SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE BIANE

Marches de Bernoulli quantiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 329-344
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__329_0>

MARCHES DE BERNOULLI QUANTIQUES

Philippe Biane
C.N.R.S. U.R.A. 212 Couloir 45-55 5^e étage
Université Paris 7
2, place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

Introduction:

Le jeu de pile ou face (ou marche de Bernoulli) est sans doute le processus stochastique le plus simple et ses propriétés ont fait l'objet de nombreuses études (voir par exemple le livre de Feller [3]). Le but de cet article est de présenter quelques propriétés d'une généralisation non commutative de la marche aléatoire de Bernoulli, inspirée du chapitre II de Meyer [8].
Le § 1 est consacré à un bref rappel de certaines notions de probabilités quantiques, dont on trouvera un exposé détaillé dans Meyer [7], [8]. Dans les § 2 et 3 on définit les variables et les marches de Bernoulli quantiques, puis dans le § 4 on introduit le processus de spin. Après quelques rappels sur les représentations de $sl(2,\mathbb{C})$, on détermine au § 6 la loi du processus de spin puis au § 8 on étudie le conditionnement quantique. Le dernier § examine le lien entre ce qui précède et la notion de chaîne de Markov quantique, introduite par plusieurs auteurs.
Dans l'étude du jeu de pile ou face classique, les méthodes combinatoires jouent un rôle fondamental, qui sera tenu dans ce qui va suivre par l'algèbre linéaire de dimension finie (plus précisément, par la théorie des représentations de $sl(2,\mathbb{C})$).

1 Probabilités quantiques:

La base des probabilités quantiques est un espace de Hilbert complexe H.
Une variable aléatoire quantique est un opérateur auto-adjoint sur H, une famille d'opérateurs auto-adjoints sur H est un processus quantique, et si ces opérateurs commutent, ce processus est dit "classique".
Une loi quantique est un opérateur à trace, positif, de trace 1 sur H (aussi appelé "état"). Si on se donne un tel opérateur ρ, l'espérance d'une variable aléatoire quantique A est donnée par

$$E[A] = \operatorname{tr}(\rho A)$$

Si f est une fonction Borélienne bornée sur le spectre de A, f(A) est défini par le calcul fonctionnel sur les opérateurs auto-adjoints, et l'application $f \to E[f(A)]$ définit une mesure de probabilité sur Spec(A), appelée loi de la variable quantique A dans l'état ρ.
Si on se donne une famille d'opérateurs auto-adjoints commutant deux à deux, on peut déterminer leur loi jointe en calculant $E[f_1(A_1)\dots f_n(A_n)]$, et donc on peut déterminer la loi d'un processus classique.
Le lien avec la théorie usuelle des probabilités est obtenu de la façon suivante: si $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est un espace probabilisé, on pose $H = L^2_{\mathbb{C}}\ (\Omega,\mathcal{F},P)$, et on identifie une variable aléatoire réelle X sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ avec l'opérateur de multiplication qu'elle définit sur H. Si on prend pour ρ l'opérateur de projection orthogonale sur 1, on retrouve la loi P.

2 Variable de Bernoulli quantique:

Une variable de Bernoulli X peut être réalisée sur l'espace de probabilité $\Omega = \{+1,-1\}$, avec la probabilité $P(\{+1\}) = p$, $P(\{-1\}) = q = 1-p$ par

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$
$$X(+1) = 1,\ X(-1) = -1.$$

L'espace $L^2(\Omega,P)$ est isomorphe à $\mathbb{C}^2$ avec sa structure de Hilbert usuelle, en identifiant (1,0) avec $(4p)^{-1/2}(1+X)$ et (0,1) avec $(4q)^{-1/2}(1-X)$ et l'algèbre $L^\infty(\Omega,P)$, opérant sur L^2 par multiplication s'identifie avec la sous-algèbre de $M_2(\mathbb{C})$ formée des matrices diagonales (en effet, cette algèbre est engendrée par 1 -i.e. la fonction constante égale à 1- et X qui opèrent sur $\mathbb{C}^2$ par $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$).
Une généralisation non-commutative naturelle de cette situation consiste à remplacer cette algèbre par l'algèbre -plus grosse- $M_2(\mathbb{C})$. On appellera donc $M_2(\mathbb{C})$ l'algèbre des variables de Bernoulli quantiques.
Nous allons faire quelques remarques élémentaires sur les variables aléatoires quantiques (i.e. les éléments auto-adjoints) de $M_2(\mathbb{C})$.
Le sous espace (réel) de $M_2(\mathbb{C})$ formé des éléments auto-adjoints est engendré par les quatre matrices, linéairement indépendantes:

$$I,\ \sigma_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \sigma_z = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

($\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z$ sont les matrices de Pauli), que nous noterons 1, X, Y, Z.

Toute combinaison linéaire à coefficients réels $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ est un opérateur auto-adjoint, et donc d'après les principes généraux des probabilités quantiques, définit une variable aléatoire classique, qui peut prendre les deux valeurs $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{1/2}$et $-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{1/2}$ (ce sont les deux valeurs propres de l'opérateur). La situation est donc très différente du cas où X, Y, Z sont des variables de Bernoulli qui commutent.

D'autre part, les opérateurs X, Y, Z vérifient les relations de commutation :

$$[X,Y] = 2iZ$$

ainsi que celles déduites d'une permutation circulaire de X, Y, Z.

Si l'on effectue une transformation unitaire U de $\mathbb{C}^2$, X, Y, Z, sont transformés en $UXU^{-1}, UYU^{-1}, UZU^{-1}$, mais les relations de commutation ne changent pas:

$$[UXU^{-1}, UYU^{-1}] = 2iUZU^{-1}$$

Une autre façon d'exprimer ceci consiste à dire que l'action de SO(3) sur l'espace vectoriel euclidien engendré par X, Y, Z, laisse invariantes les relations de commutation. (On utilise la projection $U(2) \to SO(3)$).

Nous venons de voir quel était l'analogue quantique d'une variable de Bernoulli , il faut maintenant choisir un état sur $M_2(\mathbb{C})$ qui généralise la loi de Bernoulli sur Ω.

L'état le plus général est donné par la matrice:

$$\rho = \begin{pmatrix} \alpha & \bar{z} \\ z & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

avec $0 \leq \alpha \leq 1$, $|z|^2 \leq \alpha(1-\alpha)$.

Quitte à conjuguer par un élément de U(2), ce qui ne change pas les relations de commutations de X, Y, Z, on peut toujours supposer que

$$\rho = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1-p \end{pmatrix}$$

avec $0 < p \leq 1$.

Dans cet état, X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et Y et Z suivent la loi de Bernoulli symétrique.

Deux valeurs de p sont remarquables:

a) $p = 1/2$

Dans ce cas $\rho = 1/2 I$ et pour chaque (α, β, γ) tel que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$, $\alpha X+\beta Y+\gamma Z$ suit une loi de Bernoulli symétrique, cet état est donc un analogue discret de la loi de Gauss centrée sur $\mathbb{R}^3$, que l'on appellera "état totalement symétrique".

b) $p = 1$

ρ est alors le projecteur orthogonal sur le vecteur (1,0) et sera appelé "état vide" (cette terminologie étant justifiée par l'analogie avec l'espace de Fock cf Meyer [7],[8])

3 Marche de Bernoulli quantique:

Nous allons maintenant ajouter plusieurs "variables de Bernoulli quantiques" indépendantes, et pour cela nous formons le produit tensoriel d'algèbres $M_2(\mathbb{C})^{\otimes\nu}$ (où $\nu \in \mathbb{N}$), qui agit de façon usuelle sur l'espace de Hilbert $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$.

Considérons les éléments de $M_2(\mathbb{C})^{\otimes\nu}$ x_k, y_k, z_k, définis par:

$x_k = I\otimes\ldots\otimes I\otimes\sigma_x\otimes I\otimes\ldots\otimes I \qquad y_k = I\otimes\ldots\otimes I\otimes\sigma_y\otimes I\otimes\ldots\otimes I \qquad z_k = I\otimes\ldots\otimes I\otimes\sigma_z\otimes I\otimes\ldots\otimes I$

où chaque σ apparait à la k^e place.

Ces opérateurs agissent sur $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$ de façon auto-adjointe et vérifient les relations de commutation:

$$[x_k,x_j] = [x_k,y_j] = 0 \text{ pour tout couple } k \neq j$$
$$[x_k,y_k] = 2i\, z_k,$$

ainsi que toutes celles qui s'en déduisent par permutation circulaire.

Chaque triplet x_k,y_k,z_k est donc un triplet de variables de Bernoulli Quantiques.

On pose

$$X_k = \sum_{i\leq k} x_i \ , \quad Y_k = \sum_{i\leq k} y_i \ , \quad Z_k = \sum_{i\leq k} z_i$$
$$\text{pour } k\geq 1,$$
$$X_0 = Y_0 = Z_0 = 0.$$

Ces opérateurs auto-adjoints vérifient les relations de commutation:

$$[X_k,Y_l] = 2iZ_{k\wedge l}$$

ainsi que celles s'en déduisant par permutation de X, Y, Z.

De plus, les opérateurs X_k (resp. Y_k, Z_k),($0\leq k\leq\nu$) commutent et définissent donc un processus classique.

Si l'on considère l'état $\rho^{\otimes\nu}$sur $(M_2(\mathbb{C}))^{\otimes\nu}$, chacun des (Y_k), (Z_k) ($0\leq k\leq\nu$) suit la loi d'un jeu de pile ou face symétrique, alors que (X_k) est un jeu de pile ou face biaisé (si $p\neq 1/2$).

4 Le processus de spin:

L'invariance des relations de commutation par rotation, remarquée plus haut, suggère l'introduction d' un nouveau processus lié à la marche de Bernoulli quantique.

Définition: Le processus de spin S est défini par:

$$S_k^2 = (X_k^2+ Y_k^2+ Z_k^2+ I)$$

pour tout $k\leq\nu$.

On vérifie facilement que S_k^2 est un opérateur auto-adjoint positif et donc cette formule définit bien S_k comme opérateur auto-adjoint positif.

Proposition 1:

$$[S_k,X_k] = [S_k,Y_k] = [S_k,Z_k] = 0.$$

preuve: il suffit de voir que $[S_k^2, X_k] = 0$, ce qui résulte d'un calcul facile.

Proposition 2:
pour tout couple (k, l) on a:

$$[S_k, S_l] = 0.$$

preuve: d'après la proposition 1, S_k commute avec X_k, Y_k, Z_k, et les x_i, y_i, z_i pour $i \geq k+1$, or $(S_{k+1}^2 - S_k^2) = 2(x_{k+1}X_k + y_{k+1}Y_k + z_{k+1}Z_k)$, et donc S_k commute avec S_{k+1} et, en continuant ainsi, avec S_{k+2}, etc...

Comme les variables S_k commutent, S définit un processus stochastique classique, dont on va déterminer la loi.
Les relations de commutation vérifiées par la marche de Bernoulli (X_k, Y_k, Z_k) montrent que pour chaque k, les opérateurs X_k, Y_k, Z_k déterminent une représentation de l'algèbre de Lie $sl(2,\mathbb{C})$. Je vais donc commencer par faire quelques rappels sur les représentations de $sl(2,\mathbb{C})$. Une référence pour ces résultats est, par exemple, Naimark et Stern [9].

5 Représentations de sl(2, C):
Toute représentation de dimension finie de $sl(2,\mathbb{C})$ se décompose en somme directe de sous représentations irréductibles.
L'algèbre de Lie $sl(2,\mathbb{C})$ admet une unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de dimension $2j+1$ pour chaque demi-entier $j \geq 0$, notée $\mathcal{D}_j$ (j est le "spin" de la représentation).
En particulier, les matrices de Pauli engendrent une algèbre de Lie complexe isomorphe à $sl(2,\mathbb{C})$ et leur action sur $\mathbb{C}^2$ définit la représentation $\mathcal{D}_{1/2}$, tandis que $\mathcal{D}_0$ est la représentation nulle.
On en déduit que, pour chaque k, les opérateurs x_k, y_k, z_k, définissent sur $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$ la représentation suivante de $sl(2,\mathbb{C})$:

$$\mathcal{D}_0^{\,2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}_0^{\,2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_0^{\,2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}_0^{\,2}$$

où $\mathcal{D}_{1/2}$ apparait à la k^eplace, et $\mathcal{D}_0^{\,2} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_0$.
De même, les opérateurs X_k, Y_k, Z_k, engendrent une algèbre de Lie isomorphe à $sl(2,\mathbb{C})$ et définissent sur $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$ la représentation

$$\mathcal{D}_{1/2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_0^{\,2} \otimes \ldots \otimes \mathcal{D}_0^{\,2}$$

où $\mathcal{D}_{1/2}$ apparait dans les k premiers termes.
Pour chacune de ces représentations, on a vu que l'opérateur $(X_k^2 + Y_k^2 + Z_k^2)$ commute avec la représentation de $sl(2,\mathbb{C})$ définie par X_k, Y_k, et Z_k, et donc agit sur chaque composante irréductible de cette représentation par la multiplication par un scalaire. (Cet opérateur porte le nom d'opérateur de Casimir de la représentation).

Voici une description ,de la représentation $\mathcal{D}_j$, en posant n = 2j-1 (cf [9]). Il existe une base $e_{-n}, e_{-n+2}, e_{-n+4},\dots,e_n$, dans laquelle l'action des opérateurs $\mathcal{D}_j(\sigma_x)$, $\mathcal{D}_j(\sigma_y)$, $\mathcal{D}_j(\sigma_z)$, est donnée par les formules:

i) $\mathcal{D}_j(\sigma_x)(e_{n-2k}) = (n-2k)\, e_{n-2k}$,

ii) $\mathcal{D}_j(\sigma_y)(e_{n-2k}) = (n-k)\, e_{n-2k-2} + k\, e_{n-2k+2}$

iii) $\mathcal{D}_j(\sigma_z)(e_{n-2k}) = i((n-k)\, e_{n-2k-2} - k\, e_{n-2k+2})$

Ces formules montrent que l'opérateur de Casimir

$$\mathcal{D}_j(\sigma_x)^2 + \mathcal{D}_j(\sigma_y)^2 + \mathcal{D}_j(\sigma_x)^2$$

de la représentation $\mathcal{D}_j$ est égal à 4j(j+1)I. On en déduit que S_k agit par multiplication par 2j+1 sur chaque composante de type $\mathcal{D}_j$ dans la décomposition en composantes irréductibles de la représentation $(\mathcal{D}_{1/2})^{\otimes k}$. On voit donc qu'il est important de savoir comment se décompose un produit tensoriel de représentations irréductibles de sl(2,$\mathbb{C}$). La réponse à ce problème est donnée par les "formules de Clebsch-Gordon":

$$\mathcal{D}_j \otimes \mathcal{D}_{j'} = \mathcal{D}_{|j-j'|} \oplus \mathcal{D}_{|j-j'|+1} \oplus \dots \oplus \mathcal{D}_{j+j'}.$$

En particulier, si j' = 1/2 on a

$\mathcal{D}_j \otimes \mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_{j-1/2} \oplus \mathcal{D}_{j+1/2}$ si $j \geq 1/2$ et $\mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_{1/2}$.

6 Loi du processus S:

Les considérations du §5 vont nous permettre de déterminer la loi du processus S dans l'état $\rho^{\otimes \nu}$ pour p<1. On note q = 1-p.

Théorème 1:

La loi du processus $(S_n)_{0\leq \nu}$ dans l'état $\rho^{\otimes\nu}$ est celle d'une chaine de Markov sur $\mathbb{N}^*$ issue de 1 de probabilités de transition :

$$P(x, x-1) = \frac{1}{2}\,\frac{x-1}{x}, \quad P(x, x+1) = \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{x}.$$

si p = 1/2

$$P(x, x-1) = pq\,\frac{p^{x-1}-q^{x-1}}{p^x-q^x}, \quad P(x, x+1) = \frac{p^{x+1}-q^{x+1}}{p^x-q^x}$$

sinon.

Avant de montrer comment on déduit ce résultat du §5, je vais faire quelques commentaires de nature probabiliste.

Soit X_t un mouvement Brownien réel avec drift α, issu de 0, on note $T_0 = 0$, $T_{k+1} = \inf\{\, t\geq T_k \;/\; |X_t - X_{T_k}| = 1 \,\}$ les instants successifs de passage de X aux points entiers, alors X_{T_k} est une marche aléatoire de Bernoulli, de paramètre $p = (1+e^{-2\alpha})^{-1}$.

Soient maintenant Y_t et Z_t deux mouvement Browniens indépendants de X, issus de 0. Le processus $S_t = (1+X_t^2+Y_t^2+Z_t^2)^{1/2}$ est un processus de Markov sur $\mathbb{R}_+$ de générateur infinitésimal: $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\coth\alpha x \frac{d}{dx}$. Ce processus peut également s'obtenir en conditionnant le mouvement Brownien avec drift X à ne pas passer par 0 (plus précisément, si $\alpha>0$, c'est le u-processus, au sens de Doob, de X construit à l'aide de la fonction excessive $1-e^{-2\alpha x}$ sur $\mathbb{R}^+$).

Si l'on note T_k les instants successifs de passage du processus S aux points entiers, alors le processus S_{T_k} est une chaîne de Markov sur $\mathbb{N}^*$ ayant les probabilités de transition du Théorème 1, avec $p = (1+e^{-2\alpha})^{-1}$. De plus, la chaîne de Markov du théorème 1 peut également s'obtenir comme u-processus de la marche de Bernoulli de paramètre p.

Dans le cas de l'état totalement symétrique on peut faire quelques remarques supplémentaires:

On sait bien que le jeu de pile ou face symétrique peut être renormalisé pour converger en loi vers le mouvement Brownien, en posant

$$X_t^{(n)} = n^{-1/2}X_{[nt]}$$

([x] = partie entière de x) où X_k est une marche de Bernoulli symétrique. Dans le cas que nous regardons nous avons trois marches de Bernoulli symétriques qui ne commutent pas, mais si on les renormalise les relations de commutation deviennent

$$[X_t^{(n)}, Y_t^{(n)}] = 2i\ n^{-1/2}\ Z_t^{(n)}$$

et donc, dans l'état totalement symétrique, les mouvements Browniens obtenus à la limite, commutent. (Nous n'essaierons pas de rendre rigoureux ce raisonnement heuristique).

On peut donc s'attendre à ce que le processus renormalisé

$$n^{-1/2}S_{[nt]}$$

converge en loi vers la norme d'un mouvement Brownien de dimension 3. Or il est bien connu que le processus de Markov ayant les probabilités de transition données par le théorème , quand il est renormalisé est une approximation du processus de Bessel de dimension 3, (ce processus a été utilisé pour démontrer des propriétés du processus de Bessel de dimension 3 cf Pitman [10], et Le Gall [5], par exemple).

Toutes ces propriétés "miraculeuses" mettent en relief la symétrie dont jouit la marche aléatoire de Bernoulli quantique.

7 Preuve du théorème 1:

Tout d'abord, remarquons que $\rho = (pq)^{1/2}(p/q)^{1/2\ \sigma_x}$ et donc, $\rho^{\otimes\nu} = (pq)^{\nu/2}(p/q)^{1/2\ X_\nu}$ et en particulier, cet opérateur commute avec

$S_0, S_1, \dots, S_\nu$.
On va utiliser de façon essentielle le

Lemme 1:

Tout sous espace propre commun à S_1, $S_2, \dots$, S_k, maximal, est de la forme: $E_k \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes(\nu-k)}$ où E_k est un sous espace de $(\mathbb{C}^2)^{\otimes k}$ sur lequel l'algèbre de Lie engendrée par X_k, Y_k, Z_k agit par la représentation $\mathcal{D}_j \otimes (\mathcal{D}_0{}^2)^{\otimes(\nu-k)}$, où $2j+1$ est la valeur propre de S_k.

preuve:

Cette propriété est vraie pour k=1, supposons la vérifiée pour k-1, et soit $E_{k-1} \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes(\nu-k+1)}$ un sous espace propre commun à S_1, $S_2, \dots$, S_{k-1}, tel que la valeur propre de S_{k-1} soit $2j+1$, alors l'algèbre de Lie engendrée par X_k, Y_k, Z_k, agit sur ce sous espace au moyen de la représentation $\mathcal{D}_j \otimes \mathcal{D}_{1/2} \otimes (\mathcal{D}_0{}^2)^{\otimes(\nu-k)}$ et donc, d'après la formule de Clebsch-Gordon, il existe deux sous espaces supplémentaires E_k^+ et E_k^- de $E_{k-1} \otimes \mathbb{C}^2$ tels que l'algèbre de Lie engendrée par X_k, Y_k, Z_k, agisse sur $E_k^+ \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes(\nu-k)}$ par la représentation $\mathcal{D}_{j+1/2} \otimes (\mathcal{D}_0{}^2)^{\otimes(\nu-k)}$ et sur $E_k^- \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes(\nu-k)}$ par la représentation $\mathcal{D}_{j-1/2} \otimes (\mathcal{D}_0{}^2)^{\otimes(\nu-k)}$ (sauf si $j = 0$, auquel cas $E_{k-1} \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes(\nu-k+1)}$ est espace propre de S_k).

Ceci montre le lemme, et on voit de plus, que si $2j+1$ est valeur propre de S_{k-1} sur un certain sous espace, alors les seules valeurs propres possibles de S_k sur ce sous espace sont $2j$ et $2j+2$, (sauf si $j=0$, auquel cas seul 1 est valeur propre de S_k sur ce sous-espace).

Il est facile maintenant de terminer la preuve du théorème. Soit $(j_1, \dots, j_\nu)$ une suite de demi-entiers tels que $j_1 = 1/2$, et $|j_k - j_{k-1}| = 1/2$ pour tout $k \geq 2$, alors le sous espace propre commun à S_1, $S_2, \dots$, S_ν sur lequel ces opérateurs ont pour valeurs propres respectives $2j_k+1$ est de dimension $2j_\nu+1$ et $\mathbb{P}[S_1 = 2j_1+1, \dots, S_\nu = 2j_\nu+1]$ est égal à la trace de la restriction de $\rho^{\otimes\nu}$ à ce sous espace. Or, d'après l'égalité $\rho^{\otimes\nu} = (pq)^{\nu/2}(p/q)^{1/2X_\nu}$ et la formule i) du §5, on voit que cette trace vaut:

$$(pq)^{\nu/2}((p/q)^{j_\nu} + (p/q)^{j_\nu-1} + \dots + (p/q)^{-j_\nu})$$

$$= (pq)^{\nu/2}(p/q)^{-j_\nu} \frac{(p/q)^{2j_\nu+1}-1}{(p/q)-1}$$

$$= (pq)^{\nu/2-j_\nu} \frac{p^{2j_\nu+1}-q^{2j_\nu+1}}{p-q}$$ et le théorème 1 s'en déduit facilement.

Pour déterminer la loi du processus S dans l'état vide, on va décrire plus précisément le sous espace de $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$ sur lequel X_ν, Y_ν, Z_ν opèrent par la représentation $\mathcal{D}_{\nu/2}$.
Rappelons que le groupe symétrique $\mathfrak{S}_\nu$ opère de façon naturelle sur $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$, et que les éléments invariants par cette action sont appelés éléments symétriques. De plus, X_ν, Y_ν, Z_ν (et donc S_ν) commutent avec l'action de $\mathfrak{S}_\nu$.

Lemme 4: le sous-espace de $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$ formé des éléments symétriques est stable par X_ν, Y_ν, Z_ν qui opèrent dessus par la représentation $\mathcal{D}_{\nu/2}$.

preuve: C'est un résultat classique de théorie des représentations, en fait on peut montrer que le sous espace propre de S_ν correspondant à la valeur propre $\nu+1-2k$ est la somme des sous espaces obtenus au moyen des projecteurs de Young associés au tableau d'Young à 2 lignes de longueurs $\nu-k$ et k (cf[9]).

Théorème 2:
Dans l'état vide, pour tout $k\leq\nu$, $S_k = k+1$ p.s.

preuve: l'état vide est le projecteur orthogonal sur le vecteur symétrique $(e\otimes\ldots\otimes e)$, on voit donc que dans cet état, $S_\nu = \nu+1$ p.s. et le résultat suit, puisque pour chaque k, S_k ne peut prendre que la valeur maximale.

8 Conditionnement quantique:

La notion de projecteur orthogonal correspond en probabilités quantiques à celle d'évènement en probabilités classiques. On a alors, par extension du cas classique, la notion suivante de conditionnement par un "évènement quantique" (i.e. un projecteur orthogonal).

Définition: (cf Meyer [8]) Soient Π un évènement quantique (i.e.un projecteur orthogonal) et ω un état tel que $Tr(\Pi\omega\Pi) \neq 0$, l'état $\frac{\Pi\omega\Pi}{Tr(\Pi\omega\Pi)}$ s'appelle conditionnement quantique de ω par l'évènement quantique Π.

On va utiliser cette notion pour explorer la dépendance des différents processus quantiques introduits plus haut.
Examinons tout d'abord le conditionnement par la trajectoire de (X_k):
Soit $(l_k) = l_1,\ldots,l_\nu$ une trajectoire du processus (X_k).
On notera $\rho^{\otimes\nu}(./(X_k) = (l_k))$ l'état obtenu par conditionnement quantique de l'état $\rho^{\otimes\nu}$ (pour $p\neq1$) par le projecteur orthogonal sur le sous espace propre commun aux (X_k) correspondant aux valeurs propres (l_k) (on

supposera ce sous-espace non trivial, c'est à dire que $|l_{k+1}-l_k| = 1$ pour tout $k \leq \nu-1$).

Théorème 3:
Dans l'état $\rho^{\otimes\nu}(./(X_k) = (l_k))$, chacun des processus (Y_k) et (Z_k) est une marche de Bernoulli symétrique.

preuve:
Montrons le pour Y.
On va calculer $\rho^{\otimes\nu}(e^{i\Sigma\lambda_j y_j}/(X_k) = (l_k))$, et pour cela on remarque que le sous-espace propre considéré est engendré par le vecteur $e_{\varepsilon_1} \otimes \ldots \otimes e_{\varepsilon_\nu}$ où $e_1 = (1,0)$, $e_{-1} = (0,1)$ et $\varepsilon_1 = l_1$, $\varepsilon_2 = l_2-l_1, \ldots, \varepsilon_\nu = l_\nu - l_{\nu-1}$.
La matrice $e^{i\lambda\sigma_y}$ est égale à $\begin{pmatrix} \cos\lambda & i\sin\lambda \\ i\sin\lambda & \cos\lambda \end{pmatrix}$ on a donc, $\langle e^{i\Sigma\lambda_j y_j}(e_{\varepsilon_1} \otimes \ldots \otimes e_{\varepsilon_\nu}), (e_{\varepsilon_1} \otimes \ldots \otimes e_{\varepsilon_\nu})\rangle = \cos\lambda_1 \ldots \cos\lambda_\nu$, ce qui prouve le théorème pour Y, le résultat pour Z s'obtient de façon semblable.

Le théorème 3 exprime donc une propriété d'indépendance des composantes de la marche de Bernoulli quantique, qui rappelle celle des composantes d'un mouvement Brownien (avec drift) dans $\mathbb{R}^3$.

Nous allons maintenant conditionner par la valeur de S_ν.

Théorème 4:
Dans l'état $\rho^{\otimes\nu}(./\ S_\nu = \nu+1-2l\ )$, la loi du processus (X_k) est décrite de la façon suivante:
X_ν prend ses valeurs dans l'ensemble $\{\nu-2l,\ \nu-2l-2, \ldots,\ -\nu+2l\}$,
$P(X_\nu = \nu-2l-2k) = (p/q)^{\nu/2-l-k}(pq)^{-\nu/2}\ \frac{p-q}{p^{\nu+1}-q^{\nu+1}}$ et conditionnellement à $X_\nu = \nu-2m$, (X_k) a la loi d'un pont de Bernoulli, c'est à dire la loi d'une marche de Bernoulli symétrique conditionnée à valoir $\nu-2m$ à l'instant ν.

preuve:
Comme les variables quantiques X_ν et S_ν commutent, la loi du couple (X_ν, S_ν) est bien définie, ainsi que le conditionnement par l'évènement quantique $(X_\nu = \nu-2m,\ S_\nu = \nu+1-2l)$
Calculons en premier lieu la loi conditionnelle de X_ν sachant que $S_\nu = \nu-2l+1$
On sait que le sous espace propre de S_ν de valeur propre $\nu+1-2l$ est une somme

de représentations irréductibles de $sl(2,\mathbb{C})$, de même dimension $\nu+1-2l$, et alors, d'après la formule i) du §5, dans une telle représentation, X_ν a un sous espace propre de dimension 1 pour chaque valeur propre dans l'ensemble $\{\nu-2l, \ \nu-2l+2, \dots, \ -\nu+2l\}$.

En utilisant l'expression $\rho^{\otimes\nu} = (pq)^{\nu/2}(p/q)^{1/2X_\nu}$, on obtient bien la loi conditionnelle de X_ν sachant S_ν.

On a vu que les opérateurs X_ν et S_ν commutent avec l'action des permutations de $\mathfrak{S}_\nu$ sur $(\mathbb{C}^2)^{\otimes\nu}$, donc le projecteur orthogonal ξ correspondant à l'évènement quantique $(X_\nu = \nu-2m, \ S_\nu = \nu+1-2l)$ commute également. Soit $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu)$ une suite de ±1 telle que $\Sigma\varepsilon_j = \nu-2m$, et π le projecteur correspondant à l'évènement $(x_1,\dots,x_\nu) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu)$, alors,

$\rho^{\otimes\nu}((x_1,\dots,x_\nu) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu)/X_\nu = \nu-2m, \ S_\nu = \nu+1-2l) = \dfrac{Tr(\xi\pi)}{Tr(\xi)}$,

mais $Tr(\xi\pi) = Tr(\sigma\xi\pi\sigma^{-1}) = Tr(\xi\sigma\pi\sigma^{-1})$, et $\sigma\pi\sigma^{-1}$ est le projecteur orthogonal correspondant à l'évènement $(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(\nu)}) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\nu)$, donc, dans l'état $\rho^{\otimes\nu}(./X_\nu = \nu-2m, \ S_\nu = \nu+1-2l)$ toutes les trajectoires de (X_k) partant de 0 et arrivant à $\nu-2m$ ont la même probabilité, ce qui prouve le théorème.

Remarquons qu'ici encore, dans l'état totalement symétrique, l'analogie avec le Brownien de dimension trois est frappante, car si (B^1,B^2,B^3) est un tel mouvement Brownien, conditionnellement à $|B_t| = r$, B^1_t suit une loi uniforme sur $[-r,r]$, et $(B^1_s;s\le t)$ est un pont Brownien indépendant de $|B_t|$ conditionnellement à B^1_t.

Pour terminer ce paragraphe, donnons encore un exemple intéressant: le conditionnement du processus S par la valeur de X_ν.

__Théorème 5:__

Dans l'état $\rho^{\otimes\nu}(./ \ X_\nu = k)$ le processus $(S_k)_{0\le k\le\nu}$ suit la loi d'une marche de Bernoulli symétrique conditionnée à ne pas passer en 0 et à être $\ge |k|+1$ à l'instant ν.

__preuve:__

On a vu que les opérateurs $S_1,\dots,S_\nu$ et X_ν commutent, donc le calcul de la loi de S conditionnellement à X_ν est un problème de probabilités classiques. D'après le lemme 1 pour toute suite $(j_1,\dots,j_\nu)$ de demi-entiers ≥ 0 tels que $j_1 = 1/2$, $|j_k - j_{k-1}| = 1/2$ et $2j_\nu \ge |k|$ on a

$\mathbb{P}[S_1 = 2j_1+1,\dots, \ S_\nu \ = \ 2j_\nu+1, \ X_\nu = k] = (pq)^{\nu/2}(p/q)^{k/2}$

On en déduit en particulier que toutes les trajectoires "possibles" du processus S ont la même probabilité conditionnellement à $X_\nu = k$, ce qui démontre le théorème.

9 La marche de Bernoulli quantique comme chaîne de Markov non-commutative sur l'algèbre du groupe SU(2):

Nous allons voir comment interprèter la marche de Bernoulli quantique comme exemple de chaîne de Markov non-commutative, une notion introduite par Accardi, Frigerio et Lewis [1]. En fait nous allons reprendre la discussion figurant au début de Lindsay, Parthasarathy [6].

Tout d'abord on va donner une version algébrique de la notion de variable aléatoire.

Supposons donnés deux espaces mesurables $(E,\mathcal{E})$ et $(\Omega,\mathcal{F})$. A toute variable aléatoire X de Ω dans E correspond un morphisme de $*$-algèbres unitaires de $\mathcal{B}(E)$ dans $\mathcal{B}(\Omega)$ (algèbres des fonctions complexes, mesurables, bornées) donné par:

$$\begin{gathered}\mathcal{B}(E) \to \mathcal{B}(\Omega)\\ f \to f\circ X\end{gathered}$$

Un "analogue quantique" de variable aléatoire, à valeurs dans un espace non-commutatif est donc la donnée d'un morphisme de $*$-algèbres unitaires (non nécessairement commutatives).

Tout opérateur auto-adjoint A sur un espace de Hilbert H définit un morphisme $L^{\infty}(\mathrm{Spec}A) \to \mathcal{B}(H)$

$$f \to f(A)$$

et donc cette notion étend celle de variable aléatoire quantique utilisée jusque là.

L'analogue d'un processus stochastique à temps discret est donc une famille (j_n) de morphismes de $*$-algèbres unitaires $\mathcal{A} \to \mathcal{W}$.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre commutative, et si les $(j_n(f),\ f\in\mathcal{A},\ n\in\mathbb{N})$ commutent, alors on obtient un processus classique.

Nous allons maintenant examiner la notion de chaîne de Markov quantique, en décrivant tout d'abord une construction particulière de chaîne de Markov classique sur un espace d'états E.

On se donne un noyau de transition Q sur l'espace d'états E, un ensemble N de transformations Boréliennes de E, et une loi de Probabilité P sur N, telle que

$$P(f\in N/f(x)\in A) = Q(x,A)$$

pour tout $x\in E$, A Borélien de E.

Soit $\Omega = E\times N^{\mathbb{N}}$ et $\rho = \lambda\otimes P^{\otimes\mathbb{N}}$ où λ est une probabilité sur E.

La suite de variables aléatoires sur Ω définie par:

$$\begin{gathered}X_0(x,\ u_1,\dots) = x\\ X_1(x,\ u_1,\dots) = u_1(x)\\ X_2(x,\ u_1,\dots) = u_2\circ u_1(x)\end{gathered}$$

$$\dots$$
$$X_n(x,\ u_1,\dots) = u_n\circ\dots\circ u_1(x)$$
$$\dots$$

est une chaîne de Markov sur E, de loi initiale λ et de noyau de transition Q.
Traduisons cette constuction en terme de morphismes de *-algèbres:
Soit B_n l'algèbre des fonctions Boréliennes bornées sur $E\times N\times\dots\times N$ où N apparait n fois, on définit la suite de morphismes j_n de $\mathcal{B}(E)$ dans $B_n \subset \mathcal{B}(\Omega)$ par

$$j_0\phi = \phi$$
$$j_n\phi(x,u_1,\dots,u_n) = \phi(u_n\circ u_{n-1}\circ\dots\circ u_1(x)).$$

Alors le quadruplet $(\mathcal{B}(\Omega),(B_n),(j_n),\rho)$ est une chaîne de Markov au sens de Accardi, Frigerio et Lewis [1].
On a alors la formule:

$$E[j_0(\phi_0)j_1(\phi_1)\dots j_n(\phi_n)] = E[\phi_0(X_0)\phi_1(X_1)\dots\phi_n(X_n)] =$$
$$\int\phi_0 Q(\phi_1(Q\dots Q\phi_{n-1}(Q\phi_n))\dots)(x)\ \lambda(dx)$$

Par analogie, on définit une chaîne de Markov quantique par la donnée d'une *-algèbre $\mathcal{A}$ qui joue le rôle d'espace d'état, d'une *-algèbre $\mathcal{N}$ munie d'un état ω qui joue le rôle du "bruit", et d'un morphisme $j : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{N}$ de *-algèbres unitaires.
On définit alors une suite j_n de morphismes de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}\otimes\mathcal{N}^{\otimes n}$ par:

$$j_0 = Id,\ j_1 = j,\ j_{n+1} = (j_n\otimes I)\circ j.$$

On peut identifier $\mathcal{A}\otimes\mathcal{N}^{\otimes n}$ à une sous algèbre de $\mathcal{A}\otimes\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{N}}$ par $x \to x\otimes I\otimes\dots\otimes I\otimes\dots$, et on munit cette dernière algèbre de l'état $\rho = \lambda\otimes\omega^{\otimes\mathbb{N}}$, où λ est un état sur $\mathcal{A}$, dit état initial. Les morphismes j_n peuvent être alors considérés comme étant à valeurs dans $\mathcal{A}\otimes\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{N}}$.
$(\mathcal{A},(B_n),(j_n),\rho)$ est une chaîne de Markov quantique au sens de Accardi, Frigerio et Lewis [1], de loi initiale λ.
Le générateur de la chaîne est donné par

$$Q = (I\otimes\omega)\circ j\ :\ \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

On voit que la donnée de $(\mathcal{A},\mathcal{N},j,\omega)$ suffit à déterminer la chaîne de Markov.
D'autre part, la formule

$$E[j_0(\phi_0)j_1(\phi_1)\dots j_n(\phi_n)] = \lambda(\phi_0 Q(\phi_1(Q\dots Q\phi_{n-1}(Q\phi_n))\dots)$$

est toujours valable, mais si on change l'ordre des termes, $j_0(\phi_0)$, $j_1(\phi_1),\dots,\ j_n(\phi_n)$, on obtient en général un résultat différent.

Nous allons voir comment on peut, à partir d'une chaîne de Markov quantique, fabriquer des processus classiques.

Lemme 3:
Si $\mathcal{L}$ est une sous algèbre abélienne de $\mathcal{A}$ telle que $j: \mathcal{L} \to \mathcal{L}\otimes\mathcal{N}$, alors le processus j, restreint à $\mathcal{L}$ est une chaîne de Markov sur $\mathcal{L}$, de générateur $(I\otimes\omega)\circ j$.
preuve: évident.

Lemme 5:
Soit $\mathcal{C}$ le centre de $\mathcal{A}$, alors, les $(j_n(f),\ f\in\mathcal{C},\ n\in\mathbb{N})$ commutent, et donc la restriction des j_n à $\mathcal{C}$ est un processus classique; si de plus $(I\otimes\omega)\circ j : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, alors cette restriction est une chaîne de Markov classique sur $\mathcal{C}$ de générateur $(I\otimes\omega)\circ j$.

preuve:
Etendons les opérateurs j_n de la manière suivante; on pose $J_n = j_n\otimes\theta_n : \mathcal{A}\otimes\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{N}} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{N}^{\otimes\mathbb{N}}$ où $\theta_n : \mathcal{N}^{\otimes\mathbb{N}} \to \mathcal{N}^{\otimes[n,\infty[}$ est le shift d'ordre n.
On a, si $a\in\mathcal{A}$, $J_n(a\otimes I) = j_n(a)$ et de plus, $J_n = (J_1)^n$.
On en déduit que pour tous $a,\ b \in\mathcal{C}$, $m\le n$,
$J_n(a\otimes I)J_m(b\otimes I) = J_m(J_{n-m}(a\otimes I))J_m(b\otimes I) = J_m(J_{n-m}(a\otimes I)b\otimes I) =$
$J_m(b\otimes IJ_{n-m}(a\otimes I)) = J_m(b\otimes I)J_n(a\otimes I)$, ce qui prouve la première assertion.
La deuxième découle de la formule donnant l'espérance de
$j_0(\phi_0)j_1(\phi_1)\ldots j_n(\phi_n)$.

Soit G un groupe compact. A chaque représentation unitaire de dimension finie de G, on va associer une marche aléatoire sur le dual de G, qui est un "espace non-commutatif". Plus précisément, soit $\mathcal{U}$ l'algèbre de von Neumann du groupe G, c'est à dire la sous algèbre fortement fermée de $\mathcal{B}(L^2(G))$ engendrée par les opérateurs de translation à gauche

$$\tau_g:\ f \to f(g^{-1}.)$$

(cf Dixmier [2]), $\mathcal{U}$ joue le rôle d'"espace L^∞ non-commutatif" sur le dual de G.
Soient ψ une représentation unitaire de G dans un espace de dimension finie E et $\mathcal{N}$ l'algèbre engendrée par les $\psi(g)$, $g\in G$. On définit un morphisme $j: \mathcal{U} \to \mathcal{U}\otimes\mathcal{N}$ par:

$$j(\tau_g) = \tau_g\otimes\psi(g).$$

D'après ce qui précède, on peut à l'aide de ce morphisme j construire une chaîne de Markov quantique sur $\mathcal{U}$, en se donnant des états λ et ω sur $\mathcal{U}$ et $\mathcal{N}$, c'est à dire, des opérateurs à trace positifs de trace 1 sur $L^2(G)$ et E.
Prenons $G=U(1)$, alors, il n'est pas difficile de voir que l'algèbre $\mathcal{U}$ s'identifie avec $l^\infty(\mathbb{Z})$. Si on choisit pour ψ la représentation de dimension

$2 : e^{i\vartheta} \to \begin{bmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{bmatrix}$ et pour ω l'état $\begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}$, on retrouve alors la marche de Bernoulli classique sur $\mathbb{Z}$ de paramètre p.

Plus généralement, si on prend pour G un tore de dimension n, en choisissant convenablement ψ et sur ω, on peut construire de la sorte toutes les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}^n$ dont la loi des accroissements est à support fini.

La marche de Bernoulli quantique que nous avons introduite au début de cet article s'obtient en prenant $G = SU(2)$, $\psi = \mathcal{D}_{1/2}$, et $\omega = \rho$. En effet, chacun des éléments $i\sigma_x, i\sigma_y, i\sigma_z$, de su(2) engendre un sous groupe de SU(2) isomorphe à U(1), et d'après le lemme 3 la restriction à ce sous groupe de la chaîne de Markov quantique (j_n) est une marche de Bernoulli classique, correspondant à la marche de Bernoulli (X_n) (resp. Y_n, Z_n).

Si on applique le lemme 4, avec pour ρ l'état symétrique, on voit que la restriction de (j_n) au centre de l'algèbre $\mathcal{U}$ définit une chaîne de Markov classique ; en effet, il suffit de vérifier que le générateur $Q: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, mais $Q = (I\otimes\omega)\circ j$ et donc $Q(\tau_g) = 1/2\mathrm{tr}(\psi(g))\, \tau_g$. Cela implique que $Q(\tau_h\tau_g\tau_h^{-1}) = \tau_h Q(\tau_g)\tau_h^{-1}$ et par continuité que $Q(\tau_h u \tau_h^{-1}) = \tau_h Q(u)\tau_h^{-1}$ pour tout u dans $\mathcal{U}$. En particulier, si $u\in\mathcal{C}$, $Q(u)\in\mathcal{C}$.

On va voir que la chaîne de Markov classique ainsi construite n'est autre que le processus de spin du §4. D'après Dixmier [2], le centre $\mathcal{C}$ de l'algèbre $\mathcal{U}$ est engendré par les projections orthogonales Π_σ, $\sigma\in\Delta$ où Δ est l'ensemble des classes d'équivalences des représentations irréductibles de G, et Π_σ est le projecteur orthogonal dans $L^2(G)$ sur le sous espace des coefficients matriciels de la représentation σ. De plus, Π_σ est également l'opérateur de convolution par $d_\sigma\chi_\sigma$ où d_σ et χ_σ sont la dimension et le caractère de la représentation σ.

L'algèbre $\mathcal{C}$ s'identifie donc à $l^\infty(\Delta)$ et d'après le §5, Δ s'identifie à $\mathbb{N}^*$ en associant à chaque représentation sa dimension.

L'algèbre M(G) des mesures complexes bornées sur G agissant par convolution sur $L^2(G)$ est une sous algèbre de $\mathcal{U}$ (cf [2]), et on peut décrire l'image par Q d'un élément de M(G):

Lemme 5:

Si $\mu\in M(G)$, $Q(\mu)$ est la mesure $1/2\chi_{\mathcal{D}_{1/2}}(g)\mu(dg)$

preuve:

Cette formule est vraie pour les μ qui sont des combinaisons linéaires finies de masses de Dirac, on en déduit le résultat pour des μ quelconques.

On voit donc que , $Q(\Pi_\sigma)$ est l'opérateur de convolution par $\sigma/2\ \chi_\sigma\chi_{\mathcal{D}_{1/2}}$

(on a identifié la représentation σ à sa dimension), or

$$\chi_\sigma \chi_{\mathcal{D}_{1/2}} = \chi_{\sigma+1} + \chi_{\sigma-1}$$

(c'est encore la formule de Clebsch-Gordon), donc

$Q(\Pi_\sigma) = 1/2(\frac{\sigma}{\sigma+1}\,\Pi_{\sigma+1} + \frac{\sigma}{\sigma-1}\,\Pi_{\sigma-1})$

et la chaîne de Markov a bien le noyau de transition du théorème 1.

Remarque finale: Le fait que les formules de Clebsch-Gordon fournissent les probabilités de transition du "Bessel 3 discret" avait été remarqué par Guivarc'h, Keane et Roynette [4]. Le fait que (S_k) apparaisse comme norme d'un processus de dimension 3 éclaire les résultats de [4], en particulier, la construction que l'on vient de faire montre que les "marches aléatoires sur le dual de SU(2) considérées dans [4] s'obtiennent par restriction au centre à partir des marches aléatoires quantiques construites au §9.

Réferences:

[1] L. Accardi, A. Frigerio, J.T. Lewis: Quantum stochastic processes.
Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 18 p97-133 (1982).

[2] J. Dixmier: Les C^*-algèbres et leurs représentations.
Gauthier-Villars, 1964.

[3] W. Feller: An introduction to Probability theory and its applications
Vol I *Wiley 1966.*

[4] Y. Guivarc'h, M. Keane, B. Roynette: Marches aléatoires
Lect. Notes in Math. Springer 624 (1977).

[5] J.F. Le Gall: Une approche élémentaire des théorèmes de décomposition de Williams. *Séminaire de probabilités* XX *Lect. Notes in Math. Springer 1204 p447-464 (1984/85).*

[6] J.M. Lindsay, K.R. Parthasarathy: The passage from random walk to diffusion in quantum probability II.
Preprint Indian Stat. Inst. New Delhi.

[7] P.A. Meyer: Eléments de Probabilités quantiques.
Séminaire de Probabilités XX, *Lect. Notes in Math. Springer 1204 p186-312 (1984/85)*

[8] P.A. Meyer: Quantum Probabilities.
Preprint Laboratoire de Probabilités, Université Paris 6, (1989).

[9] M. Naimark, A. Stern: Théorie des représentations des groupes.
Editions Mir, Moscou .

[10] J.W. Pitman: One dimensional Brownian Motion and the three-dimensional Bessel process.
Adv. Appl. Probab. 7, p511-526 (1975).