta} dt + \sum_\gamma C_\gamma^{\alpha\beta}(X_{t-}) dZ_t^\gamma.$$

Alors nous aurons

$$dJ_t(f) = \sum_{\sigma, \tau} J_t(\mu_\tau^\sigma(f)) da_\sigma^\tau(t) ;$$

avec $\mu_\tau^\sigma(f) = \sum_\rho L_\rho(f) C_\tau^{\rho\sigma}$. Dans le cas présent, la formule s'écrit

$$(4.5) \quad dJ_t(f) = J_t L_0(f) dt + \sum_\alpha J_t L_\alpha(f) dQ_t^\alpha + \sum_\alpha J_t(T_\alpha f - f) da_\alpha^\alpha(t),$$

où dQ^α représente comme d'habitude la somme du créateur et de l'annihilateur correspondants, et où $T_\alpha f(i) = f(i+\alpha)$ est une translation sur le groupe des entiers mod $\nu+1$. Seuls les opérateurs de nombre interviennent, non ceux d'échange. On voit alors se réaliser la remarque fondamentale d'Evans-Hudson : ici encore, si l'on désigne par $M(f)$ la matrice des μ_τ^σ , l'application $f \mapsto fI + M(f)$ est un homomorphisme (un $*$ -homomorphisme même) de l'algèbre des fonctions d'une variable dans l'algèbre des fonctions de deux variables : il s'agit ici de la diagonale formée de tous les homomorphismes $f \mapsto T_\sigma f$ de \mathcal{A} dans elle-même.

A quoi correspond cet homomorphisme du point de vue probabiliste? Considérons l'algèbre \mathcal{B} des fonctions $g(i, j)$ de deux variables, que nous considérons comme algèbre sur \mathcal{A} pour l'opération $f \cdot g = J_0(f)g$ de multiplication par $f(i)$ (la première variable). Désignons par $\text{Diag}(g)$ la partie diagonale de g . Munissons \mathcal{B} du produit scalaire \mathcal{A} -bilinéaire à valeurs dans \mathcal{A}

$$(g, h) = N((g - \text{Diag } g)(h - \text{Diag } h))$$

et par $\mathbf{1}$ la fonction 1. Du point de vue probabiliste, nous associons à g la fonctionnelle additive

$$F_g(t) = S_g(t) + \int_0^t \text{Diag } g(X_s, X_s) ds.$$

Le crochet oblique de F_g et F_h est une f.a. prévisible, correspondant à la diagonale $(g, h)_i$. Le crochet droit de deux f.a. martingales S_g et S_h est aussi une f.a., représentée par le produit ordinaire gh hors de la diagonale, et par le crochet oblique (g, h) sur la diagonale. Il existe alors une multiplication associative et \mathcal{A} -linéaire \times sur \mathcal{B} pour laquelle 1) la fonction $\mathbf{1}$ est élément unité, 2) Le produit de deux fonctions nulles sur la diagonale est la fonction associée au crochet droit (l'associativité du crochet droit a déjà été soulignée par Accardi). On peut dire cela autrement : appelons "produit de Wick" et notons : le produit ordinaire des fonctions de deux variables. Alors si g et h sont nulles sur la diagonale on a

$$g \times h = g : h + (g, h)\mathbf{1},$$

ce qui souligne l'analogie avec le produit de Wiener, de Clifford, etc.

Les fonctions diagonales forment un idéal, et l'algèbre quotient est l'algèbre des fonctions nulles sur la diagonale, avec la multiplication ordinaire. La matrice $M(f)$ est la matrice, dans la base formée de 1 et des z^α , de la multiplication par la fonction $f(j) - f(i)$, nulle sur la diagonale : si l'on se restreint à la sous-algèbre des fonctions nulles sur la diagonale, il est clair que $J_0 f + M(f)$ est tout simplement l'opérateur $J_1 f$ de multiplication par $f(j)$, la seconde variable. Il est donc clair que c'est un homomorphisme.

REMARQUE. Comme dans le cas discret, si le nombre N_i des états $j \neq i$ tels que $n_{ij} > 0$ n'est pas constant, on peut subdiviser les états en états fantômes tels que cette propriété soit satisfaite. Cela revient à grossir la filtration en "ajoutant de l'aléatoire" en cours de route, opération familière en théorie des processus.

Commentaire du Séminaire (M. Emery). La partie de cet exposé qui concerne l'existence d'une famille de ν martingales discrètes (Z_n^α) possédant la propriété de représentation chaotique n'a rien à voir avec les chaînes de Markov, mais s'applique à toute filtration discrète (\mathcal{F}_n) , telle que l'on passe de \mathcal{F}_n à \mathcal{F}_{n+1} en partageant chaque atome de \mathcal{F}_n en $\nu + 1$ atomes (tous de mesure > 0).

REFERENCES

- [1] ACCARDI (L.), FRIGERIO (A.), LEWIS (J.). Quantum Stochastic Processes. *Proc. RIMS Kyoto*, 18, 1982, p. 97-133.
- [2] EVANS (M.P.) et HUDSON (R.L.). Perturbation of Quantum diffusions, *Preprint*, University of Nottingham, 1988.
- [3] HU (Y.Z.), MEYER (P.A.). *Sém. Prob. XXII*, Lect. Notes in M. 1321, p. 61. Springer 1988.
- [4] SAUVAGEOT (J.L.). Tangent bimodule and locality for dissipative operators in C^* -algebras, *Prépublication*, Laboratoire de Probabilités, Paris VI, 1988. Pour rédiger cet exposé, nous avons surtout utilisé la thèse (non publiée) de M.P. EVANS, "Quantum Diffusions".

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
7 rue René Descartes, F-67084 Strasbourg-Cedex

DIFFUSIONS QUANTIQUES II. EXEMPLES ÉLÉMENTAIRES (SUITE)
REPRÉSENTATIONS CHAOTIQUES EN TEMPS CONTINU

par P.A. Meyer

Cet exposé est la suite de l'exposé I, mais en fait il n'a pas grand chose à voir avec les diffusions quantiques, et peut être lu indépendamment. Il présente la solution que Biane a donnée au problème des représentations chaotiques pour les chaînes de Markov finies (en temps continu) — solution qui donne en même temps une démonstration unifiée des théorèmes de représentation chaotique déjà connus. L'article de Biane, intitulé *Chaotic representations for finite Markov chains*, sera publié dans *Stochastics*.

Nous allons commencer par présenter la méthode de manière formelle, puis nous la justifierons rigoureusement dans les cas particuliers considérés.

Considérons un processus de Markov (X_t) sur un espace d'états E : son semi-groupe s'appelle (P_t) , son générateur A , et on suppose qu'il existe ν (un nombre fini !) martingales fonctionnelles additives Z^α , possédant les propriétés $\langle Z^\alpha, Z^\beta \rangle = \delta^{\alpha\beta} t$, et constituant une base de martingales pour la représentation prévisible. Toute martingale de la forme

$$(1) \quad M_f(t) = f \circ X_t - f \circ X_0 - \int_0^t A f \circ X_s ds$$

admet donc une représentation prévisible au moyen des Z^α , et les processus prévisibles intervenant dans la représentation sont de la forme $g_\alpha \circ X_{t-}$ (théorème de Motoo). On pose $g_\alpha = L_\alpha f$, et on suppose que, au moins sur un bon domaine, $L_\alpha f$ est un opérateur linéaire à valeurs dans les vraies fonctions et non les classes de fonctions. Ainsi, on peut écrire une "formule d'Ito"

$$(2) \quad f \circ X_t = f \circ X_0 + \sum_\alpha \int_0^t L_\alpha f \circ X_{s-} dZ_s^\alpha + \int_0^t A f \circ X_s ds.$$

Nous nous permettrons d'alléger la notation, en omettant (provisoirement) le symbole de limite à gauche dans les i.s.. D'après (2) le crochet oblique de deux martingales M_f et M_g est absolument continu par rapport à dt , ce qui signifie que le semi-groupe admet un opérateur carré du champ $\Gamma(f, g)$ et l'on sait diagonaliser celui-ci

$$(3) \quad \Gamma(f, g) = A(fg) - f(Ag) - (Af)g = \sum_\alpha L_\alpha f L_\alpha g.$$

Un passage sans difficulté théorique permet de passer de (2) à une "formule d'Ito" pour fonctions $f(t, X_t)$, puis d'obtenir la formule qui sera notre vrai point de départ, en considérant la martingale $P_{t-s} f \circ X_s$ sur $[0, t]$

$$(4) \quad f \circ X_t = P_t f \circ X_0 + \sum_\alpha \int_0^t L_\alpha P_{t-s} f \circ X_s dZ_s^\alpha$$

Itérons cette formule — c'est le procédé habituel pour passer formellement de la représentation prévisible à la représentation chaotique, avec cependant la nouveauté que les coefficients du développement dépendent de X_0

$$f \circ X_t = P_t f \circ X_0 + \sum_{\alpha} \int_{t > s_1} P_{s_1} L_{\alpha} P_{t-s_1} f \circ X_0 dZ_{s_1}^{\alpha} \\ + \sum_{\alpha, \beta} \int_{t > s_1 > s_2} L_{\beta} P_{s_1-s_2} L_{\alpha} P_{t-s_1} f \circ X_{s_0} dZ_{s_1}^{\alpha} dZ_{s_2}^{\beta}$$

Le dernier terme est une intégrale stochastique itérée, mais on peut le considérer comme une intégrale multiple de processus à deux variables $f(s_1, s_2, \omega)$ sur le simplexe décroissant, mesurable par rapport à sa dernière variable. En recommençant l'itération on obtient la *formule d'Isobe-Sato* (ou de Veretennikov-Krylov) qui fournit un développement chaotique formel de la v.a. $f \circ X_t$, et dire que ce développement converge dans L^2 revient à dire que le reste ρ_n tend vers 0 :

$$\rho_n = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \int_{t > s_1 > s_2 > \dots > s_n} L_{\alpha_n} P_{s_{n-1}-s_n} \dots L_{\alpha_1} P_{t-s_1} f \circ X_{s_n} dZ_{s_1}^{\alpha_1} \dots dZ_{s_n}^{\alpha_n}.$$

Tous les termes composant ce reste sont orthogonaux, et le carré de la norme L^2 du reste est l'intégrale, par rapport à la loi initiale, de la fonction

$$(5) \quad R_n = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} \int_{t > s_1 > s_2 > \dots > s_n} P_{s_n} ((L_{\alpha_n} P_{s_{n-1}-s_n} \dots L_{\alpha_1} P_{t-s_1} f)^2) ds_1 \dots ds_n.$$

Démontrer que cette fonction tend vers 0 sur E (nous nous en occuperons dans un instant) montrera que la v.a. $f \circ X_t$ admet un développement chaotique sous toute loi initiale μ , avec des coefficients dépendant de X_0 . Mais ici nous remarquons que l'espace des v.a. admettant un développement chaotique est toujours fermé dans L^2 , et il suffit donc de prouver que le reste tend vers 0 pour des fonctions f formant un ensemble dense dans $L^2(\mu P_t)$.

Ensuite, il est très facile de voir que si le développement chaotique est établi pour les v.a. $f \circ X_t$, il est valable aussi pour les v.a. de la forme $f_1 \circ X_{t_1} \dots f_n \circ X_{t_n}$. En effet, il suffit de procéder par récurrence : par translation, la v.a. $f_n \circ X_{t_n}$ admet un développement chaotique sur l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$, avec des coefficients dépendant de $X_{t_{n-1}}$; on multiplie les coefficients par $f_1 \circ X_{t_1} \dots f_{n-1} \circ X_{t_{n-1}}$ et on utilise l'hypothèse de récurrence pour les développer sur $[0, t_{n-1}]$ avec des coefficients dépendant de X_0 , et on remet le tout ensemble.

Le principe de la méthode étant posé, examinons les applications.

Processus de Poisson. On a ici $E = \mathbb{R}$, $X_t = cN_t$ où N est un processus de Poisson d'intensité λ ; le générateur est $Af(x) = \lambda(f(x+c) - f(x))$, et on prend comme martingale génératrice le Poisson compensé $Z_t = c(N_t - \lambda t)$. L'opérateur L correspondant est donné par $Lf(x) = \frac{1}{c}(f(x+c) - f(x))$, de norme $m = 2/c$. Si f est bornée par 1, R_n est borné par $m^{2n}/n!$ (le dénominateur venant de l'intégration sur le simplexe), qui tend bien vers 0.

Mouvement brownien. Le générateur est $\frac{1}{2}\Delta$ et les L_α sont les opérateurs de dérivation D_α , leur nombre étant la dimension ν de l'espace. Le nombre de termes dans R_n est ν^n , et si l'on prend pour f une exponentielle complexe $e^{i u \cdot x}$, chaque P_t multiplie f par un facteur $e^{-t|u|^2/2}$ de module ≤ 1 , et chaque L_α par un facteur $i u_\alpha$ de module $\leq |u|$. D'où une majoration de R_n de la forme $t^n \nu^n u^{2n}/n!$, qui tend vers 0.

Yor m'a fait remarquer qu'il serait encore plus simple de prendre pour f un polynôme, le reste étant alors nul à partir d'un certain rang, et que cette méthode s'applique alors aussi aux martingales du type d'Azéma pour les "bonnes" valeurs du paramètre (voir plus loin). Bien sûr, cela déplace la difficulté vers la densité des polynômes dans $L^2(\mu P_t)$ (problème qui mériterait d'ailleurs un exposé dans l'esprit du théorème de représentation prévisible pour les martingales et du th. de Douglas).

Chaînes de Markov continues. Ceci est l'application vraiment nouvelle. Nous prenons pour E un ensemble fini à N points, et nous considérons une matrice de transition $p_t(i, j)$. Le générateur est une matrice $A = a(i, j)$ à coefficients négatifs sur la diagonale, positifs hors de la diagonale. Le système de Lévy (relativement à dt) est donné par la matrice $N = n(i, j)$ nulle sur la diagonale, et égale à $a(i, j)$ hors de la diagonale. Pour toute fonction h sur $E \times E$ nulle sur la diagonale on sait construire une martingale de la forme

$$S_h(t) = \sum_{s \leq t, \Delta X_s \neq 0} h(X_{s-}, X_s) - \int_0^t N h(X_{s-}) ds$$

où l'on rappelle que $N h(i) = \sum_j n(i, j) h(i, j)$. Le crochet oblique de deux telles martingales est donné par

$$d \langle S_h, S_k \rangle_t = N(hk) \circ X_t dt.$$

Enfin, ces martingales engendrent toutes les autres par intégrales stochastiques prévisibles. Ainsi, il s'agit de trouver des fonctions $z^\alpha(i, j)$ telles que $\sum_j n(i, j) z^\alpha(i, j) z^\beta(i, j) = \delta^{\alpha\beta}$. Ceci est trivial (par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt) à condition que le nombre $\nu(i)$ des points j tels que $n(i, j) \neq 0$ soit indépendant de i , et ce nombre ν est alors celui des martingales de la base. Cette construction étant faite, il est clair que tous les opérateurs L_α sont bornés; désignant par m un majorant de leurs normes, on a pour R_n une majoration du type $t^n \nu^n m^{2n}/n!$ et c'est fini. On trouvera plus de détails sur les chaînes de Markov continues dans l'autre exposé.

Il est clair que les majorations du reste que l'on utilise sont grossières, et qu'il faut d'une manière ou d'une autre revenir de majorations individuelles concernant les L_α à une majoration globale utilisant l'opérateur carré du champ Γ : on pourra alors traiter des décompositions chaotiques comportant un nombre infini de martingales fondamentales, ce qui est la situation normale.

Processus à accroissements indépendants. Ito a mis en évidence une forme de représentation chaotique pour tous les processus à accroissements indépendants (cf. p. 249–259 des *Selected papers*). Cette décomposition peut aussi se rattacher aux méthodes ci-dessus.

Considérons un processus (X_t) à accroissements indépendants et stationnaires, à valeurs dans \mathbb{R} pour simplifier. Soit \mathcal{E} l'espace vectoriel engendré par les exponentielles $e_u(x) = e^{iux}$, de sorte que $P_t e_u = e^{t\psi(u)} e_u$, le générateur A étant donné par $Ae_u = \psi(u)e_u$. L'opérateur carré du champ (bilinéaire, non hermitien) satisfait alors à

$$\Gamma(\bar{e}_u, e_v) = (\psi(v - u) - \psi(v) - \psi(-u))e_{v-u}.$$

Introduisons les martingales

$$M_t(e_u) = e_u(X_t) - e_u(X_0) - \int_0^t e_u(X_s) ds$$

puis les intégrales stochastiques $dZ_t(e_u) = e_u(X_{t-}) dM_t(e_u)$, et prolongeons l'application $e_u \mapsto Z(e_u)$ par linéarité à l'espace \mathcal{E} . Un calcul très simple montre que le crochet oblique (bilinéaire) de deux martingales de la forme $Z(e_u)$ est déterministe

$$d\langle \bar{Z}(e_u), Z(e_v) \rangle_t = (\psi(v - u) - \psi(v) - \psi(-u)) dt = \langle e_u, e_v \rangle dt.$$

où le produit scalaire hermitien à droite est celui qui est associé à la fonction de type négatif ψ . Désignons alors par e^α une base orthonormale de l'espace préhilbertien complexe \mathcal{E} et posons $Z^\alpha = Z(e^\alpha)$. Il est facile de vérifier, en utilisant le th. de Kunita-Watanabe, que ces martingales forment une base pour la représentation prévisible, et le problème est d'établir la représentation chaotique, en étudiant le reste de la formule d'Isobe-Sato.

Nous faisons maintenant un calcul formel sur ce reste (5). Nous allons d'abord nous simplifier la vie en utilisant un opérateur carré du champ bilinéaire comme d'habitude, plutôt qu'hermitien. Ensuite, nous utiliserons le fait que les L_α commutent avec les P_t pour regrouper tous les opérateurs du semi-groupe à gauche, et il nous reste alors à évaluer quelque chose du genre

$$\int_{t > s_1 \dots > s_n} ds_1 \dots ds_n P_{s_n}(\Gamma_n(h, k))$$

où l'on a posé $k = P_{t-s_n} f$, $h = \bar{k}$, et où les opérateurs carrés du champ itérés valent (du fait de la commutation des L_α et de A !)

$$\Gamma(f, g) = \sum_\alpha L_\alpha(f) L_\alpha(g) = A(fg) - fAg - (Af)g$$

$$\Gamma_2(f, g) = \sum_{\alpha, \beta} L_\alpha L_\beta(f) L_\alpha L_\beta(g) = A\Gamma(fg) - \Gamma(Af, g) - \Gamma(f, Ag)$$

$$\Gamma_3(f, g) = \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \dots = A\Gamma_2(fg) - \Gamma_2(Af, g) - \Gamma_2(f, Ag)$$

.....

Il nous suffit de montrer que le reste de la formule d'Isobe-Sato tend vers 0 lorsque f est une exponentielle e_u . L'effet de A ou de P_s sur une telle exponentielle est de la multiplier par une constante, de module $M(u)$ dans le premier cas, et au plus égal à 1 dans le second. D'autre part, si l'on développe les expressions ci-dessus, les seules exponentielles

qui apparaissent sont e_u , e_{-u} et 1. Enfin, le nombre total de termes dans Γ_n est 3^n . En définitive, on retombe donc sur le même genre de majorations que précédemment. Notre raisonnement n'est pas entièrement rigoureux, quant à la justification de l'expression donnée au reste.

Martingales d'Azéma. La méthode de Biane peut aussi mener à la propriété de représentation chaotique pour les martingales du type d'Azéma dans le bon intervalle de valeurs du paramètre. En effet, si X_t est la solution de l'équation de structure d'Emery $d[X, X]_t = dt + (1 + \gamma)dX_t$, la martingale X est elle-même un processus de Markov, possède la propriété de représentation prévisible dans la filtration qu'elle engendre, et les opérateurs A et L sont donnés par

$$Lf(x) = \frac{f(\gamma x) - f(x)}{cx}, \quad Af(x) = \frac{f(\gamma x) - f(x) - \gamma f'(x)}{c^2 x^2},$$

où $c = \gamma - 1$. Ces deux opérateurs appliquent dans lui-même l'espace des polynômes de degré n , le premier en diminuant le degré d'une unité et le second de deux; le semi-groupe lui-même préserve donc cet espace, et on en déduit que le reste de la formule d'Isobe-Sato est nul au bout d'un certain nombre d'itérations. Si les polynômes sont denses dans L^2 (ce qui est le cas dans le bon intervalle $\gamma \in [-2, 0]$), la propriété de développement chaotique est immédiate.

DIFFUSIONS QUANTIQUES III : THÉORIE GÉNÉRALE

par P.A. Meyer

Université Louis-Pasteur, Strasbourg

Cet exposé ne prétend pas donner une idée complète du sujet, qui est en plein développement — d'ailleurs, le titre lui même est remis en question : Parthasarathy a fait remarquer très justement qu'il s'agit de *flots* quantiques (analogues aux flots d'équations différentielles stochastiques) et non de *diffusions* quantiques (analogues à des processus de Markov donnés par leurs générateurs). Le premier paragraphe présente (pour la première fois dans ces exposés) une version détaillée du calcul stochastique sur l'espace de Fock multiple. C'est une digression par rapport au but principal, et il n'est pas nécessaire de l'avoir lu en détail pour passer au paragraphe suivant.

§1. ESPACE DE FOCK MULTIPLE

Opérateurs fondamentaux. Il nous faut d'abord, avec plus de détails que dans l'exposé I, développer la théorie de l'espace de Fock multiple avec les opérateurs de nombre et d'échange, et décrire les intégrales stochastiques quantiques. La théorie n'est pas plus difficile que celle de l'espace de Fock simple, mais elle utilise un *système de notation* différent, qu'il importe de bien maîtriser.

Nous désignons par Φ l'espace de Fock construit sur $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{G})$, où \mathcal{G} est un espace de Hilbert complexe de dimension ν , finie ou infinie dénombrable (nous appellerons ν la *multiplicité* de Φ). La lettre \mathcal{G} n'apparaîtra presque pas dans la suite, car nous nous empresserons de choisir une base orthonormale de cet espace, numérotée par un indice α variant de 1 à ν , ce qui identifie le premier chaos de Φ à une somme directe de ν copies de $L^2(\mathbb{R}_+)$. On peut écrire les éléments du premier chaos comme des "intégrales stochastiques"

$$\int u(s) \cdot dX(s) = \sum_{\alpha} \int u_{\alpha}(s) dX^{\alpha}(s).$$

où les courbes X^{α} de l'espace de Fock seront conçues, dans l'interprétation de Wiener, comme des mouvements browniens indépendants, en nombre ν , définis sur un espace de Wiener Ω . Cela donne un sens immédiat aux notations Φ_t et $\Phi_{|t}$, espaces L^2 associés aux tribus du passé et du futur.

Le développement chaotique des vecteurs de Φ a été présenté, pour le cas où $\nu=2$, dans le *Sém. Prob. XXII*, p. 101. Le cas des espaces de Fock de multiplicité finie n'en diffère pas

essentiellement : on a un développement chaotique s'écrivant, en notation courte, sous la forme

$$f = \int \widehat{f}(A_1, \dots, A_\nu) dX_{A_1}^1 \dots dX_{A_\nu}^\nu .$$

Dans le cas infini, on voit apparaître tous les monômes différentiels $\prod_\alpha dX_{A_\alpha}^\alpha$, où les A_α sont des parties finies de \mathbb{R}_+ ne différant de \emptyset que pour un nombre fini d'indices. On regroupe ces monômes différentiels en chaos suivant leur degré $\sum_i |A_{\alpha_i}|$, et à l'intérieur d'un même chaos en intégrales multiples orthogonales, suivant le vecteur des α_i tels que $A_i \neq \emptyset$. Si ν est infini il y a dans chaque chaos une infinité d'intégrales multiples.

REMARQUE. La "notation courte" peut maintenant sembler trop longue! En voici une qui dit la même chose en moins de place. Désignons par Π l'ensemble des applications π définies sur une partie finie $A = \text{dom}(\pi)$ de \mathbb{R}_+ , à valeurs dans l'ensemble $\{1, \dots, \nu\}$; la donnée de π équivaut à celle de la partition de A en les ensembles disjoints $A_i = \pi^{-1}(i)$, et remplace donc celle de tous les arguments de f ci-dessus. Nous pouvons poser aussi $|\pi| = |A|$, et désigner par dX^π ou $dX(\pi)$ l'élément différentiel correspondant. Le graphe de π est une partie finie de l'ensemble $E = \mathbb{R}_+ \times \{1, \dots, \nu\}$, que nous munirons du produit de la mesure de Lebesgue par la mesure de comptage; inversement presque toute partie finie de E est le graphe d'une application π , donc $\Pi = \mathcal{P}(E)$ aux ensembles de mesure nulle près et cela définit par transport une mesure $d\pi$ sur Π . La notation "ultracourte" pour les espaces de Fock multiples est finalement $f = \int_\Pi f(\pi) dX(\pi)$, avec une norme au carré égale à $\int_\Pi |f(\pi)|^2 d\pi$.

On peut aussi permettre aux applications π de prendre la valeur 0, mais bien entendu la formule donnant la norme de f cesse alors d'être exacte.

Nous passons aux opérateurs fondamentaux (en restant d'abord dans le cas familier $\nu < \infty$). Nous commençons par décrire l'effet, sur un monôme différentiel $\prod_\alpha dX_{A_\alpha}^\alpha$, d'un opérateur de nombre ou d'échange $da_\alpha^\beta(t)$ à l'instant t : on examine si la "variable" dX_t^α figure dans le monôme; si elle y est, l'opérateur lui substitue dX_t^β ; si elle n'y est pas, l'opérateur tue le monôme. Le cas des opérateurs de nombre correspond à $\alpha = \beta$, celui des opérateurs d'échange à $\alpha \neq \beta$. En abrégé, on a

$$da_\alpha^\beta(t) dX_t^\gamma = \delta_\alpha^\gamma dX_t^\beta .$$

Pour les opérateurs bien connus de création et d'annihilation, nous introduisons la très commode notation d'Evans. Nous convenons que

$$dX_t^0 = dt$$

et nous notons $da_\alpha^0(t)$ l'opérateur d'annihilation correspondant à l'indice α , conçu comme un opérateur d'échange qui substitue dt à dX_t^α (si cette variable est présente dans le monôme). De même, l'opérateur de création à l'instant t correspondant à l'indice α sera noté $da_0^\alpha(t)$; il rajoute la variable dX_t^α dans le monôme si l'instant t n'y figure pas, et tue le monôme s'il y figure. Cet opérateur satisfait à

$$da_0^\alpha(t) dX_t^\gamma = 0 \quad ; \quad da_0^\alpha(t) \mathbf{1} = dX_t^\alpha .$$

Enfin, on pose $da_0^0(t) = dt I$. Convenons maintenant que des indices grecs du type $\rho, \sigma, \tau \dots$ prennent les valeurs $1, \dots, \nu$ et en outre la valeur 0, interdite aux indices notés $\alpha, \beta, \gamma \dots$. Les opérateurs $da_\rho^\sigma(t)$ satisfont alors aux relations d'Evans

$$(1) \quad da_\rho^\sigma(t) dX^\tau(t) = \widehat{\delta}_\rho^\tau dX^\sigma(t) \quad ; \quad da_\rho^\sigma(t) da_\tau^\varrho(t) = \widehat{\delta}_\rho^\varrho da_\tau^\sigma(t)$$

dans lesquelles le symbole d'Evans $\hat{\delta}_\rho^\sigma$ diffère du symbole de Kronecker usuel par la relation $\delta_0^0 = 0$.

Dans le cas $\nu = \infty$ les opérateurs sont définis exactement de la même manière : la différence entre les cas fini et infini ne tient pas aux notations, mais à l'existence d'une bonne théorie des *noyaux de Maassen* dans le cas fini (voir dans ce volume l'exposé de A. Dermoune), tandis que la théorie des noyaux n'a pas encore été développée dans le cas infini.

Il faut peut être noter que par rapport aux articles d'Evans, Hudson, Parthasarathy... notre notation X_t^α avec indice en haut amène une interversion des indices pour les opérateurs — ce qui n'est important que pour le couple création-annihilation.

Intégrales stochastiques d'opérateurs. Nous allons maintenant décrire les intégrales stochastiques de familles d'opérateurs adaptés — rapidement, car la théorie a déjà été exposée dans le cas $\nu = 1$ (*cf. Sém. Prob. XX*, p. 286–296, auquel nous renvoyons pour les motivations, etc.).

Nous nous donnons un "espace initial" \mathcal{J} , et formons le produit tensoriel hilbertien $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$ avec l'espace de Fock; cela donne un sens immédiat à Ψ_t et $\Psi_{[t}$. Du point de vue probabiliste, ceci est un espace de variables aléatoires vectorielles de carré intégrable sur l'espace de Wiener Ω . Tout naturellement, nous pouvons multiplier une v.a. vectorielle $U \in \Psi$ par une v.a. scalaire $V \in \Phi$ (produit de Wiener); en fait nous n'utiliserons ce produit que lorsque $U \in \Psi_t$ (v.a. antérieure à t) et $V \in \Phi_{[t}$ (postérieure à t , donc indépendante de U). Le produit est alors indépendant de toute interprétation probabiliste, et exprime la structure de produit tensoriel continu de Ψ . Nous identifions $j \in \mathcal{J}$ à $j \otimes \mathbf{1} \in \Psi_0$, et supprimons tous les signes \otimes possibles. Les vecteurs de Ψ ont eux aussi un développement chaotique, mais à coefficients dans \mathcal{J} .

Nous nous proposons de définir des intégrales stochastiques faisant intervenir à la fois tous les opérateurs fondamentaux

$$(2) \quad I_t = I_t(H) = \sum_{\rho, \sigma} \int_0^t H_{\sigma}^{\rho}(s) da_{\rho}^{\sigma}(s),$$

où H est une matrice d'opérateurs adaptés.

Plutôt que l'habituelle approximation par les fonctions étagées (*cf.* la théorie de l'espace de Fock simple dans le *Sém. Prob. XX*), nous présenterons les intégrales stochastiques au moyen d'une formule d'intégration par parties — l'intégrale stochastique appliquée à un vecteur exponentiel apparaît alors directement comme la solution d'une é.d.s. de type classique. Nous ferons d'abord des calculs formels, puis nous nous occuperons de majorer des normes, etc.

Nous allons définir d'abord le processus $I_t F_t$ où (F_t) est un processus de vecteurs (martingale) dans Ψ

$$(3) \quad F_t = j + \sum_{\alpha} \int_0^t f_{\alpha}(s) dX^{\alpha}(s), \quad (j \in \mathcal{J}).$$

Nous imposons au processus de vecteurs $I_t F_t$ la relation

$$d(I_t F_t) = I_t dF_t + (dI_t) F_t + dI_t dF_t$$

En décomposant $F_t = F_t \otimes \mathbf{1}_t$ et en utilisant l'adaptation des opérateurs, cela s'écrit

$$(4) \quad d(I_t F_t) = \sum_{\alpha} I_t(f_{\alpha}(t)) dX^{\alpha}(t) + \sum_{\rho, \sigma} H_{\sigma}^{\rho}(t) F(t) da_{\rho}^{\sigma}(t) \mathbf{1} + \sum_{\rho, \sigma, \alpha} H_{\sigma}^{\rho}(t) f_{\alpha}(t) da_{\rho}^{\sigma}(t) dX_t^{\alpha}.$$

Si l'on ajoute à cela la relation

$$I_t F_t(j) = \sum_{\rho, \sigma} \int_0^t H_{\sigma}^{\rho}(s) j da_{\rho}^{\sigma}(s) \mathbf{1} = \sum_{\sigma} \int_0^t H_{\sigma}^0(s) j dX_s^{\sigma},$$

on peut en principe définir l'intégrale stochastique de $F(t)$ à partir de celles des $f_{\alpha}(t)$, ce qui permet de procéder par récurrence sur les chaos, méthode lourde, mais parfois indispensable. Mais si l'on prend pour F_t une martingale exponentielle, que nous noterons par économie $F_t = \mathcal{E}_t(ju)$ au lieu de $j \otimes \mathcal{E}_t(u)$, F_t est solution de l'équation

$$(5) \quad \mathcal{E}_t(ju) = j + \sum_{\alpha} \int_0^t u_{\alpha}(s) \mathcal{E}_s(ju) dX_s^{\alpha}$$

où $u = (u_{\alpha})$ appartient à $L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{G})$, et la relation (4) devient une équation différentielle stochastique déterminant le processus inconnu $A_t = I_t F_t$. Explicitement, on a alors $f_{\alpha}(t) = u_{\alpha}(t) F_t$ dans la formule (3); nous introduisons les vecteurs (connus)

$$(6) \quad \eta_{\sigma}^{\rho}(t) = H_{\sigma}^{\rho}(t) \mathcal{E}_t(ju) \quad ; \quad \eta_{\sigma}(t) = \sum_{\rho} u_{\rho}(t) \eta_{\sigma}^{\rho}(t).$$

en convenant que $u_0(t) = 1$. Avec ces notations, et après un calcul facile, la formule (4) s'écrit

$$(7) \quad A_t = \int_0^t A_s dU_s + \int_0^t dL_s$$

$$U_t = \sum_{\alpha} u_{\alpha}(s) dX_s^{\alpha} \quad (\text{scalaire, connu}) \quad ; \quad L_t = \sum_{\rho} \int_0^t \eta_{\rho}(s) dX_s^{\rho} \quad (\text{vectoriel, connu}) \quad ,$$

Il est intéressant d'oublier pour un instant l'espace de Fock, et de considérer (7) comme une équation différentielle stochastique usuelle, dans une interprétation probabiliste : il n'est pas nécessaire dans ce cas de supposer les u_{α} déterministes. Si l'on suppose la multiplicité finie, il n'y a aucune difficulté quant à l'existence de la solution de cette équation différentielle stochastique de type classique. On impose seulement aux u_{α} , η_{ρ} les conditions d'intégrabilité naturelles

$$\int_0^t (\sum_{\alpha} |u_{\alpha}(s)|^2) ds = \int \|u(s)\|^2 ds < \infty, \quad \int_0^t (\|\eta_0(s)\| + \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}(s)\|^2) ds = < \infty.$$

Nous allons voir que ces conditions suffisent pour que l'équation (7) admette une solution de carré intégrable sur tout intervalle borné. Nous allons majorer la norme L^2 de celle-ci, et alors on pourra aisément passer à la limite pour atteindre le cas de multiplicité infinie.

Etant données deux v.a. U, V sur Ω à valeurs dans \mathcal{J} , nous désignons par $\langle U, V \rangle$ leur produit scalaire dans \mathcal{J} , qui est une v.a. scalaire d'espérance $\langle U, V \rangle$. On utilise l'équation différentielle (7) pour évaluer la semimartingale scalaire

$$d\langle A_t, A_t \rangle = \langle dA_t, A_t \rangle + \langle A_t, dA_t \rangle + \langle dA_t, dA_t \rangle$$

Après quoi on prend une espérance, ce qui élimine tous les dX_t^α et ne laisse que $dX_t^0 = dt$, soit

$$\frac{d}{dt} \|A_t\|^2 = \|A_t\|^2 \|u(t)\|^2 + 2\Re e \langle A_t, \sum_{\rho} \eta_{\rho}(t) u_{\rho}(t) \rangle + \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}(t)\|^2$$

que nous écrivons, en posant $B_t = \sum_{\rho} \eta_{\rho}(t) u_{\rho}(t)$ (un vecteur) et $c^2(t) = \sum_{\alpha} \|\eta_{\alpha}(t)\|^2$ (un scalaire)

$$\dots = \|A_t\|^2 \|u(t)\|^2 + 2\Re e \langle A_t, B_t \rangle + c^2(t).$$

Nous appliquons la même méthode (due à Journé) qu'en *Sém. Prob. XX*, p. 293. Nous faisons le changement de fonction

$$\begin{aligned} \tilde{A}_t &= A_t e^{\frac{1}{2} \int_0^t \|u(s)\|^2 ds}, & \tilde{B}_t &= B_t e^{\frac{1}{2} \int_0^t \dots}, & \tilde{c}(t) &= c(t) e^{\frac{1}{2} \int_0^t \dots} \\ \tilde{a}(t) &= \|\tilde{A}_t\|, & \tilde{a}^*(t) &= \sup_{s \leq t} \tilde{a}(s), & \tilde{b}(t) &= \|\tilde{B}_t\|. \end{aligned}$$

Alors on a d'après l'inégalité de Schwarz

$$\tilde{a}(t)^2 \leq 2\tilde{a}^*(t) \int_0^t \tilde{b}(s) ds + \int_0^t c^2(s) ds$$

et maintenant le côté droit est une fonction croissante de t , donc on peut remplacer du côté gauche $\tilde{a}(t)$ par $\tilde{a}^*(t)$. Ainsi

$$(8) \quad \tilde{a}^*(t) \leq 2 \int_0^t \tilde{b}(s) ds + \left(\int_0^t c^2(s) ds \right)^{1/2}.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que les conditions d'intégrabilité imposées entraînent que les intégrales du côté droit sont finies. En multipliant par $e^{-\frac{1}{2} \int_0^t \dots}$ on obtient une majoration utilisable de la norme du processus (A_t) .

Revenons alors au problème initial : pour exprimer les conditions d'intégrabilité en fonction des $\eta_{\rho}^{\sigma}(t) = H_{\rho}^{\sigma}(t) \mathcal{E}_t(ju)$, on majore $\eta_{\rho} = \sum_{\sigma} \eta_{\rho}^{\sigma} u_{\sigma}$, et on obtient comme condition suffisante la finitude des intégrales suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\eta_0^0(s)\| ds, & \quad \int_0^t \left(\sum_{\alpha} \|\eta_0^{\alpha}(s)\|^2 \right)^{1/2} \|u(s)\| ds \\ & \quad \int_0^t \left(\sum_{\rho} \|\eta_{\alpha}^{\rho}(s)\|^2 \right) (1 + \|u(s)\|^2) ds \end{aligned}$$

Il est plus simple d'introduire comme Mohari-Sinha la mesure $\nu_u(dt) = (1 + \|u(t)\|^2) dt$ et d'imposer la condition

$$(9) \quad \int_0^t \left(\sum_{\rho\sigma} \|\eta_{\rho}^{\sigma}(s)\|^2 \right) \nu_u(dt) < \infty$$

qui assurera que le vecteur exponentiel $\mathcal{E}(ju)$ appartient au domaine de l'intégrale stochastique. Cependant, Mohari-Sinha font une remarque très intéressante dans le cas de multiplicité infinie : ils ne prennent comme "vecteurs test" que les vecteurs $\mathcal{E}(ju)$ tels que l'ensemble $S(u)$ formé de 0 et des α tels que $u_\alpha(\cdot) \neq 0$ soit fini. Alors dans le calcul précédent seuls interviennent les composantes correspondantes, dans (9) la sommation est étendue à $\sigma \in S(u)$. Mais alors on peut remplacer dans la somme (9) la somme double par une somme sur ρ seul, dont on exigera la finitude pour tout σ .

Au lieu de calculer les intégrales $I_t(H)\mathcal{E}(ju)$, qui en tant que fonctions de t forment des courbes adaptées, il est plus traditionnel de calculer $I_t(H)\mathcal{E}(ju)$ (qui est simplement le produit de la précédente par $\mathcal{E}(uI_{[t,\infty[})$). On a alors en posant $I_t(H)\mathcal{E}(ju) = A_t$, $h_\sigma^\rho(t) = H_\sigma^\rho(t)\mathcal{E}(ju)$

$$(10) \quad \frac{d}{dt} \langle \mathcal{E}(kv), A_t \rangle = \sum_{\rho\sigma} \langle \mathcal{E}(kv), h_\sigma^\rho(s) \rangle v^\sigma(s) u_\rho(s),$$

On a équilibré les indices suivant la convention d'Einstein, en posant $u^\rho = \bar{u}_\rho$, $\bar{u}^\rho = u_\rho$ ($u^0 = u_0 = 1$). En posant de même $I_t(K)\mathcal{E}(lv) = B_t$, $k_\sigma^\rho(t) = K_\sigma^\rho(t)\mathcal{E}(lv)$ on a la formule très utile

$$(11) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle B_t, A_t \rangle &= \sum_{\tau,\xi} \langle k_\tau^\xi(t), A_t \rangle v^\tau(t) u_\xi(t) + \sum_{\rho,\sigma} \langle B_t, h_\rho^\sigma(t) \rangle \bar{v}_\sigma(t) \bar{u}^\rho(t) \\ &+ \sum_{\tau,\xi,\sigma,\rho} \langle k_\tau^\xi(t), h_\sigma^\rho(t) \rangle \hat{\delta}_\xi^\sigma v^\tau(t) u_\rho(t). \end{aligned}$$

En faisant $H_t = K_t$ et en utilisant le même genre de méthode que plus haut, on majore le module d'une intégrale stochastique : nous recopions la formule donnée par Mohari-Sinha

$$(12), \quad \|I_t(\mathcal{E}(ju))\|^2 \leq C e^{\nu_u(t)} \sum_{\rho\sigma} \int_0^t \|H_\rho^\sigma(s)\mathcal{E}(ju)\|^2 \nu_u(ds)$$

où ρ ne parcourt que l'ensemble $S(u)$ des composantes non nulles de u . Pour la constante C , Mohari-Sinha donnent $C=2$, mais cela n'est pas important.

Calcul stochastique avec des noyaux. On trouvera dans ce volume le résultat d'A. Dermoune qui étend le calcul des noyaux de Maassen à un espace de Fock multiple — de multiplicité finie, cependant. Les avantages sont évidents : les vecteurs exponentiels sont remplacés par des vecteurs-test de Maassen, et les noyaux deviennent composables. Nous renvoyons à l'article de Dermoune pour les propriétés générales des noyaux. Rappelons seulement qu'un noyau est un opérateur de la forme

$$K = \int K((A_\rho^\sigma)) \prod_{\rho\sigma} \prod_{s \in A_\rho^\sigma} da_\rho^\sigma(s)$$

Tous les opérateurs a_ρ^σ figurent dans cette expression, y compris a_0^0 , bien que celui-ci puisse s'éliminer par intégration. Nous ne chercherons pas à distinguer nettement les noyaux des

opérateurs qu'ils définissent, et en particulier nous les désignerons par la même lettre. De même, nous permettrons à dX^0 d'apparaître dans l'expression des vecteurs

$$f = \int f((B^\tau)) \prod_{\tau \in B^\tau} dX^\tau(s)$$

Noter qu'il n'y a unicité d'une telle représentation que si l'on impose la condition $B^0 = \emptyset$. Pour obtenir une représentation du vecteur $Kf = g$, i.e. pour obtenir la fonction $g((H^\sigma))$, on considère toutes les décompositions (en nombre fini!) de la forme

$$H^\sigma = H_0^\sigma + \sum_{\alpha} H_{\alpha} l^\sigma + H^{l\sigma}$$

et on somme tous les produits

$$K((H_\rho^\sigma)) f((\sum_{\alpha} H_{\alpha}^\sigma + H^{l\sigma})).$$

Les intégrales n'apparaissent alors que lorsqu'on élimine les variables dX_s^0 pour avoir une vraie représentation chaotique.

Nous dirons qu'une famille (K_t) de noyaux est un *processus régulier* si 1) elle est adaptée, i.e. le noyau K_t s'annule dès que l'un de ses arguments sort de $[0, t]$; 2) Les noyaux K_t dépendent mesurablement de t , et satisfont aux majorations de Maassen et Dermoune, uniformément sur les intervalles bornés.

Etant donnés des processus réguliers de noyaux $H_\sigma^\rho(t)$, nous définissons l'intégrale stochastique

$$(14) \quad A_t = I_t(K) = A_0 + \sum_{\rho, \sigma} \int_0^t H_\rho^\sigma(s) da_\sigma^\rho(s),$$

où A_0 est un multiple de l'identité. Le résultat fondamental du calcul sur les noyaux dit que ces intégrales stochastiques définissent à nouveau des processus réguliers de noyaux, et peuvent être composées sans restriction, de manière à satisfaire à la "formule d'Ito". Il suffit pour cela de remarquer que l'intégrale stochastique d'un processus régulier, $V_t = \int_0^t K_s da_\xi^\tau(s)$, a un noyau donné par

$$(15) \quad V_t((A_\sigma^\rho)) = K_{\vee A_\xi^\tau}(A_0^0, (A_0^\alpha), \dots, A_\xi^\tau - \dots, (A_\alpha^0))$$

si $\cup A_\sigma^\rho$ est contenu dans $[0, t]$, et 0 sinon. Ici $\vee A$ désigne le dernier élément de la partie finie A , et $A-$ est A privé de cet élément, cf. *Sém. Prob. XX*, p. 309. La régularité se vérifie alors directement.

On peut de même définir des processus réguliers de vecteurs, qui sont des familles de vecteurs-test,

$$F_t = F_0 + \sum_{\rho} \int_0^t f_{\rho}(s) dX^\rho(s)$$

où les $f_{\rho}(s)$ sont des vecteurs-test satisfaisant uniformément aux conditions de majoration de Maassen sur les intervalles compacts. On vérifie alors que l'effet $I_t(H)F_t$ d'un processus

régulier de noyaux sur un processus régulier de vecteurs est encore un processus régulier de vecteurs, admettant une représentation en intégrales stochastiques donnée par la formule d'Ito. Les détails sont laissés au lecteur.

Ces définitions doivent être modifiées de la manière suivante lorsqu'on adjoint un espace initial \mathcal{J} . Les vecteurs de $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$ sont représentés par des développements chaotiques à valeurs dans \mathcal{J}

$$(16) \quad f = \int f((A^\alpha)) \prod_{\alpha} dX^\alpha(A^\alpha)$$

avec $f((A^\alpha)) \in \mathcal{J}$, et

$$\|f\|^2 = \int \|f((A^\alpha))\|_{\mathcal{J}}^2 \prod_{\alpha} dA^\alpha$$

(l'utilisation des indices α indique comme plus haut que $dX_t^0 = dt$ n'est pas utilisé). Les vecteurs-test sont définis par des conditions de majoration faisant intervenir la norme de \mathcal{J} au lieu du module des nombres complexes. De même, les noyaux sont donnés par la même expression que dans le cas scalaire, mais leurs coefficients sont maintenant des opérateurs bornés sur \mathcal{J} , et les propriétés de domination à la Maassen ont lieu en norme d'opérateurs. Alors le théorème de Maassen, les formules donnant l'effet d'un opérateur sur un vecteur, et la composition de deux opérateurs donnés par leurs noyaux, restent valables sans modification.

Cette théorie est pleinement satisfaisante pour un espace initial \mathcal{J} de dimension finie. Dans le cas de multiplicité infinie, on doit se passer des noyaux, et revenir aux méthodes directes, à la manière de Mohari et Sinha.

REMARQUE. Il existe aussi une "notation ultracourte" pour les noyaux, consistant à écrire ceux-ci sous la forme

$$K = \int K(\lambda, \mu) da_{\lambda}^{\mu},$$

où λ et μ sont deux éléments de Π de même domaine. Nous ne ferons aucun calcul sérieux avec cette notation. A titre de simple curiosité, décrivons comment un élément différentiel da_{λ}^{μ} d'opérateur agit sur un élément différentiel dX^{τ} de vecteur. Nous aurons besoin des notations suivantes : soient φ, ψ deux éléments de Π . Alors $\varphi + \psi$ est défini seulement si $\text{dom}(\varphi) \cap \text{dom}(\psi) = \emptyset$, et a alors la signification évidente; $\varphi - \psi$ a pour domaine $\text{dom}(\varphi) \setminus \text{dom}(\psi)$ et vaut φ sur cet ensemble; enfin $\widehat{\delta}_{\lambda}^{\tau}$ vaut 1 si $\lambda = \tau \neq 0$ sur $\text{dom}(\lambda) \cap \text{dom}(\tau)$ et $\lambda = 0$ sur $\text{dom}(\lambda) \setminus \text{dom}(\tau)$, et 0 dans les autres cas. Alors on a

$$da_{\lambda}^{\mu} dX^{\tau} = \widehat{\delta}_{\lambda}^{\tau} dX^{(\lambda-\tau)+\mu}.$$

§2. DIFFUSIONS OU FLOTS QUANTIQUES

Equations différentielles stochastiques quantiques. Sur l'espace de Hilbert initial \mathcal{J} , qui va remplacer la variété V de la théorie des e.d.s. classiques, nous nous donnons une $*$ -algèbre \mathcal{A} d'opérateurs sur \mathcal{J} , qui va remplacer l'algèbre $\mathcal{C}^{\infty}(V)$ (et n'a donc aucune raison d'être fermée en norme). On pose comme au §1 $\Psi = \mathcal{J} \otimes \Phi$ et on identifie

$f \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$ à $f \otimes I \in \mathcal{B}(\Psi)$. Une *diffusion quantique* ou mieux *flot quantique* est une famille d'homomorphismes contractifs X_t de \mathcal{A} dans $\mathcal{B}(\Psi)$

$$\mathcal{A} \ni f \mapsto f \circ X_t \in \mathcal{B}(\Psi_t) ;$$

le t en indice signifie que l'opérateur n'opère que sur la partie du Fock antérieure à t ; la notation bizarre $f \circ X_t$ au lieu de $X_t(f)$ souligne la parenté avec les situations probabilistes, dans lesquelles X_t est une variable aléatoire à valeurs dans l'espace d'états V et f est une fonction C^∞ sur V . On suppose toujours que $f \circ X_0 = f (= f \otimes I)$ et on demande que le flot satisfasse à une *équation différentielle stochastique*

$$(1) \quad f \circ X_t = f \circ X_0 + \sum \int_0^t L_\sigma^\rho(f) \circ X_s da_\rho^\sigma(s).$$

Les L_σ^ρ sont comme ci-dessus des applications de \mathcal{A} dans elle-même, et les intégrales stochastiques d'opérateurs sont du type défini plus haut au §1. Dire que l'on a une famille d'homomorphismes va imposer aux opérateurs L_σ^ρ de \mathcal{A} dans \mathcal{A} des conditions dites de *structure*. On les donnera plus loin.

Les homomorphismes une fois construits, on peut les étendre à la fermeture en norme de \mathcal{A} . Pour $f \in \overline{\mathcal{A}}$ on définit $P_t f \in \mathcal{B}(\mathcal{J})$ par la condition

$$(2) \quad \langle g, P_t f \rangle = \langle g \otimes 1, f \circ X_t \rangle .$$

Cela définit en fait un semi-groupe d'opérateurs complètement positifs sur la C^* -algèbre $\overline{\mathcal{A}}$.

Premier exemple : Diffusions classiques dans une variété...

Second exemple : Chaînes de Markov (cf. les deux premiers exposés).

Troisième exemple : E.d.s de Hudson-Parthasarathy (cf. *Sém. Prob. XX*, p. 300-305). Ici $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{J})$, et on considère une famille d'opérateurs $U_t \in \mathcal{B}(\Phi_t)$ satisfaisant à l'équation

$$(3) \quad U_t = I + \sum \int_0^t U_s K_\rho^\sigma da_\rho^\sigma(s).$$

Les coefficients sont pris dans $\mathcal{B}(\mathcal{J})$ (ils pourraient aussi dépendre du temps). Les conditions de structure sont les conditions d'unitarité des U_t , données par H-P. On définit alors un flot quantique dite *intérieur*

$$(4) \quad f \circ X_t = U_t^{-1}(f \otimes I)U_t .$$

Quatrième exemple : Dans le cas précédent, prenons tous les coefficients nuls sauf celui de $da_0^0(t) = dt$. Alors la condition de structure sur K se réduit à dire que iK est autoadjoint, et le générateur de la diffusion quantique correspondante est du type de Heisenberg.

Étant donnée une diffusion quantique (X_t) , et une diffusion intérieure (U_t) du type qui vient d'être décrit, on peut définir une nouvelle diffusion quantique Y_t par la formule $Y_t = U_t^{-1}X_tU_t$. On dit que (Y_t) est une *perturbation* de (X_t) . Ceci ressemble beaucoup à la "représentation d'interaction" en mécanique quantique classique. Du point de vue

des équations de structure, l'équivalence "Y est une perturbation de X" se lit comme l'appartenance à une même classe de cohomologie.

REMARQUE. La situation continue que nous étudions a un analogue discret très simple : on a une algèbre \mathcal{A} , et on désigne aussi par \mathcal{M} l'algèbre des matrices d'ordre $\nu+1$ opérant sur $\mathbb{C}^{\nu+1}$; $\mathbf{1}$ est le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$. Alors on pose $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_n \otimes \mathcal{M}$. Nous avons dans \mathcal{M} les unités matricielles a_ρ^σ qui satisfont à $a_\rho^\sigma a_\tau^\chi = \delta_\rho^\chi a_\tau^\sigma$ (attention : les indices ne fonctionnent pas tout à fait comme d'habitude); nous les reproduisons aux instants $n > 0$. Alors il s'agit de construire des homomorphismes X_n de \mathcal{A} dans \mathcal{A}_n tels que

$$(5) \quad f \circ X_{n+1} = f \circ X_n + \sum L_\sigma^\rho(f) \circ X_n a_\rho^\sigma(n+1).$$

La construction est immédiate par récurrence, et il est trivial que la relation de structure correspondant à la multiplicativité est

$$L_\sigma^\rho(fg) - f L_\sigma^\rho(g) - L_\sigma^\rho(f) f = \sum_\tau L_\sigma^\tau(f) L_\tau^\rho(g).$$

Cela exprime que si l'on forme l'algèbre $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$ des matrices à coefficients dans \mathcal{A} et que l'on note $L(f)$ la matrice des $L_\sigma^\rho(f)$, fI la diagonale f , l'application $f \mapsto fI + L(f) = \Sigma(f)$ est un homomorphisme de \mathcal{A} dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ (un $*$ -homomorphisme en fait).

Equations de structure. Passons au temps continu. Le point de départ est donné par les relations d'Evans que nous avons vues au §1 : à chaque instant t

$$da_\rho^\sigma da_\tau^\chi = \widehat{\delta}_\rho^\chi da_\tau^\sigma.$$

On aura presque les mêmes relations qu'en temps discret, mais les relations d'Evans imposent que l'on distingue le rôle spécial de l'indice 0 de celui des indices non nuls α, β, \dots . Il y a deux conditions relativement triviales : la propriété $L_\sigma^0(1) = 0$ et la propriété

$$(6) \quad (L_\sigma^\rho(f))^* = L_\rho^\sigma(f^*).$$

La condition non triviale exprime la multiplicativité et se scinde en trois, suivant le rôle spécial de l'indice 0 :

1) La matrice $\Lambda(f) = (L_\alpha^\beta(f))$ est telle que $f \mapsto fI + \Lambda(f) = \Sigma(f)$ soit un homomorphisme (mais on a une dimension de moins que dans le cas discret).

2) Le vecteur colonne $L_0^\alpha(f) = L^\alpha(f) = \lambda(f)$ détermine le vecteur ligne $L_\alpha^0(f)$ par conjugaison. Il suffit donc d'exprimer une condition pour l'un des deux. Celle-ci est

$$(7) \quad \lambda(fg) = \lambda(f)g + \Sigma(f)\lambda(g).$$

3) Pour le *générateur* $L(f) = L_0^0(f)$ du semi-groupe (P_t) , application de \mathcal{A} dans \mathcal{A} , la propriété s'écrit ainsi

$$(8) \quad L(f^*g) - f^*L(g) - L(f^*)g = \sum_\alpha L_\alpha(f^*)L^\alpha(g) = \langle \lambda(f), \lambda(f) \rangle.$$

en désignant par $\langle f, g \rangle$ le "produit scalaire" f^*g sur \mathcal{A} à valeurs dans \mathcal{A} , ainsi que son extension naturelle à \mathcal{A}^ν . Il s'agit là aussi d'une notion très familière en probabilités (l'opérateur "carré du champ").

On peut établir rigoureusement que ces conditions sont nécessaires, sous certaines hypothèses de régularité sur la diffusion, mais on considérera plutôt les trois conditions ci-dessus comme des axiomes raisonnables.

Evans et Hudson ont démontré que *si les opérateurs de structure sont bornés sur l'algèbre \mathcal{A} , les conditions de structure déterminent une diffusion unique*. Mohari et Sinha viennent tout juste de traiter certaines diffusions de multiplicité infinie, et avec des opérateurs de structure non bornés.

Structure de bimodule associée à une e.d.s.. Revenons à la seconde condition : la donnée de l'homomorphisme Σ de \mathcal{A} dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ permet de munir \mathcal{A}^ν d'une structure de \mathcal{A} -bimodule dans laquelle le produit à gauche par $f \in \mathcal{A}$ est donné par la matrice $\Sigma(f)$, tandis que le produit à droite est le produit usuel. Sous cette forme, la relation de structure (8) s'écrit simplement comme une dérivation

$$(9) \quad \lambda(fg) = f\lambda(g) + \lambda(f)g.$$

Introduisons quelques mots du langage de la cohomologie de Hochschild : si \mathcal{A} est une algèbre et \mathcal{B} un bimodule sur \mathcal{A} , on appelle n -cochaîne à valeurs dans ${}^r\mathcal{B}$ une application f de \mathcal{A}^n dans \mathcal{B} (pour $n=0$ un élément de \mathcal{B}). Le cobord de f étant la $(n+1)$ -cochaîne

$$df(v, u_1, \dots, u_n) = vf(u_1, \dots, u_n) - f(vu_1, u_2, \dots, u_n) + f(u_1, vu_2, \dots, u_n) \dots \\ + (-1)^{n+1} f(u_1, \dots, u_n)v.$$

Ainsi une 1-cochaîne $f(u)$ est un cocycle (a un cobord nul) si et seulement si $vf(u) - f(vu) + f(u)v = 0$, i.e. f est une dérivation. Dire que f est le cobord d'une 0-cochaîne g signifie que $f(u) = ug - gu$, i.e. f est une dérivation intérieure. On voit donc que (9) et (8) s'expriment en langage cohomologique (mais on n'utilise de la cohomologie qu'un langage, et seulement en bas de l'échelle).

Le cas des diffusions intérieures. Ici nous considérons une équation du type

$$(10) \quad U_t = I + \sum \int_0^t U_s K_\sigma^\rho d\alpha_\rho^\sigma(s)$$

où les K_σ^ρ sont des éléments de \mathcal{A} . Il sera commode de poser

$$\overset{*}{K}_\sigma^\rho = (K_\sigma^\rho)^*.$$

Les conditions nécessaires d'unitarité des U_t (qui sont aussi des conditions suffisantes) sont

$$(11) \quad K_\sigma^\rho + \overset{*}{K}_\sigma^\rho + \sum_\alpha K_\alpha^\rho \overset{*}{K}_\sigma^\alpha = 0 = K_\sigma^\rho + \overset{*}{K}_\sigma^\rho + \sum_\alpha \overset{*}{K}_\alpha^\rho K_\sigma^\alpha,$$

où l'emploi de l'indice α indique que 0 est exclu. D'autre part, le passage des coefficients K_σ^ρ aux coefficients $L_\sigma^\rho(f)$ de la diffusion intérieure est donné par

$$(12) \quad L_\sigma^\rho(f) = \overset{*}{K}_\sigma^\rho f + f K_\sigma^\rho + \sum_\alpha \overset{*}{K}_\alpha^\rho f K_\sigma^\alpha.$$

Résultats d'existence. Nous allons d'abord supposer que la multiplicité ν est finie, et montrer comment la théorie des noyaux de Maassen s'applique.

Nous commençons par le cas d'une "exponentielle de Doléans à gauche", solution d'une équation différentielle du type Hudson-Parthasarathy, avec des coefficients dépendant du temps

$$(13) \quad U_t = I + \int_0^t U_s \left(\sum_{\rho, \sigma} L_\sigma^\rho(s) da_\sigma^\rho(s) \right).$$

Ici les opérateurs $L_\sigma^\rho(s)$ sont des opérateurs sur l'espace initial, que nous supposons uniformément bornés; ils sont étendus à Ψ sans que cela apparaisse dans la notation. Nous allons appliquer formellement la méthode de Picard, mais pour alléger les notations nous désignons par ε le couple d'indices $\overset{\sigma}{\rho}$. On obtient alors le développement suivant

$$U_t = I + \sum_{\varepsilon_1} \int_0^t L_{\varepsilon_1}(s_1) da^{\varepsilon_1}(s_1) + \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2} \int_{s_1 < s_2 < t} L_{\varepsilon_1}(s_1) L_{\varepsilon_2}(s_2) da^{\varepsilon_1}(s_1) da^{\varepsilon_2}(s_2) + \dots$$

Cet opérateur peut s'interpréter comme un noyau de Maassen à valeurs dans les opérateurs bornés sur l'espace initial. Rappelons que dans la notation "ultracourte", un noyau $K(\lambda, \mu)$ dépend de deux arguments, qui sont deux applications définies sur la même partie finie $A = \{s_1 < \dots < s_n\}$ de \mathbb{R}_+ , et que l'élément différentiel correspondant est $da_{\lambda_1}^{\mu_1}(s_1) \dots da_{\lambda_n}^{\mu_n}(s_n)$. Ici nous avons pour une partie finie contenue dans $(0, t)$

$$(14) \quad U_t(\lambda, \mu) = L_{\mu_1}^{\lambda_1}(s_1) \dots L_{\mu_n}^{\lambda_n}(s_n)$$

et 0 pour une partie finie sortant de $(0, t)$: on a une analogie parfaite avec le développement en chaos d'un vecteur exponentiel $\mathcal{E}_t(ju)$, et il sera instructif pour notre lecteur de reprendre le raisonnement ci-dessous, en vérifiant directement sur le développement en chaos des vecteurs exponentiels les formules fondamentales: leur équation différentielle stochastique, ou la formule $\langle \mathcal{E}(u), \mathcal{E}(v) \rangle = e^{\langle u, v \rangle}$.

Si les opérateurs $L_\sigma^\rho(s)$ sont uniformément bornés, les majorations de Maassen sont évidentes. L'avantage des noyaux apparaît lorsqu'on veut vérifier les propriétés d'unitarité: il s'agit d'opérateurs définis sur le domaine stable dense des fonctions-test, composables, admettant un adjoint de même domaine, et vérifier que $U_t U_t^* = U_t^* U_t = I$ en tant que noyaux va entraîner que U_t et U_t^* sont bornés, et prolongeables en opérateurs unitaires. Mais la composition de familles régulières de noyaux donne une famille régulière, on dispose d'une formule d'Ito rigoureuse pour de telles familles, et le calcul au moyen de cette formule donne $d(U_t U_t^*) = 0 = d(U_t^* U_t)$ si les coefficients satisfont aux conditions de Hudson-Parthasarathy (11). Donc on a bien construit des opérateurs unitaires.

Pour traiter de manière analogue les diffusions quantiques, on doit se rappeler que les opérateurs L_ρ^σ contiennent dans ce cas un argument supplémentaire f appartenant à l'algèbre initiale. Cet argument figurera dans le noyau $X_t(f; \lambda, \mu)$ de la diffusion, qui sera donné cette fois par une formule analogue à (14)

$$(15) \quad X_t(f; \lambda, \mu) = L_{\mu_1}^{\lambda_1}(\cdot; s_1) \circ \dots \circ L_{\mu_n}^{\lambda_n}(f, s_n)$$

la notation signifie que l'on introduit $f \in \mathcal{A}$ comme argument dans le dernier opérateur, ce qui fournit un nouvel élément de l'algèbre initiale \mathcal{A} , que l'on introduit dans l'opérateur précédent, etc.; on a donc affaire à un noyau à valeurs dans \mathcal{A} ; si les coefficients de la diffusion sont bornés on a un noyau de Maassen, et on peut reproduire le raisonnement précédent pour vérifier cette fois que l'on a une famille d'homomorphismes.

Malheureusement, cette méthode si simple ne s'applique pas dans le cas de multiplicité infinie.

Il resterait beaucoup à dire, en particulier sur la théorie des perturbations, mais cet exposé est déjà trop long.

P.S. Je viens de recevoir le travail [2] de D. Applebaum, qui clarifie considérablement la relation entre diffusions classiques et quantiques (gouvernées par les processus de création et annihilation seuls). J'espère avoir l'occasion de le présenter dans ce séminaire.

REFERENCES

- [1] APPLEBAUM (T.). Quantum Diffusions on Involutive Algebras. *Proc. of the 1988 Heidelberg Conf. on Quantum Probability*. A paraître.
- [2] APPLEBAUM (T.). The Quantum Theory of Classical Diffusions on Riemannian Manifolds. A paraître
- [3] EVANS (M.P.). Existence of Quantum Diffusions. *Prob. Th. Rel. Fields (ZW)*, 81, 1989, p. 473-483.
- [4] EVANS (M.P.) et HUDSON (R.L.). Multidimensional quantum diffusions. *Quantum Probability and Applications III*, LN 1303, Springer 1988.
- [5] EVANS (M.P.) et HUDSON (R.L.). Perturbations of quantum diffusions. *Proc. London Math. Soc.*, à paraître.
- [6] MOHARI (A.) and SINHA (K.B.). Quantum stochastic flows with infinite degrees of freedom and countable state Markov chains. *Preprint*, Indian Statistical Institute, Delhi, 1989. A paraître dans *Sankhya*.