Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Thierry Jeulin

Marc Yor

Filtration des ponts browniens et équations différentielles stochastiques linéaires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 227-265

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__227_0>

FILTRATION DES PONTS BROWNIENS ET EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES LINEAIRES

T. JEULIN[(1)] **et M. YOR**[(2)]

(1) *UFR de Mathématiques, Université Paris 7, Tour 45-55, 5ème étage, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cédex 05.*

(2) *Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie, Tour 56, 3ème étage, 4, Place Jussieu, 75252 Paris Cédex 05.*

Abstract : In this paper, we associate to a one-dimensional Brownian motion $(X_t)_{t\geq 0}$, starting from 0, another Brownian motion :

$$\tilde{X}_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{s} X_s ds \qquad (t \geq 0).$$

We remark that, for every $t > 0$, $\sigma(\tilde{X}_s,\ s \leq t)$ coïncides, up to negligible sets, with the σ-field generated by the Brownian bridge

$$(X_s - \frac{s}{t} X_t,\ s \leq t).$$

We study the ergodic properties of the application : $X \longrightarrow \tilde{X}$, which preserves the Wiener measure. The Laguerre polynomials play an essential role in this study.

More generally, we study the filtration of the process

$$X_t - \int_0^t ds\ \varphi(s)\ X_s \qquad (t \geq 0)$$

for a large class of functions φ, which may have some singularity at 0.

Finally, given a Brownian motion $(B_t)_{t\geq 0}$, we study the properties of all solutions of :

$$X_t = B_t + \int_0^t ds\ \varphi(s)\ X_s \qquad (t \geq 0),$$

thus completing results obtained earlier by Chitashvili-Toronjadze [2].

1. Grossissement et appauvrissement de filtrations.

De façon à mettre en perspective les études faites dans cet article, et certains de nos travaux antérieurs sur les grossissements de filtrations, nous commençons, avant d'entrer dans le vif du sujet, par une brève discussion dans laquelle nous comparons d'une part les grossissements de filtrations, et d'autre part certains appauvrissements d'une filtration.

(1.1) Considérons tout d'abord un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant les conditions habituelles, constituée de sous-tribus de $\mathcal{F}$.

Une façon générale de construire des surfiltrations de $(\mathcal{F}_t)$ consiste à rendre adapté un processus $(H_t)_{t\geq 0}$, qui n'est pas $(\mathcal{F}_t)$ adapté ; on définit ainsi $(\mathcal{F}^H_t)_{t\geq 0}$ comme la plus petite filtration rendant adapté $(H_t)_{t\geq 0}$ et contenant $(\mathcal{F}_t)$ (Attention ; cette notation n'est pas habituelle ; elle ne désigne pas, dans ce travail, la filtration engendrée par H).

Bien entendu, $(\mathcal{F}^H_t)_{t\geq 0}$ est une surfiltration stricte de $(\mathcal{F}_t)$ (i.e. il existe t tel que $\mathcal{F}_t \neq \mathcal{F}^H_t$) dès que $(H_t)_{t\geq 0}$ n'est pas $(\mathcal{F}_t)$ adapté.

La question intéressante, étudiée en particulier dans la monographie de Jeulin [8] et en [10], consiste alors à savoir si l'on n'a pas ajouté "trop" d'informations à $(\mathcal{F}_t)$, ce que l'on a traduit, de façon mathématique, jusqu'à présent, par : il existe une classe importante de $(\mathcal{F}_t)$-martingales qui sont des $(\mathcal{F}^H_t)$-semimartingales (un exemple est étudié en détail en [9]).

(1.2) Par contre, il n'est pas si facile de définir de façon naturelle une sous-filtration stricte de $(\mathcal{F}_t)$, en ôtant de l'information au cours du temps. Un procédé qui, à première vue, semble prometteur, car très lié à la notion de martingale, est le suivant :
soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une $(\mathcal{F}_t)$-martingale telle que, pour tout t, $\mathbb{E}[M_t^2] < +\infty$; dénotons par $\mathcal{G}_t$ la sous-tribu de $\mathcal{F}_t$ engendrée par les variables $X \in L^2(\mathcal{F}_t)$ orthogonales à la variable M_t ; $(M_t)_{t\geq 0}$ étant une martingale, il est immédiat que $\mathcal{G}_t$ croit avec t ; cependant, dans la plupart des cas, on a : $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$, pour tout t.

Pour fixer les idées, on suppose dorénavant que $(\mathcal{F}_t)$ est la filtration naturelle du mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, issu de 0. Posons $M_t = B_t$, et dénotons par $(\mathcal{F}^{orth}_t)$ la filtration $(\mathcal{G}_t)$ que nous venons de définir. Nous allons montrer que $\mathcal{F}^{orth}_t = \mathcal{F}_t$, pour tout t. En effet, définissons une troisième filtration $(\mathcal{F}^{ind}_t)$, a priori encore plus pauvre que $(\mathcal{F}^{orth}_t)$, de la façon suivante :

$$\mathcal{F}^{ind}_t = \sigma\{X \in L^2(\mathcal{F}_t) \mid X \text{ est } \underline{\text{indépendante}} \text{ de la variable } B_t\}.$$

Il découle immédiatement du Lemme 1 ci-dessous que la double inclusion :

$$(1.a) \qquad \mathcal{F}^{ind}_t \subseteq \mathcal{F}^{orth}_t \subseteq \mathcal{F}_t$$

est en fait une double égalité :

$$(1.b) \qquad \mathcal{F}^{ind}_t = \mathcal{F}^{orth}_t = \mathcal{F}_t.$$

Lemme 1 : *Soit, sur un espace de probabilité* $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, *un espace gaussien* Γ, *de dimension supérieure ou égale à 2, et* $\mathcal{G}$ *la tribu engendrée par* Γ. *Soit* X *une variable de* Γ, *non nulle. Désignons par* $\mathcal{G}^X$ *la sous tribu de* $\mathcal{G}$ *engendrée par les variables gaussiennes* $\mathcal{G}$*-mesurables (mais n'appartenant pas nécessairement à l'espace gaussien* Γ*), indépendantes de* X. *Alors* $\mathcal{G}^X = \mathcal{G}$.

Démonstration : soit Y une variable gaussienne générique, non nulle, de l'orthogonal dans Γ de l'espace gaussien unidimensionnel engendré par X. Remarquons que, pour $a \in \mathbb{R}$, la variable $Z = \varepsilon_a Y$, où $\varepsilon_a = 1_{\{X\ge a\}} - 1_{\{X<a\}}$ est une variable gaussienne, $\mathcal{G}$-mesurable, indépendante de X. En conséquence, Z est $\mathcal{G}^X$-mesurable ; il en est évidemment de même de Y, et $\varepsilon_a = Z/Y$ est $\mathcal{G}^X$-mesurable. L'ensemble $\{X \ge a\} = \{\varepsilon_a = 1\}$ est $\mathcal{G}^X$-mesurable et X est $\mathcal{G}^X$-mesurable ; finalement, toute variable de Γ est $\mathcal{G}^X$-mesurable. Il en découle $\mathcal{G}^X = \mathcal{G}$. □

Le lemme 1 s'applique dans le cadre qui nous intéresse, pour fournir une démonstration de *(1.b)* ; il suffit de prendre pour X la variable B_t et pour Γ l'espace gaussien engendré par $(B_s)_{s\le t}$.

Comme l'énoncé du Lemme 1 et sa démonstration peuvent le laisser pressentir, on est maintenant amené à définir, pour tout $t \ge 0$, la tribu $\mathcal{F}_t^{\mathrm{Gauss}}$, engendrée par les variables de l'espace gaussien

$$\Gamma_t \equiv \left\{\int_0^t f(u)dB_u \mid f \in L^2([0,t],du)\right\}$$

qui sont orthogonales à la variable B_t (et donc indépendantes de cette variable) ; ainsi :

$$\mathcal{F}_t^{\mathrm{Gauss}} = \sigma\left\{\int_0^t f(u)dB_u \mid f \in L^2([0,t],du) \quad \text{et} \quad \int_0^t f(u)du = 0\right\}.$$

Le paragraphe 2 ci-dessous est consacré à l'étude de cette filtration, dont nous justifierons l'appellation de : filtration des ponts browniens.

Plus généralement, $(\mathcal{F}_t)$ désignant toujours la filtration du mouvement brownien réel, on peut associer à toute famille $F = (f_i)_{i\in I}$ de fonctions de $L^2_{loc}(\mathbb{R}_+,du)$ une sous-filtration stricte de $(\mathcal{F}_t)$, au moyen de la définition :

$$\mathcal{F}_t^{F,\mathrm{Gauss}} = \sigma\left\{\int_0^t f(u)dB_u \mid f \in L^2([0,t],du) \ ; \ \int_0^t f(u)f_i(u)du = 0,\ \forall i \in I\right\}.$$

Nous verrons, dans le paragraphe 3, de tels exemples de sous-filtrations.

(1.3) Pour conclure cette discussion, indiquons, de façon analogue à ce que l'on a fait à la fin du sous-paragraphe **(1.1)**, quelques problèmes importants qui se posent dans l'étude d'une sous-filtration $(\mathcal{G}_t)$ d'une filtration donnée $(\mathcal{F}_t)$. Tout d'abord, quelle est la structure des martingales de $(\mathcal{G}_t)$? Par exemple : toutes les $(\mathcal{G}_t)$-martingales sont-elles des intégrales stochastiques par rapport à un mouvement brownien ? Ensuite, y-a-t-il suffisamment de $(\mathcal{G}_t)$-martingales qui sont des $(\mathcal{F}_t)$-semimartingales ? (Cette question nous ramène en fait à considérer $(\mathcal{F}_t)$ comme un grossissement de la filtration $(\mathcal{G}_t)$). Enfin, si $(X_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-semi-martingale, adaptée à $(\mathcal{G}_t)$, quelle est sa décomposition canonique dans la filtration $(\mathcal{G}_t)$?

Ce dernier problème a été étudié extensivement dans le cadre de la théorie du filtrage, mais, mis à part cette théorie, il n'existe pas, à notre connaissance, d'étude systématique de l'appauvrissement d'une filtration.

Les résultats qui suivent constituent un exemple simple d'une telle étude, comparable, à plus d'un titre, à l'étude des grossissements gaussiens de la filtration brownienne ([1], [9]).

2. Quelques propriétés de la filtration des ponts browniens.

(2.1) Dans ce paragraphe, nous noterons simplement $(\mathcal{G}_t)$ la filtration $(\mathcal{F}_t^{\text{Gauss}})$ définie en **(1.2)**, et Γ'_t l'espace gaussien qui engendre la tribu $\mathcal{G}_t$, à savoir :

$$\Gamma'_t = \left\{\int_0^t f(u)dB_u \mid f \in L^2([0,t],du) \quad \text{et} \quad \int_0^t f(u)du = 0\right\}.$$

Plus généralement, si G est un sous-ensemble de l'espace gaussien du mouvement brownien B, nous noterons $\Gamma(G)$ l'espace gaussien engendré par G. Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante qui nous permet, entre autres choses, d'appeler $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ la filtration des ponts browniens.

Proposition 2 : *1) Pour tout* $t > 0$, *on a :*

(2.a) $$\Gamma'_t = \Gamma(B_s - \tfrac{s}{t} B_t,\ s \leq t)$$

$\mathcal{G}_t$ *est donc la tribu engendrée par le pont brownien* $(B_s - \frac{s}{t} B_t)_{s\leq t}$ *de durée* t.

2) Définissons $(\gamma_s^{(t)})_{s\leq t}$ *par la formule :*

(2.b) $$\gamma_s^{(t)} = B_s - \int_0^s du \, \frac{B_t - B_u}{t - u} .$$

$(\gamma_s^{(t)})_{s\leq t}$ *est un mouvement brownien indépendant de la variable* B_t. *De plus :*

(2.c) $$\Gamma'_t = \Gamma(\gamma_s^{(t)} \ ;\ s \leq t).$$

3) Le processus

(2.d) $$\beta_t = B_t - \int_0^t \frac{1}{s} B_s \, ds \qquad (t \geq 0)$$

est un mouvement brownien, et on a :

(2.e) $\Gamma'_t = \Gamma(\beta_s,\ s \le t)$.

En conséquence, $(\mathcal{G}_t)$ *est la filtration naturelle du mouvement brownien* β.

Démonstration :

1) Remarquons tout d'abord que les processus $(\gamma_s^{(t)})_{s\le t}$ et $(\beta_s)_{s\ge 0}$ définis par les formules *(2.b)* et *(2.d)* sont des mouvements browniens. On peut voir ce résultat de façon élémentaire en montrant que la covariance de chacun de ces processus gaussiens est bien :

$$\mathbb{E}[\beta_s\beta_u] = \inf(s,u) \qquad\qquad (s,u \ge 0).$$

De façon un peu plus approfondie, remarquons que la formule *(2.b)* n'est autre que la formule de décomposition de la semimartingale $(B_s)_{s\le t}$ dans la filtration $(\mathcal{F}_s \vee \sigma(B_t))_{s\le t}$ (voir, par exemple, Jeulin-Yor [9]), ce qui donne une autre démonstration du caractère brownien de $\gamma^{(t)}$.

2) Remarquons ensuite que les espaces gaussiens qui figurent dans les membres de droite de *(2.a)*, *(2.c)* et *(2.e)* sont contenus dans Γ'_t, car chacune des variables X qui engendrent ces espaces gaussiens est orthogonale à B_t.

3) Il reste à montrer les inclusions inverses.

- Remarquons tout d'abord que

$$\Gamma'_t = \Gamma\left(\left(\int_0^t f(u)dB_u - \frac{1}{t}\left(\int_0^t f(u)\,du\right) B_t \right|\ f \in C^1[0,t]\right).$$

Or, si $f \in C^1[0,t]$, on a :

$$\int_0^t f(u)dB_u - \frac{1}{t}\left(\int_0^t f(u)du\right) B_t = -\int_0^t f'(u)(B_u - \frac{u}{t} B_t)du,$$

par intégration par parties, ce qui prouve *(2.a)*.

- On déduit finalement des deux identités suivantes :

(2.f) $$\gamma_s^{(t)} = (B_s - \frac{s}{t} B_s) + \int_0^s \frac{1}{t-u} (B_u - \frac{u}{t} B_t)\ du \qquad (s \le t)$$

(2.g) $$\beta_s = (B_s - \frac{s}{t} B_s) - \int_0^s \frac{1}{u} (B_u - \frac{u}{t} B_t)\ du \qquad (s \le t)$$

les égalités *(2.c)* et *(2.e)* entre espaces gaussiens. □

Nous faisons maintenant quelques commentaires importants relatifs à la proposition 2.

(i) On peut considérer la formule de définition *(2.d)* de β en termes de B comme une équation stochastique linéaire :

(2.d) $$B_t = \beta_t + \int_0^t \frac{1}{s} B_s \, ds$$

où β est le mouvement brownien donné et B le processus inconnu. Nous étudions, de façon beaucoup plus générale, dans le paragraphe 4, les équations :

$$X_t = \beta_t + \int_0^t ds\, \varphi(s)\, X_s,$$

la fonction φ présentant une singularité en 0 .

(ii) Il est immédiat, à partir de (2.d), que l'on a, pour $0 < \varepsilon < t$:

(2.h) $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_\varepsilon \vee \mathcal{G}_t$, aux ensembles négligeables près.

De plus, $\mathcal{F}_{0+} = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_\varepsilon$ est $\mathbb{P}$-triviale, et néanmoins, on ne peut pas déduire de (2.h) l'égalité des tribus $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_t$; en fait, d'après la Proposition 2, on sait précisément que : $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \sigma(B_t)$, avec B_t indépendante de $\mathcal{G}_t$.
Une caractérisation générale des situations dans lesquelles on peut déduire de (2.h) l'égalité : (2.h') $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{0+} \vee \mathcal{G}_t$ a été faite par H. von Weizsäcker [14].
Ainsi, la situation dont nous nous occupons ici constitue un exemple supplémentaire montrant que (2.h') ne découle pas nécessairement de (2.h).

Remarquons par contre que l'on a :

(2.i) $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{G}_\infty$.

En effet, toujours à partir de la formule (2.d), on déduit de la formule d'Itô que :

$$\frac{1}{t} B_t = \frac{1}{s} B_s + \int_s^t \frac{d\beta_u}{u} \qquad (0 < s \leq t),$$

et, en conséquence :

$$\frac{1}{s} B_s = - \int_s^\infty \frac{d\beta_u}{u}, \text{ ce qui implique (2.i).}$$

(iii) Nous aurions pu donner une démonstration plus rapide des points (2.a), (2.c) et (2.e) de la Proposition 2 en montrant directement que le membre de droite de chacune de ces égalités admet l'espace unidimensionnel $\Gamma(B_t)$ pour orthogonal dans $\Gamma_t \equiv \Gamma(B_s, s \leq t)$. Nous utiliserons cette méthode en (2.3) ci-dessous, pour exhiber d'autres processus gaussiens $(X_s)_{s\geq 0}$ tels que $\Gamma_t = \Gamma(X_s, s \leq t)$, pour tout $t > 0$.

(iv) Le mouvement brownien β, défini à partir de B au moyen de la formule (2.d) joue un rôle important dans le travail de P.Deheuvels [3] qui montre en particulier que les seules fonctions boréliennes $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$\int_0^t |\varphi(s)|\ \sqrt{s}\ ds < \infty$ pour tout t, et que :

$$\beta_t^{\varphi} \overset{\text{déf}}{=} B_t - \int_0^t \varphi(s)\ B_s\ ds$$

soit un mouvement brownien sont : $\varphi(s) = 0$ ou $\varphi(s) = \frac{1}{s}$ ds p.s.

(v) Quant à nous, nous sommes parvenus à la formule *(2.d)* par retournement du temps à partir de la formule *(2.b)* :

de façon précise, soit a > 0 fixé ; considérons le processus $\hat{B}_u = B_a - B_{a-u}$ $(u \le a)$, et remarquons que $\hat{B}_a = B_a$; considérons ensuite la filtration naturelle de $(\hat{B}_u)_{u\le a}$, grossie avec la variable B_a ; d'après *(2.d)*, il existe un mouvement brownien $(\hat{\gamma}_t^a)_{t\le a}$ tel que :

$$\hat{B}_t = \hat{\gamma}_t^a + \int_0^t ds\ \frac{\hat{B}_a - \hat{B}_s}{a - s}$$

et, en retournant à nouveau au temps a les deux membres de l'équation ci-dessus, il vient :

$$B_t = \beta_t + \int_0^t \frac{1}{u}\ B_u\ du$$

où l'on a posé $\beta_t = \hat{\gamma}_a^a - \hat{\gamma}_{a-t}^a$ pour $t \le a$.

Il est alors évident, une fois ces remarques faites, que $(\beta_t)_{t\ge 0}$ est un mouvement brownien, et que, pour tout a > 0, $(\beta_t)_{t\le a}$ est indépendant de B_a.

(2.2) Etude de quelques propriétés ergodiques.

La troisième partie de la Proposition 2 fait apparaître une transformation T qui laisse invariante la mesure de Wiener $\mathbb{W}$, à savoir :

$$T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{s}\ X_s\ ds \qquad (t \ge 0)$$

où nous avons noté $(X_t)_{t\ge 0}$ le processus des coordonnées sur l'espace canonique $\Omega^* = C([0,\infty[,\mathbb{R})$. Nous noterons encore $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s,\ s \le t)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.

Il est naturel de se demander si la transformation T est ergodique ; nous verrons ci-dessous que la réponse à cette question est affirmative, et, en fait, que du point de vue de la théorie ergodique, T possède d'excellentes propriétés.

Proposition 3 : *Pour tout* t > 0, *la tribu* $\bigcap_n (T^n)^{-1}(\mathcal{F}_t)$ *est* $\mathbb{W}$*-triviale.*

Cependant, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *:*

(2.j) $$(T^n)^{-1}(\mathcal{F}_\infty) = \mathcal{F}_\infty, \qquad W\text{-p.s.}$$

Autrement dit, dans le langage de la théorie ergodique, pour tout $t > 0$, T considérée comme une transformation sur $(\Omega^*, \mathcal{F}_t, W)$, est un K-automorphisme (voir, par exemple, [13]).

Corollaire 4 : *La transformation* T *sur* $(\Omega^*, \mathcal{F}_\infty, W)$ *est fortement mélangeante et donc, a fortiori, ergodique.*

Démonstration :
il est tout à fait classique que, pour que T soit fortement mélangeante, il suffit que : pour toutes f, g appartenant à un sous-espace vectoriel $\mathcal{H}$ dense dans $L^2(\Omega^*, \mathcal{F}, W)$,

(2.k) $$\mathbb{E}[f(g \cdot T^n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}(f)\,\mathbb{E}(g).$$

Or, il découle de la Proposition 3 que la propriété *(2.k)* est satisfaite avec $\mathcal{H} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} L^2(\Omega^*, \mathcal{F}_p, W)$. □

La démonstration de la Proposition 3 découlera de la représentation *(2.m)* ci-dessous du mouvement brownien standard à l'aide des polynômes de Laguerre, dont nous rappelons tout d'abord la définition et une caractérisation :
la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Laguerre

(2.ℓ) $$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{k!}(-x)^k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

est la suite des polynômes orthonormaux pour la mesure $e^{-x}dx$ sur $\mathbb{R}_+$ (voir, par exemple, Lebedev [12], p.76-90).

Théorème 5 : *Soit* $(X_t)_{0\le t\le 1}$ *un mouvement brownien réel issu de* 0.
Posons $G_n = T^n(X)_1$, *où* $T(X)_t = X_t - \int_0^t \frac{1}{s} X_s\, ds$.
On a alors : $G_n = \int_0^1 dX_s\, L_n(\log \frac{1}{s})$;
$(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de variables gaussiennes, centrées, réduites ; de plus :*

(2.m) $$X_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\log \tfrac{1}{t})\, G_n, \qquad t \le 1,$$

où $$\lambda_n(a) = \int_0^a dx\, e^{-x} L_n(x).$$

Démonstration du Théorème :
1) Itérons la transformation T. Il vient :

$$T^2(X)_t = T(X)_t - \int_0^t \frac{1}{u} T(X)_u \, du$$

$$= X_t - 2\int_0^t \frac{1}{u} X_u \, du + \int_0^t \frac{1}{u} du \int_0^u \frac{1}{s} X_s \, ds \ ;$$

$$T^3(X)_t = T^2(X)_t - \int_0^t \frac{1}{u} du \, T^2(X)_u$$

$$= X_t - 3\int_0^t \frac{1}{u} du \, X_u + 3\int_0^t \frac{1}{u} du \int_0^u \frac{1}{s} ds \, X_s - \int_0^t \frac{1}{u} du \int_0^u \frac{1}{s} ds \int_0^s \frac{1}{v} dv \, X_v,$$

et, par itération, on obtient, pour tout n :

$$T^n(X)_t = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \int_0^t \frac{du_1}{u_1} \cdots \int_0^{u_{k-1}} \frac{du_k}{u_k} X_{u_k} .$$

En écrivant maintenant : $X_{u_k} = \int_0^{u_k} dX_s$, il vient :

$$\int_0^t \frac{du_1}{u_1} \cdots \int_0^{u_{k-1}} \frac{du_k}{u_k} X_{u_k} = \int_0^t dX_s \frac{1}{k!} (\log t - \log s)^k,$$

d'où l'on déduit :

$$(2,n) \qquad T^n(X)_t = \int_0^t dX_s \, L_n(\log \frac{t}{s}),$$

en utilisant la formule *(2.ℓ)*. On en déduit en particulier la représentation de G_n qui figure dans l'énoncé du Théorème.

2) L'identité : $E[G_n G_n] = \delta_{nm}$ apparaît maintenant comme une conséquence du caractère orthonormal de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-x}\, dx)$. En effet, on a, d'après 1) :

$$E[G_n G_m] = \int_0^1 ds \, L_n(\log \frac{1}{s}) \, L_m(\log \frac{1}{s})$$

$$= \int_0^\infty dx \, e^{-x} L_n(x) \, L_m(x) = \delta_{nm}.$$

3) Plus généralement, l'application

$$(f(x), x > 0) \longrightarrow (f(\log \frac{1}{s}), 0 < s < 1)$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert entre $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-x}dx)$ et $L^2([0,1], ds)$. En conséquence, la suite des fonctions de s : $(L_n(\log \frac{1}{s}),\ 0 < s < 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1], ds)$, et le développement *(2.m)* de $(X_t)_{t\le 1}$ le long de la suite des variables $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ramène à celui de $1_{[0,t]}(s)$ dans la base $(L_n(\log \frac{1}{s}))_{n\in\mathbb{N}}$. □

Démonstration de la Proposition 3 :

Quitte à ramener l'intervalle [0,t] à [0,1] par scaling, il suffit de prouver que la tribu $\Phi \equiv \bigcap_n (T^n)^{-1}(\mathcal{F}_1)$ est W-triviale.

En travaillant dans l'espace gaussien engendré par $(X_t)_{t\le 1}$, on voit que la tribu $(T^n)^{-1}(\mathcal{F}_1)$ est indépendante du vecteur $(G_o,G_1,\dots,G_{n-1})$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient l'indépendance de Φ et de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$; ainsi, d'après le Théorème 5, Φ est indépendante de $(X_t)_{t\le 1}$, c'est-à-dire de $\mathcal{F}_1$.

En conséquence, Φ est W-triviale. □

Remarque : En fait, le Théorème 5 montre que la transformation T agit comme un shift sur la suite des variables gaussiennes indépendantes réduites $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On s'est donc ramené ainsi à un schéma de Bernoulli. □

A la suite du Théorème 5, et en particulier de la formule *(2.n)*, nous avons obtenu la caractérisation ci-dessous des filtrations browniennes :

$$\mathcal{G}_t^{(n)} \equiv \sigma\{T^n(X)_s,\ s \le t\},$$

où X désigne toujours maintenant un mouvement brownien réel, issu de 0.

En utilisant la notations $\mathcal{F}_t^{F_n,\mathrm{Gauss}}$, introduite en *(1.c)* ci-dessus, nous pouvons énoncer la

Proposition 6 : *Soit* n *un entier non nul. On a :*

$$\mathcal{G}_t^{(n)} = \mathcal{F}_t^{F_n,\mathrm{Gauss}},\ \textit{pour tout}\ t \ge 0,$$

où $F_n = \{(\log s)^k\ ;\ 0 \le k \le n-1\}$.

La démonstration de cette proposition est immédiate, par un argument de récurrence, à partir de la formule *(2.n)*.

(2.3) D'autres processus générateurs de la filtration. $(\mathcal{G}_t \equiv \mathcal{F}_t^{\mathrm{Gauss}},\ t \ge 0)$.

Nous reprenons la notation $(B_t)_{t\ge 0}$ pour désigner le mouvement brownien réel issu de 0. Nous nous proposons ici de montrer que certains processus de la forme :

$$Y_t^{\varphi} = B_t - \int_0^t du \int_0^u \varphi(u,s)dB_s \qquad (t \geq 0),$$

où $\varphi : (u,s) \longrightarrow \varphi(u,s)$ est borélienne sur $\Delta = \{(u,s) \in \mathbb{R}_+^2 | \ u \geq s\}$ et vérifie

$$\int_0^t du \left(\int_0^u \varphi^2(u,s) \ ds\right)^{1/2} < +\infty \qquad \text{pour tout } t$$

admettent $(\mathcal{G}_t)$ pour filtration naturelle.

Avant de donner des exemples précis de tels processus, nous faisons la remarque générale suivante :

Lemme 7 : *Soit φ fonction satisfaisant les hypothèses ci-dessus. Alors Y^{φ} admet $(\mathcal{G}_t)$ pour filtration naturelle si, et seulement si :*

(2.o) *pour tout $t > 0$, les seules fonctions $h \in L^2([0,t])$ telles que*

$$h(u) = \int_0^u ds \ \varphi(u,s)h(s) \qquad du \ p.s.$$

sont les fonctions constantes.

Démonstration :

Par définition de $(\mathcal{G}_t)$, Y^{φ} admet $(\mathcal{G}_t)$ pour filtration naturelle si, et seulement si, pour tout t, l'orthogonal de $\Gamma(Y_s^{\varphi}, \ s \leq t)$ dans $\Gamma_t \equiv \Gamma(B_s, \ s \leq t)$ est $\Gamma(B_t)$, ce que traduit la condition *(2.o)*. □

Nous pouvons maintenant donner les exemples suivants de processus générateurs de la filtration $(\mathcal{G}_t)$.

Proposition 8 :

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction absolument continue sur $]0,\infty[$, satisfaisant à :

(2.p) $\quad f(0) = 0$ et pour $t \neq 0$, $f(t) \neq 0$, $\displaystyle\int_0^t \frac{du}{|f(u)|} \left(\int_0^u f'^2(s) \ ds\right)^{1/2} < \infty.$

Alors, le processus :

(2.q) $$Y_t^{(f)} \equiv B_t - \int_0^t \frac{du}{f(u)} \left(\int_0^u f'(s)dB_s\right)$$

admet $(\mathcal{G}_t)$ pour filtration naturelle.

De plus, en utilisant la notation (2.d), on a les formules :

(2.r) $$Y_t^{(f)} = \beta_t + \int_0^t du \left(\frac{1}{u} B_u - \frac{1}{f(u)} \int_0^u f'(s)dB_s\right)$$

(2.r') $$= \beta_t + \int_0^t \frac{du}{f(u)} \int_0^u \left(\frac{f(s)}{s} - f'(s)\right) d\beta_s.$$

Remarque : On notera que les formules *(2.q)* et *(2.r')* sont très semblables. Cependant, en termes de transformation du mouvement brownien, le processus

$Y^{(f)}$ a une filtration strictement plus petite que celle de B, précisément, la filtration naturelle du mouvement brownien β qui figure en *(2.r')*.

Démonstration de la Proposition 8 :

1) Il s'agit tout d'abord de vérifier que le noyau $\varphi(u,s) = \frac{f'(s)}{f(u)}$ satisfait bien la condition *(2.o)*. Or si $h \in L^2([0,t])$ satisfait :

$$(2.s) \qquad h(u)f(u) = \int_0^u f'(s)h(s)\, ds$$

cela implique tout d'abord que h f est absolument continue, et donc que h est absolument continue sur $]0,\infty[$, et finalement, par intégration par parties à partir de *(2.s)*, que : $h'(u) = 0$ du p.s. ; h est donc constante. La condition *(2.o)* est bien satisfaite.

2) La formule *(2.r)* découle immédiatement de *(2.q)*, par définition de β. Pour obtenir *(2.r')*, il nous reste à montrer la formule :

$$\frac{1}{u} B_u - \frac{1}{f(u)} \int_0^u f'(s)dB_s = \frac{1}{f(u)} \int_0^u \left(\frac{f(s)}{s} - f'(s)\right) d\beta_s ,$$

laquelle découle de l'identité :

$$(2.t) \qquad \int_0^u h(s)dB_s = \int_0^u \left(h(s) - \frac{1}{s}\int_0^s h(v)\, dv\right) d\beta_s ,$$

valable pour toute fonction $h \in L^2([0,u])$ telle que : $\int_0^u h(s)\, ds = 0$.

On peut démontrer la formule *(2.t)* en s'appuyant directement sur la formule *(2.d)* qui définit β, ou bien en se référant à la formule plus générale *(3.n)* ci-dessous. □

3. Quelques autres exemples de sous-filtrations gaussiennes de la filtration brownienne.

(3.1) A la suite des paragraphes 1 et 2, il nous a semblé naturel d'étudier la filtration engendrée par un processus gaussien de la forme :

$$\beta_t^{\varphi} = B_t - \int_0^t ds\, \varphi(s)\, B_s \qquad (t \geq 0)$$

où $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne telle que :

$$(3.a) \qquad \text{pour tout } t > 0,\ \int_0^t ds\, |\varphi(s)|\sqrt{s} < \infty.$$

Nous nous proposons d'étudier, pour ce processus β^{φ}, les questions suivantes :

a) La transformation qui fait passer de B à β^{φ} donne-t-elle lieu à une perte d'information en temps fini ? jusqu'en l'infini ?

De façon précise, si nous notons $\mathcal{F}_t^{\varphi} = \sigma\{\beta_s^{\varphi}, \ s \le t\}$, a-t-on :

$$\mathcal{F}_t^{\varphi} \neq \mathcal{F}_t \text{ pour t fini ?} \qquad \mathcal{F}_{\infty}^{\varphi} \neq \mathcal{F}_{\infty} \text{ ?}$$

b) Dans le cas intéressant où il y a perte d'information en temps fini, la filtration $(\mathcal{F}_t^{\varphi})_{t\ge 0}$ est une sous-filtration stricte de $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$; le processus β^{φ}, qui est une $(\mathcal{F}_t)$-semi-martingale, est également une $(\mathcal{F}_t^{\varphi})$-semimartingale qui se décompose, dans la filtration $(\mathcal{F}_t^{\varphi})$, en la somme d'un mouvement brownien $(\gamma_t^{\varphi})_{t\ge 0}$ et d'un processus continu à variation bornée ; on explicitera cette décomposition.

La filtration naturelle de (γ_t^{φ}), soit : $(\mathcal{G}_t^{\varphi} = \sigma\{\gamma_s^{\varphi}, \ s \le t\})_{t\ge 0}$ est-elle identique à $(\mathcal{F}_t^{\varphi})_{t\ge 0}$?

La filtration $(\mathcal{F}_t^{\varphi})$ est-elle une filtration $(\mathcal{F}_t^{f,\text{Gauss}})$ (rappelons que ces filtrations gaussiennes ont été définies à la fin du sous-paragraphe (1.2)) ? Dans l'affirmative, quelle est la relation entre φ et f ?

c) La transformation T^{φ} définie par :

$$T^{\varphi}(B)_t = \gamma_t^{\varphi} \qquad\qquad (t \ge 0)$$

est-elle ergodique ?

d) Le mouvement brownien γ^{φ} peut-il être obtenu à partir de B par la succession d'une opération de retournement, puis de grossissement, puis de retournement, ainsi que cela est expliqué dans le Commentaire (v) suivant la Proposition 2, pour $\varphi(s) = \frac{1}{s}$?

Nous avons rassemblé, dans le théorème suivant, un exemple particulièrement intéressant de notre étude, qui nous servira de point de repère dans notre discussion générale, ci-dessous, des points a), b), c) et d).

Théorème 9 : *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On note :*

$$\beta_t^{(\lambda)} = B_t - \lambda \int_0^t \frac{1}{s} B_s \, ds \qquad (t \ge 0).$$

(C'est le processus β^{φ} associé à $\varphi(s) = \frac{\lambda}{s}$).

1) La filtration $\mathcal{F}_t^{(\lambda)} = \sigma\{\beta_s^{(\lambda)}, \ s \le t\}$ *est une sous-filtration stricte de* $(\mathcal{F}_t)$ *si, et seulement si,* $\lambda > \frac{1}{2}$.

Dans ce cas, on a : $\quad \mathcal{F}_t^{(\lambda)} = \mathcal{F}_t^{f_\lambda,\text{Gauss}}$, *où* $f_\lambda(t) = \lambda\, t^{\lambda-1}$.

2) On suppose dorénavant $\lambda > \frac{1}{2}$.

La décomposition canonique de $\beta^{(\lambda)}$ *dans sa filtration propre* $(\mathcal{F}_t^{(\lambda)})$ *est :*

$$\beta_t^{(\lambda)} = \gamma_t^{(\lambda)} - (1-\lambda)\int_0^t \frac{1}{s}\,\gamma_s^{(\lambda)}\,ds .$$

3) Les processus B, $\beta^{(\lambda)}$ *et* $\gamma^{(\lambda)}$ *satisfont les relations suivantes :*

$$(3.b)\qquad d\left(\frac{B_t}{t^\lambda}\right) = \frac{d\beta_t^{(\lambda)}}{t^\lambda}\ ;\qquad\qquad (3.c)\qquad d\left(\frac{\gamma_t^{(\lambda)}}{t^{1-\lambda}}\right) = \frac{d\beta_t^{(\lambda)}}{t^{1-\lambda}}\ ;$$

$$(3.d)\qquad t^\lambda\, d\left(\frac{B_t}{t^\lambda}\right) = t^{1-\lambda}\, d\left(\frac{\gamma_t^{(\lambda)}}{t^{1-\lambda}}\right).$$

4) La transformation $T^{(\lambda)}$ *définie par :* $T^{(\lambda)}(B)_t = \gamma_t^{(\lambda)}$ $\qquad (t \ge 0)$ *est fortement mélangeante.*

5) Soit $a > 0$. *On note :* $\hat{B}_t = B_a - B_{a-t}$ $(t \le a)$. *Le mouvement brownien* $(\gamma_t^{(\lambda)})_{t\le a}$ *peut être obtenu à partir de* $(\hat{B}_t)_{t\le a}$ *au moyen de la succession de l'opération de grossissement avec la variable* $\int_0^a d\hat{B}_u\,(a-u)^{\lambda-1}$, *puis du retournement du temps au temps* a.

(3.2) Nous abordons maintenant les différents points de l'étude du processus $(\beta_t^{\varphi})_{t\ge0}$ soulevés en **(3.1)** . Commençons tout d'abord par l'étude de la perte d'information.

Proposition 10 :

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction borélienne qui satisfait (3.a).*
1) Soit $t > 0$. *Il y a perte d'information jusqu'au temps* t *(i.e.* $\mathcal{F}_t^{\varphi} \ne \mathcal{F}_t$*) si, et seulement si :*

$$(3.e)\qquad \lim_{u\downarrow0}\int_u^1 \varphi(s)\,ds = +\infty \quad\text{et}\quad \int_0^t du\,\varphi^2(u)\exp\left(-2\int_u^1 \varphi(s)\,ds\right) < \infty.$$

Lorsque cette condition est satisfaite, on a :

$$\Gamma(B_u,\ u\le t) = \Gamma(\beta_u^{\varphi},\ u\le t) \oplus \Gamma\left(\int_0^t f_\varphi(u)dB_u\right),$$

où :

$$(3.f)\qquad f_\varphi(u) = \varphi(u)\exp\left(-\int_u^1 \varphi(s)\,ds\right)$$

2) Il y a perte d'information jusqu'en l'infini, c'est à dire : $\mathcal{F}_\infty^{\varphi} \ne \mathcal{F}_\infty$, *si et seulement si :*

$$(3.g)\qquad \lim_{u\downarrow0}\int_u^1 \varphi(s)\,ds = +\infty \quad\text{et}\quad \int_0^\infty du\,\varphi^2(u)\exp\left(-2\int_u^1 \varphi(s)\,ds\right) < \infty.$$

Remarque : sous la condition *(3.a)*, *(3.e)* est équivalente à :

(3.e') $\lim_{u\downarrow 0}\int_u^1 \varphi(s)ds = +\infty$, $\varphi \in L^2_{loc}(]0,\infty[)$ et $\int_0^t \varphi^2(u)\exp\left(-2\int_u^1 \varphi(s)ds\right)du < \infty$.

Démonstration de la Proposition 10 :

1) Il y a perte d'information au temps t si, et seulement si, il existe $f \in L^2([0,t],du)$, $f \neq 0$, telle que :

(3.h) $$\text{pour tout } u \le t,\ \mathbb{E}\left[\beta^\varphi_u \times \int_0^t f(s)dB_s\right] = 0.$$

Posons $F(u) = \int_0^u f(s)ds$. La condition *(3.h)* s'écrit :

$$F(u) = \int_0^u \varphi(s)F(s)\,ds \qquad (u \le t).$$

Les solutions de cette équation en F sont :

$$F(u) = C\exp\left(-\int_u^1 \varphi(s)\,ds\right).$$

Or, par hypothèse, on doit avoir $F(0) = 0$, ce qui implique la première condition figurant en *(3.e)*. Cette condition étant supposée satisfaite, la première assertion de la proposition est maintenant immédiate.

2) Le même argument permet de démontrer la seconde assertion. □

Exemple : Dans le cas $\varphi(s) = \frac{\lambda}{s}$, on trouve $f_\lambda(u) = \lambda u^{\lambda-1}$, qui satisfait la condition : $\int_0 f^2_\lambda(u)\,du < \infty$ (c'est-à-dire la seconde partie de *(3.e)*), si, et seulement si : $\lambda > \frac{1}{2}$. □

On suppose dans la suite du paragraphe que φ vérifie la condition *(3.e)*.

Explicitons maintenant la décomposition canonique de la semimartingale $(\beta^\varphi_t)_{t\ge 0}$ dans sa filtration propre $(\mathcal{F}^\varphi_t)$. Cette décomposition est donnée par :

(3.i) $$\beta^\varphi_t = \gamma^\varphi_t - \int_0^t ds\ \varphi(s)\ \mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}^\varphi_s],$$

l'écriture $\mathbb{E}[B_s|\mathcal{F}^\varphi_s]$ désignant plus précisément la projection optionnelle de B sur la filtration $(\mathcal{F}^\varphi_t)$.

Il résulte aisément de la décomposition en somme directe de $\Gamma(B_u,\ u \le s)$ dégagée dans le point 1) de la Proposition 10 que l'on a :

$$C_s \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s^{\varphi}] = B_s - \frac{\int_0^s f_{\varphi}(u)du \int_0^s f_{\varphi}(v)dB_v}{\int_0^s f_{\varphi}^2(v)dv}, \tag{3.j}$$

de sorte que, à l'aide de *(3.i)*, on peut écrire γ^{φ} sous la forme :

$$\gamma_t^{\varphi} = B_t - \int_0^t ds \frac{\varphi(s) \int_0^s f_{\varphi}(u)du \int_0^s f_{\varphi}(v)dB_v}{\int_0^s f_{\varphi}^2(u)du}$$

ou encore :

$$\gamma_t^{\varphi} = B_t - \int_0^t ds \frac{f_{\varphi}(s) \int_0^s f_{\varphi}(v)dB_v}{\int_0^s f_{\varphi}^2(u)du}. \tag{3.k}$$

<u>A la suite de cette remarque, il nous semble maintenant que la façon optimale de procéder pour traiter les points b), c), d) est de commencer par l'étude du point d).</u>

Fixons donc $a > 0$, et définissons : $\hat{B}_t = B_a - B_{a-t}$ $(t \le a)$, puis, grossissons la filtration naturelle de $(\hat{B}_t)_{t\le a}$ avec la variable $\int_0^a d\hat{B}_u\, f_{\varphi}(a-u)$.

Pour simplifier l'écriture, on notera ici f pour f_{φ}, γ pour γ^{φ} ; $\hat{f}(u) = f(a-u)$

La formule de grossissement gaussien à laquelle nous faisions allusion ci-dessus est précisément l'écriture de la décomposition canonique de $\hat{B}$ dans sa filtration naturelle, grossie de $G \equiv \int_0^a d\hat{B}_u\, \hat{f}(u)$.

Cette formule est :

$$\hat{B}_t = \hat{\gamma}_t + \int_0^t dv \frac{\hat{f}(v) \int_v^a \hat{f}(u)d\hat{B}_u}{\int_v^a \hat{f}^2(u)du} \qquad (t \le a)$$

Comme $B_t = \hat{B}_a - \hat{B}_{a-t}$, on déduit alors de la formule précédente que :

$$B_t = (\hat{\gamma}_a - \hat{\gamma}_{a-t}) + \int_0^t ds \frac{f(s) \int_0^s f(u)dB_u}{\int_0^s f^2(u)du}$$

En comparant cette formule à *(3.k)*, on obtient :

(3.ℓ) $$\gamma_t \equiv \gamma_t^{\varphi} = \hat{\gamma}_a - \hat{\gamma}_{a-t} \qquad (t \le a)$$

Nous venons ainsi de répondre de façon affirmative au point d) soulevé en (3.1). Nous répondons maintenant de façon affirmative au point b).

Proposition 11 : *$(\mathcal{F}_t^{\varphi})$ coïncide avec la filtration naturelle de $(\gamma_t^{\varphi})_{t\ge0}$.*

Démonstration : 1) Par définition, $\gamma \equiv \gamma^{\varphi}$ est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t^{\varphi})$.

2) Inversement, à l'aide des formules *(3.i)* et *(3.j)*, il nous suffit de pouvoir représenter :

$$C_s \equiv \mathbb{E}[B_s | \mathcal{F}_s^{\varphi}]$$

comme intégrale de Wiener sur l'intervalle $[0,s]$ par rapport à $d\gamma_u$.

Considérons $a > s$. Avec les notations introduites précédemment, on a, d'après [1], lemme I.2.2, pour toute fonction $h \in L^2[0,a]$:

$$\int_0^a h(u)d\hat{B}_u = \int_0^a (\mathcal{T}_{\hat{f}}h)(u)d\hat{\gamma}_u + \frac{\int_0^a h(v)\hat{f}(v)dv}{\int_0^a \hat{f}^2(v)dv} \times G ,$$

où $G = \int_0^a \hat{f}(u)d\hat{B}_u$ et $(\mathcal{T}_{\hat{f}}h)(u) = h(u) - \dfrac{\hat{f}(u)}{\int_u^a \hat{f}^2(v)dv}\displaystyle\int_u^a \hat{f}(v)h(v)dv.$

En conséquence, si l'on pose $k(u) = \hat{h}(u) \equiv h(a-u)$, et que l'on suppose :

(3.m) $$\int_0^a k(u)f(u)du = 0,$$

la formule précédente se simplifie (on utilise également *(3.ℓ)*), en :

(3.n) $$\int_0^a k(u)dB_u = \int_0^a (\hat{\mathcal{T}}_f k)(u)\ d\gamma_u^{\varphi}$$

où : $$(\hat{\mathcal{T}}_f k)(u) = k(u) - \frac{f(u)\int_0^u k(v)f(v)dv}{\int_0^u f^2(v)dv} .$$

Or, on a, d'après *(3.j)* : $C_s = \int_0^a k_s(u)dB_u$,

$$\text{avec : } k_s(u) \equiv 1_{[0,s]}(u)\left(1 - f(u)\,\frac{\displaystyle\int_0^s f(v)dv}{\displaystyle\int_0^s f^2(v)dv}\right).$$

La fonction k_s satisfait bien *(3.m)* et un calcul simple montre ensuite que :

$$\hat{\mathcal{T}}_f(k_s)(u) = 1_{[0,s]}(u)\left(1 - \frac{f(u)\;F(u)}{\displaystyle\int_0^u f^2(v)dv}\right).$$

ce qui termine la démonstration de la Proposition. □

Exemple :

Dans le cas où $\varphi(s) = \frac{\lambda}{s}$, avec $\lambda > \frac{1}{2}$, la formule *(3.o)* se simplifie en :

$$\beta_t = \gamma_t - (1 - \lambda)\int_0^t \frac{1}{s}\,\gamma_s\,ds$$

formule annoncée dans le Théorème 9. □

Il nous reste maintenant à étudier le point c) soulevé en (3.1), qui concerne les propriétés ergodiques de la transformation T^{φ}. Cette étude ne constitue pas une extension immédiate de la proposition 3, car l'ensemble

$$H = \{u > 0 \mid \varphi(u) = 0\}$$

va jouer un rôle important. Comme en *(2.2)*, nous utilisons ici les notations introduites sur l'espace canonique Ω^*.

Théorème 12 :

1) La tribu invariante $\mathcal{I}$ coïncide, aux ensemble W-négligeables près, avec $\mathcal{J}'_\infty$, où l'on a noté :

$$\mathcal{I}'_t \equiv \sigma\left\{\int_0^s dX_u\,1_H(u)\ ;\ s \le t\right\}.$$

2) Pour tout t > 0, t fini, la tribu $\Phi_t = \bigcap_n ((T^{\varphi})^n)^{-1}(\mathcal{F}_t)$ coïncide, aux ensembles négligeables près, avec $\mathcal{I}'_t$.

3) La tribu Φ_∞ coïncide, aux ensembles W-négligeables près, avec $\mathcal{I}'_\infty$ si, et seulement si, il y a perte d'information à l'infini, c'est à dire, d'après la proposition 10 :

$$\int_0^\infty du\, f_\varphi^2(u) < \infty.$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, on a : $(T^{\varphi})^{-1}(\mathcal{F}_\infty) = \mathcal{F}_\infty$ et $\Phi_\infty = \mathcal{F}_\infty$.

Démonstration :

a) Remarquons tout d'abord que, d'après la formule *(3.k)*, on a, pour $t > 0$ et $q \in L^2([0,t],ds)$:

$$\int_0^t dX_u\, q(u)\, 1_H(u) = \int_0^t d\gamma_u^\varphi\, q(u)\, 1_H(u) .$$

En conséquence, la tribu $\mathcal{I}'_\infty$ est contenue dans $\mathcal{I}$ et, pour tout $t > 0$, $\mathcal{I}'_t$ est contenue dans Φ_t.

b) Démontrons maintenant l'assertion 2) du théorème. Pour simplifier l'écriture, nous pouvons supposer $t = 1$. Définissons alors $\overline{f}(u) = c\, f_\varphi(u)$, où f_φ est donnée par la formule *(3.f)*, et c est choisie de façon à ce que :

$$\int_0^1 \overline{f}^2(u)\, du = 1.$$

Posons $g(s) = \dfrac{\varphi(s) \displaystyle\int_0^s du\, \overline{f}(u)}{\displaystyle\int_0^s du\, \overline{f}^2(u)}$, de sorte que l'on a :

$$(3.a) \qquad g(s)\, \overline{f}(s) = \frac{\overline{f}^2(s)}{\displaystyle\int_0^s du\, \overline{f}^2(u)} .$$

Ecrivons le mouvement brownien γ^φ sous la forme :

$$\gamma_t^\varphi = X_t - \int_0^t ds\, g(s) \int_0^s \overline{f}(u)\, dX_u .$$

Il vient alors, en intégrant la fonction $\overline{f}$ par rapport aux deux membres de l'égalité ci-dessus :

$$\int_0^t \overline{f}(u)\, d\gamma_u^\varphi = \int_0^t \overline{f}(u)\, dX_u - \int_0^t du\, \overline{f}(u)\, g(u) \left(\int_0^u \overline{f}(s)\, dX_s \right) .$$

On est ainsi amené naturellement à définir la suite $(X_t^{(n)})$ des processus suivants, au moyen de la formule de récurrence :

$$X_t^{(n+1)} = X_t^{(n)} - \int_0^t du\, \overline{f}(u)\, g(u)\, X_u^{(n)} \ ; \ X_t^{(0)} = \int_0^t \overline{f}(u)\, dX_u .$$

On obtient alors la formule :

$$X_t^{(n)} = \int_0^t dX_s\, \overline{f}(s)\, L_n(\vartheta(t) - \vartheta(s))$$

où l'on a posé : $\vartheta(t) = \displaystyle\int_t^1 \overline{f}(s)\, g(s)\, ds = - \log\left(\int_0^t \overline{f}^2(s)\, ds \right)$;

en particulier $X_1^{(n)} = \displaystyle\int_0^1 dX_s\, \overline{f}(s)\, L_n(- \vartheta(s))$.

La suite des fonctions $\left(f(s)\ L_n(-\vartheta(s))\ ;\ s \in [0,1]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $L^2([0,1]),\ 1_{H^c}(u)du\}$, $(X_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, engendrant l'espace gaussien

$$\left\{\int_0^1 dX_u\ \rho(u)\ 1_{H^c}(u) \,\middle|\, \rho \in L^2([0,1])\right\}$$

Par construction, la tribu Φ_1 est indépendante de la suite $(X_1^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et donc de la tribu $\sigma\left\{\int_0^1 dX_u\ \rho(u)\ 1_{H^c}(u) \,|\, \rho \in L^2([0,1])\right\}$ qu'elle engendre.

Soit donc $\rho \in L^2([0,1])$; d'après les résultats ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^1 dX_u\ \rho(u)\right) \,\middle|\, \Phi_1\right] &= \exp\left(\int_0^1 dX_u\ \rho(u)\ 1_H(u)\right)\ \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^1 dX_u\ \rho(u)\ 1_{H^c}(u)\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^1 dX_u\ \rho(u)\right) \,\middle|\, \mathcal{I}'_1\right]\ ;\end{aligned}$$

l'assertion 2 en découle, car les variables $\left\{\exp\left(\int_0^1 dX_u\ \rho(u)\right) \,\middle|\, \rho \in L^2([0,1])\right\}$ sont totales dans $L^2(\Omega^*,\mathcal{F}_1,\mathbb{W})$.

c) Dans le cas où il y a perte d'information en l'infini, la démonstration de l'assertion 2 du théorème s'adapte mot pour mot en remplaçant la borne $t = 1$ par $t = \infty$. S'il n'y a pas perte d'information en l'infini, l'égalité $\Phi_\infty = \mathcal{F}_\infty$ découle trivialement de $(T^\varphi)^{-1}(\mathcal{F}_\infty) = \mathcal{F}_\infty$.

d) Il nous reste maintenant à identifier $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'_\infty$ aux ensembles $\mathbb{W}$-négligeables près. Nous reprenons, en la modifiant de manière adéquate, la démonstration du corollaire 4 (nous noterons ici simplement T pour T^φ).
Nous montrons tout d'abord : pour toutes fonctions F, G $\in L^2(\Omega^*,\mathcal{F}_\infty,\mathbb{W})$,

$$(3.p)\qquad \mathbb{E}[F\ (G \circ T^n)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[\mathbb{E}[F|\mathcal{I}'_\infty]\ G].$$

T préservant $\mathbb{W}$, on peut se limiter à le montrer pour F et G dans $L^2(\Omega^*,\mathcal{F}_p,\mathbb{W})$ $(p \in \mathbb{N})$; d'après l'assertion 2) du théorème, le membre de gauche de *(3.p)* converge alors vers :

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[F|\mathcal{I}'_p]\ G] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[F|\mathcal{I}'_\infty]\ G]$$

(les tribus $\mathcal{F}_p$ et $\mathcal{I}'_\infty$ sont indépendantes conditionnellement à $\mathcal{I}'_p$).

D'après *(3.p)*, on a donc, pour toute fonction G invariante bornée :

$$\mathbb{E}[FG] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[F|\mathcal{F}'_\infty]\ G],$$

et donc : $$\mathbb{E}[F|\mathcal{F}'_\infty] = \mathbb{E}[F|\mathcal{F}],$$

d'où l'on déduit, $\mathcal{F} = \mathcal{F}'_\infty$ aux ensembles $\mathbb{W}$-négligeables près. □

4. Etude d'une équation différentielle stochastique linéaire.

Dans cette dernière section, μ est une mesure de Radon diffuse (signée) sur $]0,1]$; $(\mathcal{F}_t)$ est une filtration vérifiant les conditions habituelles et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel, issu de 0 ; (B_t) et $(B_t^2 - t)$ sont donc des $(\mathcal{F}_t)$-martingales continues.

On se propose de décrire les propriétés de toutes les solutions continues de l'équation :

$$X_t = B_t + \int_0^t X_u\, d\mu(u) \qquad (0 \leq t \leq 1) \tag{4.a}$$

$\left(\int_0^t X_u\, d\mu(u)\right.$ est définie ici comme $\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$ p.s. $\int_\varepsilon^t X_u\, d\mu(u)$, limite dont on suppose l'existence$\left.\right)$.

On associe à la mesure μ la fonction $M(t) = \exp\left(\mu(]t,1])\right)$ $(0 < t \leq 1)$.

On utilisera de façon récurrente le fait qu'une solution X vérifie toujours la relation :

$$X_t = X_u \frac{M(u)}{M(t)} + \frac{1}{M(t)} \int_u^t M(r)dB_r \qquad (0 < u \leq t \leq 1). \tag{4.b}$$

ou, si on veut faire disparaitre les intégrales stochastiques :

$$X_t = B_t + (X_u - B_u)\, e^{\mu(]u,t])} + \int_u^t B_r\, e^{\mu(]r,t])} d\mu(r) \tag{4.b'}$$

L'équation linéaire *(4.a)* a déjà été utilisée par Chitashvili et Toronjadze [2] pour illustrer des résultats d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles stochastiques ; pour Chitashvili et Toronjadze, μ est une mesure diffuse (signée) aléatoire vérifiant :

$$\int_0^1 e^{|\mu|(]r,1])} \sqrt{2r\,\mathrm{LogLog}\frac{1}{r}}\; d|\mu|(r) < \infty \text{ p.s.},$$

assurant ainsi (en vertu de la loi du Log-itéré) la convergence p.s. de l'intégrale $\int_0^1 |B_r| \, e^{|\mu|(]r,1])} \, d|\mu|(r)$ et l'existence de la solution :

$$X_t = B_t + \int_0^t B_r \, e^{\mu(]r,t])} \, d\mu(r)$$

(On notera que $t \longrightarrow \int_0^t B_r \, e^{\mu(]r,t])} \, d\mu(r)$ est à variation finie ; X est une $(\mathcal{F}_t)$-semi-martingale si, et seulement si $\sigma\{\mu(]s,t]) \mid s \le t\} \subseteq \mathcal{F}_t$ pour tout t).

Nous nous plaçons ici dans un cadre à la fois moins général (pour nous, μ est déterministe) et plus général puisque nous cherchons des critères d'existence de solutions de l'équation *(4.a)* sous la seule contrainte : μ est une mesure de Radon sur $]0,1]$.

(4.1) Etude de l'unicité des solutions.

Soit (X_t) et (X'_t) deux solutions. On a alors :

$$x(t) \equiv X_t - X'_t = \int_0^t x(r) \, d\mu(r).$$

On en déduit que $x(t)M(t)$ est une fonction constante sur $]0,1]$. Or on doit avoir : $\lim_{t\to 0} x(t) = 0$, d'où la :

Proposition 13 :

1) Il y a unicité de la solution de l'équation (4.a) si et seulement si $M(t)$ *ne converge pas vers* ∞ *lorsque* t *tend vers* 0 *;*

2) si $M(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$*, toutes les solutions se déduisent de l'une d'elles par l'addition de* $\frac{C}{M(t)}$*, où* C *est une* v.a. *quelconque. En particulier s'il existe une solution, il en existe une unique, soit* $X^{(1)}$*, telle que* $X_1^{(1)} = 0$.

(4.2) Etude de l'existence des solutions.

Plaçons nous d'abord dans le cas où il y a *a priori* unicité. D'après la proposition 13, on a : $\underline{\lim}_{u\to 0} M(u) < +\infty$; soit (u_n) une suite de réels, $u_n > 0$,

$u_n \longrightarrow 0$ et $\underline{\lim}_{u\to0} M(u) = \lim_n M(u_n)$; $\left(X_{u_n} \frac{M(u_n)}{M(t)}\right)_n$ converge alors p.s. vers 0 et, d'après *(4.b)*, $X_t = \lim_n \frac{1}{M(t)} \int_{u_n}^t M(r)dB_r$; une condition nécessaire et suffisante pour que cette dernière limite existe est :

(4.c)
$$\int_0^1 M^2(r)\, dr < \infty.$$

On a alors :

(4.d)
$$X_t = X_t^{(0)} \equiv \frac{1}{M(t)} \int_0^t M(r)dB_r \qquad \text{pour tout } t > 0 \text{ ;}$$

Inversement, si *(4.c)* est réalisée, le processus $X^{(0)}$ défini par *(4.d)* est continu sur $]0,1]$ et vérifie, d'après la formule d'Ito, pour $0 < \varepsilon < t \le 1$

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &= X_\varepsilon^{(0)} + \int_\varepsilon^t dB_r - \int_\varepsilon^t \left(\int_0^r M(u)dB_u\right) \frac{dM(r)}{M^2(r)} \\ &= X_\varepsilon^{(0)} + B_t - B_\varepsilon - \int_\varepsilon^t X_u^{(0)}\, d\mu(u). \end{aligned}$$

L'équation *(4.a)* a une solution (égale à $X^{(0)}$) si, et seulement si, $X_t^{(0)}$ converge p.s. vers 0 avec t ; $X^{(0)}$ étant gaussien, cela nécessite que $X_t^{(0)}$ converge dans L^2 vers 0, i.e. :

(4.e)
$$\lim_{t\to0} \frac{1}{M^2(t)} \int_0^t M^2(r)\, dr = 0.$$

Plaçons nous maintenant dans le cas où il n'y a pas unicité, c'est à dire $M(t) \xrightarrow[t\to0]{} \infty$. Nous avons vu (proposition 13) que s'il existe une solution, il en existe une $X^{(1)}$ telle que $X_1^{(1)} = 0$.

Si l'on note $\xi_t = - X_{1-t}^{(1)}$ et $\beta_t = B_1 - B_{1-t}$, ξ est alors solution de :

$$\xi_t = \beta_t - \int_0^t \xi_u\, d\tilde{\mu}(u) \qquad (t < 1)$$

où $\tilde{\mu}$ est l'image de μ par $t \longrightarrow 1 - t$ ($\tilde{\mu}$ est une mesure de Radon diffuse signée sur $[0,1[$). Cette équation admet une unique solution, notée encore $(\xi_t)_{t<1}$. L'existence d'une solution de l'équation d'origine sera résolue si l'on a :

$$\lim_{t\to1} \xi_t = 0 \text{ p.s.}$$

Or, on a la formule explicite :

$$\xi_t = \int_0^t \exp-\tilde{\mu}(]r,t])\, d\beta_r = \frac{1}{M(1-t)} \int_0^t M(1-r)d\beta_r \;;$$

$\lim_{t\to 1}\xi_t = 0$ nécessite en particulier $\dfrac{1}{M^2(1-t)} \displaystyle\int_0^t M^2(1-r)\, dr \xrightarrow[t\to 1]{} 0$ ou encore :

$$\text{(4.f)} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{M^2(t)} \int_t^1 M^2(r)\, dr = 0.$$

Proposition 14 : *1) Si* $\underline{\lim}_{t\to 0} M(t) < \infty$, *il est nécessaire et suffisant pour que (4.a) ait une solution que les deux conditions suivantes soient réalisées :*

$$\text{(4.c)} \qquad \int_0^1 M^2(r)\, dr < \infty \qquad \textit{et}$$

$$\text{(4.e')} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{M(t)} \int_0^t M(r)dB_r = 0.$$

La solution est alors $X_t^{(0)} = \dfrac{1}{M(t)} \displaystyle\int_0^t M(r)dB_r$; *(4.e') implique (4.e).*

2) Si $\lim_{t\to 0} M(t) = \infty$, *il y a existence d'une solution de (4.a) si, et seulement si :*

$$\text{(4.f')} \qquad \lim_{t\to 0} \frac{1}{M(t)} \int_t^1 M(r)dB_r = 0.$$

$X_t^{(1)} = -\dfrac{1}{M(t)} \displaystyle\int_t^1 M(r)dB_r$ *est alors la solution de (4.a) nulle au temps 1 ;*

(4.f') implique (4.f) et est en particulier vérifiée sous (4.c).

Transformons par changement de temps les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de solutions de *(4.a)* données par la proposition 14.

* Lorsque $\underline{\lim}_{t\to 0} M(t) < \infty$, on doit avoir :

$$\int_0^1 M^2(t)\, dt < \infty \text{ et } \lim_{t\to 0} \frac{1}{M(t)} \int_0^t M(r)dB_r = 0 \;;$$

soit pour $t < \displaystyle\int_0^1 M^2(s)\, ds$, $\ell(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{\ell(t)} M^2(s)\, ds = t$, $\phi(t) = M \circ \ell(t)$ et $\beta_t = \displaystyle\int_0^{\ell(t)} M(r)dB_r = 0$; $\left(\beta_t,\ t < \displaystyle\int_0^1 M^2(s)\, ds\right)$ est un mouvement brownien ;

$$\underline{\lim}_{t\to 0}\, \phi(t) < \infty,\ \int_0 \frac{1}{\phi^2(u)}\, du < \infty \text{ et } \lim_{t\to 0} \frac{1}{\phi(t)}\, \beta_t = 0.$$

Comme $(\beta_t)_{t>0}$ a même loi que $(tB_{1/t})_{t>0}$, ce groupe de conditions se réécrit, avec $\Phi(x) = x\,\phi\left(\frac{1}{x}\right)$, sous la forme :

$$(4.g)\qquad \underline{\lim}_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} < \infty,\ \int^{\infty} \frac{1}{\Phi^2(x)}\,dx < \infty \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\Phi(x)} B_x = 0.$$

• Lorsque $\underline{\lim}_{t\to 0} M(t) = \infty$, on peut se limiter à traiter le cas où $\int_0^1 M^2(s)\,ds$ est infini. On introduit q décroissante sur $\mathbb{R}_+$ telle que $t = \int_{q(t)}^1 M^2(s)\,ds$ et $\psi(t) = M \circ q(t)$. Les conditions d'existence *(4.f')* deviennent alors :

$$(4.h)\qquad \lim_{x\to\infty} \psi(x) = \infty,\ \int_0^{\infty} \frac{1}{\psi^2(x)}\,dx = 1 \text{ et } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\psi(x)} B_x = 0.$$

Nous sommes donc amenés à caractériser la classe des fonctions h continues strictement positives sur $\mathbb{R}_+$, telles que : $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{h(x)} B_x = 0$ p.s. ; nous n'avons pas trouvé dans la littérature de réponse à cette question, sauf sous l'hypothèse supplémentaire : $x \longrightarrow x^{-1/2}h(x)$ est croissante (on dispose alors des critères "classiques" de Kolmogorov ou Dvoretsky-Erdös avec lesquels le critère *(4.i")* ci-dessous coïncide (voir, par exemple, [5], I-8 et IV-12)) ; l'équivalence de *(4.i')* et *(4.i")* a été fortement inspirée par Kesten [11] (Appendice, Lemme 2).

Proposition 15 : *Soit h continue positive sur $\mathbb{R}_+$ et $\eta(x) = \inf_{u\ge x} h(u)$ $(x \ge 0)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(4.i) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{h(x)} B_x = 0$ p.s. ;

(4.i') $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\eta(x)} B_x = 0$ p.s. ;

(4.i") $\int_1^{\infty} \exp\left(-\varepsilon \frac{\eta^2(x)}{x}\right) \frac{1}{x}\,dx < \infty$ *pour tout* $\varepsilon > 0$.

Démonstration :

1) Plaçons nous sous l'hypothèse *(4.i)* ; on a : $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{h(x)} = 0$, d'où : $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$; η est continue, croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$; on a aussi, pour R processus de Bessel de dimension 3 issu de 0,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{R_x}{\hbar(x)} = 0 \text{ p.s. } ;$$

posons pour x, y > 0, $N_x = \sup_{u\ge x} \frac{R_u}{\hbar(u)}$, $L_y = \sup\{t \mid R_t = y\}$, $T_y = \inf\{t \mid B_t \ge y\}$

$$N_{L_y} = \sup_{u\ge L_y} \frac{1}{\hbar(u)} (R_u - y + y) \ge \sup_{u\ge L_y} \frac{y}{\hbar(u)} = \frac{y}{\eta(L_y)} .$$

On a donc : $\lim_{y\to\infty} \frac{y}{\eta(L_y)} = 0$. D'après un résultat bien connu de D.Williams, $(L_y)_{y\ge 0}$ a même loi que $(T_y)_{y\ge 0}$; *(4.i')* résulte enfin de l'inégalité :

$$\sup_{t\ge T_y} \frac{1}{\eta(t)} B_t \le \sup_{z\ge y} \frac{z}{\eta(T_z)} .$$

Il est immédiat que *(4.i')* implique *(4.i)*.

2) Sous l'hypothèse *(4.i')*, on a a priori : $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\eta(x)} = 0$.

Soit $V_n = 2^{-n/2} \sup_{2^n\le t\le 2^{n+1}} |B_t - B_{2^n}|$; on a les inégalités :

$$\sup_{2^n\le t\le 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{\eta(t)} \le \frac{1}{\eta(2^n)} |B_{2^n}| + \sup_{2^n\le t\le 2^{n+1}} \frac{|B_t - B_{2^n}|}{\eta(t)}$$

$$\le \frac{2^{n/2}}{\eta(2^n)} V_n + \frac{1}{\eta(2^n)} |B_{2^n}| ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2^{(n+1)/2}}{\eta(2^{n+1})} V_n \le \sup_{2^n\le t\le 2^{n+1}} \frac{|B_t - B_{2^n}|}{\eta(t)} \le 2 \sup_{2^n\le t\le 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{\eta(t)}$$

et $\frac{1}{\eta(2^n)} |B_{2^n}| \le \sup_{2^n\le t\le 2^{n+1}} \frac{|B_t|}{\eta(t)}$.

Les v.a. V_n étant indépendantes et de même loi que $B_1^* = \sup_{0\le t\le 1} |B_t|$, *(4.i')* implique : $\lim_n \frac{2^{n/2}}{\eta(2^n)} V_n = 0$, ce qui équivaut, d'après le lemme de Borel Cantelli à la condition :

(4.i"') $\qquad \sum \mathbb{P}\left[B_1^* > \alpha\, 2^{-n/2}\, \eta(2^n)\right] < \infty \qquad$ pour tout $\alpha > 0$.

Toujours d'après le lemme de Borel-Cantelli, *(4.i"')* assure : $\lim_n \frac{|B_{2^n}|}{\eta(2^n)} = 0$.

Finalement, *(4.i')* et *(4.i"')* sont équivalentes. L'équivalence de *(4.i"')* et *(4.i")* résulte quant à elle des inégalités :

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{\alpha}^{\infty}\exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right]\,du \le \mathbb{P}[B_1^* > \alpha] \le 2\exp\left[-\frac{1}{2}\alpha^2\right]$$

et $\displaystyle\sum_{k\ge0}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\exp\left[-\,2\varepsilon\,2^{-(k+1)}\,\eta^2(2^{k+1})\right]\frac{1}{x}\,dx$

$$\le \int_1^{\infty}\exp\left[-\varepsilon\,\frac{\eta^2(x)}{x}\right]\frac{1}{x}\,dx \le \sum_{k\ge0}\int_{2^k}^{2^{k+1}}\exp\left[-\,\frac{\varepsilon}{2}\,2^{-k}\eta^2(2^k)\right]\frac{1}{x}\,dx\,. \qquad \square$$

Revenant par changement de temps à la situation originelle, on peut énoncer la

Proposition 16 : *1) Si* $\underline{\lim}_{t\to0}M(t) < \infty$, *il est nécessaire et suffisant pour que (4.a) ait une solution que les deux conditions suivantes soient réalisées*

$$(4.c) \qquad \int_0^1 M^2(r)\,dr < \infty$$

et avec $\underset{\sim}{M}(u) = \inf_{v\le u}\dfrac{M(v)}{\int_0^v M^2(s)\,ds}$,

$$(4.e'') \qquad \int_0 \frac{M^2(u)}{\int_0^u M^2(s)\,ds}\exp\left[-\varepsilon\,\underset{\sim}{M}^2(u)\int_0^u M^2(s)\,ds\right]du < \infty \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

2) Si $\lim_{t\to0}M(t) = \infty$, *il y a existence d'une solution de (4.a) si, et seulement si, avec* $\tilde{M}(u) = \inf_{v\le u}M(v)$:

$$(4.f'') \qquad \int_0 \frac{M^2(u)}{\int_u^1 M^2(s)\,ds}\exp\left(-\varepsilon\,\frac{\tilde{M}^2(u)}{\int_u^1 M^2(s)\,ds}\right)du < \infty \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

(4.3) Etude de l'adaptation à $(\mathcal{F}_t)$.

Dans le cas où il y a existence et unicité, l'unique solution est, d'après la proposition 14, adaptée à la filtration naturelle de (B_t). Il reste donc à considérer le cas où il n'y a pas unicité.

Proposition 17 : *Lorsque* $\lim_{t\to0}M(t) = \infty$, *l'équation (4.a) admet une solution adaptée à la filtration* $(\mathcal{F}_t)$ *si, et seulement si :*

(4.c) $$\int_0^1 M^2(r)\,dr < \infty\ ;$$

dans ce cas, les solutions adaptées sont données par $X^{(0)} + \frac{C}{M}$ *où* C *est une v.a.* $\mathcal{F}_0$*-mesurable.*

Démonstration : sous l'hypothèse *(4.c)*, on a vu au paragraphe (4.2) que $X^{(0)}$ est solution de *(4.a)* ; $X^{(0)}$ est $(\mathcal{F}_t)$-adapté et toute autre solution s'obtient en ajoutant à $X^{(0)}$ un processus de la forme $\frac{C}{M(t)}$ (voir (4.1)) ; l'adaptation à $(\mathcal{F}_t)$ nécessite que C soit $\mathcal{F}_0$-mesurable. Inversement supposons que X soit une solution $(\mathcal{F}_t)$-adaptée et montrons que *(4.c)* est satisfaite. Toujours grâce à *(4.b)*, on a pour $0 < u < t$,

$X_t = X_u \frac{M(u)}{M(t)} + \frac{1}{M(t)} \int_u^t M(r)dB_r$ et, pour λ réel,

$$\mathbb{E}[\exp i\lambda X_t] = \mathbb{E}\left[\ \mathbb{E}\left\{\exp i\lambda\left(X_u \frac{M(u)}{M(t)} + \frac{1}{M(t)} \int_u^t M(r)dB_r \,|\, \mathcal{F}_u\right)\right\}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\ i\lambda X_u \frac{M(u)}{M(t)}\right] \exp\left(-\lambda^2 \int_u^t \frac{M^2(r)}{M^2(t)}\,dr\right)\ ;$$

on en déduit, t > 0 étant fixé, en faisant tendre u vers 0 :

$$|\mathbb{E}[\exp i\lambda X_t]| \le \exp\left(-\lambda^2 \int_0^t \frac{M^2(r)}{M^2(t)}\,dr\right)\ ;$$

si la condition *(4.c)* n'était pas satisfaite, on aurait donc pour tout $\lambda \neq 0$ $\mathbb{E}[\exp i\lambda X_t] = 0$, ce qui est incompatible avec la continuité en $\lambda = 0$ de la fonction caractéristique de la variable X_t.

(4.4) Etude de l'existence d'une solution semi-martingale.

On utilisera plusieurs fois le résultat suivant (Fernique [4] ou Jain-Monrad [6]) :

Lemme 18 : *Soit* $(V_t)_{0 \le t \le 1}$ *un processus gaussien continu ; si* $t \longrightarrow V_t$ *est à variation finie avec probabilité positive,* $t \longrightarrow V_t$ *est à variation intégrable.*

Démonstration : Si W est une v.a. gaussienne centrée, de variance σ^2 et si $\mathbb{P}[A] = \alpha$, on a pour tout $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}[|W - \omega|\ 1_A] \ge \mathbb{E}[|W - \omega|\ 1_{\{|W - \omega| \le \alpha\}}]$$
$$\ge \mathbb{E}[|W|\ 1_{\{|W| \le \alpha\}}] = \sigma \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(1 - \exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)^2\right).$$

Soit $(V_t)_{0\le t\le 1}$ un processus gaussien continu tel que $\mathbb{P}\left[\int_0^1 |dV_s| < \infty\right] > 0$;

notons pour $t \in [0,1]$, $\tilde{V}_t = V_t - \mathbb{E}[V_t]$; pour montrer que V est à variation intégrable, il suffit de montrer que $\tilde{V}$ est à variation intégrable ;

soit $x \in \mathbb{R}$ avec $\mathbb{P}\left[\int_0^1 |dV_s| < x\right] = \alpha > 0$ et $A = \left\{\int_0^1 |dV_s| < x\right\}$;

pour toute subdivision $(0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_k \le t_{k+1} = 1)$ de $[0,1]$, on a :

$$x \ge \mathbb{E}\left[\int_0^1 |dV_s|\ 1_A\right] \ge \mathbb{E}\left[1_A \sum_{i=1}^{k} |V_{t_{i+1}} - V_{t_i}|\right]$$

$$\ge \left(1 - \exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2\right)\ \left(\sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[|V_{t_{i+1}} - V_{t_i}|]\right),$$

si $\delta^2 = \sup_{0\le s,t\le 1} \mathbb{E}[|V_t - V_s|]$; par suite, $\mathbb{E}\left[\int_0^1 |dV_s|\right] \le \dfrac{x}{1 - \exp-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\delta}\right)^2}$. □

Proposition 19 : *Lorsque* $\underline{\lim}_{t\to 0} M(t) < +\infty)$, *il y a existence (et unicité) d'une solution semi-martingale de (4.a) si et seulement si :*

(4.c) $$\int_0^1 M^2(r)\, dr < \infty\ ;$$

(4.j) $$\int_0^1 \frac{1}{M(u)}\left(\int_0^u M^2(r)\, dr\right)^{1/2} d|\mu|(u) < \infty\ .$$

Démonstration :

La solution de *(4.a)* est donnée (pour $t > 0$) par $X_t^{(0)} = \frac{1}{M(t)} \int_0^t M(r) dB_r$;
la filtration naturelle $\mathcal{X}$ de X coïncide avec la filtration naturelle de B ;
comme $X_t^{(0)} - X_\varepsilon^{(0)} = B_t - B_\varepsilon + \int_\varepsilon^t X_u^{(0)}\, d\mu(u)$, B est la partie martingale locale continue de X et $\int_0^\cdot X_u^{(0)}\, d\mu(u)$ est sa partie à variation finie ; le processus gaussien $\int_0^\cdot X_u^{(0)}\, d\mu(u)$ est à variation finie, donc à variation intégrable (lemme 18), ce qui équivaut à *(4.j)*. Sous *(4.j)* $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^t X_u^{(0)}\, d\mu(u)$ existe, de même que $\lim_{\varepsilon\to 0} X_\varepsilon^{(0)}$ qui vaut nécessairement 0. □

Passons au cas où il n'y a pas unicité, c'est à dire $\lim_{t\to 0} M(t) = \infty$, mais imposons dans un premier temps :

$$\int_0^1 M^2(r)\,dr < \infty. \tag{4.c}$$

On sait que la solution générale de l'équation *(4.a)* est : $X = X^{(0)} + \frac{C}{M}$ où C est une v.a. quelconque ; comme $C = \lim_{t\to 0} M(t)X_t$, C est $\mathcal{X}_0$-mesurable si $(\mathcal{X}_t)$ est la filtration engendrée par X ; $\mathcal{X}$ est aussi la filtration engendrée par $C + \int_0^{\cdot} M(r)dB_r$, ou par C + B puisque M ne s'annule pas.

On a un premier résultat partiel :

Lemme 20 :

Sous les hypothèses : $\lim_{t\to 0} M(t) = \infty$, $\int_0^1 M^2(r)dr < \infty$ *et* $\int_0^1 \frac{1}{M(r)}\, d|\mu|(r) < \infty$, *la solution* $X = X^{(0)} + \frac{C}{M}$ *est une semi-martingale si et seulement si* C + B *en est une (c'est à dire :* B *est une semi-martingale dans sa filtration naturelle grossie au moyen de la v.a.* C*).*

Démonstration : la condition $\int_0^1 \frac{1}{M(r)} d|\mu|(r) < \infty$ signifie que $\frac{1}{M}$ est à variation finie ($\frac{1}{M}(0) \equiv 0$) ; elle implique ici *(4.g)* et assure que $\int_0^1 |X_u^{(0)}|d|\mu|(u)$ est fini. Comme $X_t = B_t + \frac{C}{M(t)} + \int_0^t X_u^{(0)}\, d\mu(u)$, X est une semi-martingale si (et seulement si) B est une $\mathcal{X}$-semi-martingale (ce qui équivaut à C + B est une semi-martingale). □

Un deuxième résultat partiel concerne le cas où la solution $X = X^{(0)} + \frac{C}{M}$ est un processus gaussien. $(B, X^{(0)}, C)$ étant gaussien, on peut écrire :

$$C = c + \gamma + \int_0^1 q(v)dB_v$$

où q est une fonction déterministe, $\int_0^1 q^2(v)\, dv < \infty$, $c \in \mathbb{R}$ et γ est une variable gaussienne centrée indépendante de $\sigma(B_v,\ 0 \le v \le 1)$. $\mathcal{X}$ est la filtnation de B, grossie avec la variable C.

On a donc (Jacod [7] ou Chaleyat-Maurel & Jeulin [1]) :

$$B_t = \bar{B}_t + \int_0^{t\wedge\delta} q(v) \frac{\gamma + \int_v^1 q(u)dB_u}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 q^2(u)du} dv$$

où $\bar{B}$ est un $(\mathcal{X}_t)$-mouvement brownien,

$\delta = \inf\{v |\ \mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 q^2(r)dr = 0\} \wedge 1$, et l'intégrale

$\lim_{u\uparrow\delta} \int_0^u q(v) \dfrac{\gamma + \int_v^1 q(u)dB_u}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 q^2(u)du} dv$ converge (mais l'intégrale n'est pas nécessairement absolument convergente si $\gamma = 0$ ...).

B est une $\mathcal{X}$-semi-martingale si et seulement si $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|q(v)|}{\left(\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 q^2(u)du\right)^{1/2}} dv$ est fini. $\bar{B}$ est la partie martingale continue de X et le processus gaussien

$$\int_0^t \left(q(v) \frac{\gamma + \int_v^1 q(u)dB_u}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 q^2(u)du} dv + \frac{1}{M(v)} \left(C + \int_0^v M(u)dB_u\right) d\mu(v)\right)$$

en est sa partie à variation finie, donc à variation intégrable (lemme 18).

Soit $\mu = \mu_a + \mu_s$ la décomposition de μ en somme d'une mesure absolument continue $\mu_a = \varphi.dt$ et d'une mesure singulière μ_s ; on a donc :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \left| q(v) \frac{\gamma + \int_v^1 q(u)dB_u}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 q^2(u)du} + \frac{\varphi(v)}{M(v)} \left(C + \int_0^v M(u)dB_u\right)\right| dv\right]$$

$$+ \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{1}{M(v)} \left|C + \int_0^v M(u)dB_u\right| d|\mu_s|(v)\right] < \infty,$$

soit :

- $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{M(v)} \left(|c| + \mathbb{E}[\gamma^2]^{1/2} + \left(\int_0^v (q+M)^2(u)du\right)^{1/2} + \left(\int_v^1 q^2(u)du\right)^{1/2}\right) d|\mu_s|(v) < \infty$

- $\displaystyle |c| \int_0^t \frac{|\varphi(v)|}{M(v)} dv < \infty$;

$$\bullet \int_0^t \left| \frac{q(v)}{\left(\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^\delta q^2(u)du\right)} + \frac{\varphi(v)}{M(v)} \right| \left(\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^\delta q^2(u)du\right)^{\frac{1}{2}} dv < \infty,$$

$$\bullet \int_0^t \frac{|\varphi(v)|}{M(v)} \left(\int_0^v (q+M)^2(u)du\right)^{1/2} dv < \infty .$$

Si $C = 0$, on doit avoir *(4.g)* ; si $C \neq 0$ il faut $\int_0^t \frac{1}{M(v)} d|\mu|(v) < \infty$.

En résumé :

__Proposition 21__ *: On suppose :* $\lim_{t\to 0} M(t) = \infty$, $\int_0^1 M^2(v)\, dv < \infty$ *; soit* X *une solution de (4.a), supposée gaussienne ;* $C = \lim_{t\to 0} M(t)X_t$.

i) Si $C = 0$, X *est une semi-martingale si, et seulement si, (4.j) est vérifiée*

ii) Si $C \neq 0$, X *est une semi-martingale si et seulement si* $\frac{1}{M}$ *est à variation finie et* C + B *est une semimartingale ; avec* $C = c + \gamma + \int_0^1 q(v)dB_v$

où $q \in L^2([0,1])$, $c \in \mathbb{R}$ *et* γ *est une variable gaussienne centrée indépendante de* $\sigma(B_s,\ 0 \le v \le 1)$ *; cela signifie :*

$$\int_0^\delta |q(v)| \left(\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^\delta q^2(u)\, du\right)^{-1/2} dv < \infty.$$

Restons dans le cas où il n'y a pas unicité, c'est à dire : $\lim_{t\to 0} M(t) = \infty$, mais imposons maintenant :

$$\int_0^1 M^2(u)\, du = \infty \text{ et } \lim_{t\to 0} \frac{1}{M^2(t)} \int_t^1 M^2(v)\, dv = 0$$

Sur $]0,1]$, la solution générale de *(4.a)* est alors $X_t^{(1)} + \frac{C}{M(t)}$; $\mathcal{X}$ est la plus petite filtration rendant adapté le processus $C - \int^1 M(v)dB_v$; pour tout t, $\mathcal{X}_t \ge \sigma(\int_u^t M(v)dB_v,\ u \le t) = \mathcal{B}_t$.

Lorsque X est un processus gaussien, on peut à nouveau écrire :

$\bullet$ $C = c + \gamma + \int_0^1 q(v)dB_v$, où q est une fonction déterministe, $\int_0^1 q^2(v)\, dv < \infty$, $c \in \mathbb{R}$ et γ est une v.a. gaussienne centrée indépendante de $\sigma(B_v,\ 0 \le v \le 1)$.

$$\bullet\ B_t = \tilde{B}_t + \int_0^{t\wedge\eta} \kappa(v)\, dv,$$

où $\tilde{B}$ est un $\mathcal{X}$-mouvement brownien, $\eta = \inf\{t \mid \mathbb{E}[\gamma^2] + \int_t^1 (q - M)^2(u)\, du = 0\}$ et

$$\kappa(t) = (q - M)(t)\ \frac{\gamma + \int_t^\eta (q - M)(u) dB_u}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_t^\eta (q - M)^2(u) du}\ ;$$

notons que η est strictement positif ($q \in L^2$ et $\int_0^1 M^2(v)\, dv = \infty$) et que B est une $\mathcal{X}$-semi-martingale sur $[0,\eta[$ $\left(\int_0^t |\kappa(v)|\, dv \text{ est fini pour tout } t < \eta\right)$; $\int_0^\eta \kappa(v)\, dv = \lim_{t\to\eta-}\int_0^t \kappa(v)\, dv$ existe et $\int_0^\eta |\kappa(v)|\, dv$ est fini si et seulement si $\int_0^\eta |q - M|(v) \left(\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^\eta (q - M)^2(u)\, du\right)^{-1/2} dv$ est fini (lemme 18).

Comme : $X_t = B_t + \int_0^t X_u\, d\mu(u) = \tilde{B}_t + \int_0^t X_u\, d\mu(u) + \int_0^{t\wedge\eta} \kappa(v)\, dv$,

si X est une $\mathcal{X}$-semi-martingale, $\tilde{B}$ est la partie martingale continue de X et

$$V = \int_0^{\cdot} X_u\, d\mu(u) + \int_0^{\cdot\wedge\eta} \kappa(v)\, dv$$

est sa partie à variation finie ; à nouveau, le processus gaussien V est à variation intégrable, soit :

$$\infty > \mathbb{E}\left[\int_0^\eta |dV_r|\right] = \int_0^\eta \mathbb{E}\left[|\kappa(r) + X_r\varphi(r)|\right] dr + \int_0^\eta \mathbb{E}[|X_v|]\, d|\mu_s|(v)$$

$$= \int_0^\eta dv\ \mathbb{E}\Bigg[\Bigg|c\,\frac{\varphi}{M}(v) + \frac{\varphi}{M}(v)\int_0^v q(u)dB_u + \ldots$$

$$\left(\frac{\varphi}{M}(v) + \frac{(q - M)(v)}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^\eta (q - M)^2(u)du}\right)\cdot\left(\gamma + \int_v^\eta (q - M)(u)dB_u\right)\Bigg|\Bigg]$$

$$+ \int_0^\eta \mathbb{E}[|X_v|]\, d|\mu_s|(v)$$

soit : $$\int_0^\eta \frac{1}{M(t)}\left(\int_t^1 M^2(u)du\right)^{1/2} d|\mu_s|(t) < \infty\ ,$$

$$|c| \int_0^{\eta} \frac{|\varphi|}{M}(v)\, dv < \infty$$

$$\int_0^{\eta} \frac{|\varphi|}{M}(v) \left(\int_0^{v} q^2(u)du\right)^{1/2} dv < \infty \text{ et}$$

$$\int_0^{\eta} \left| \frac{\varphi}{M}(v) + \frac{(q - M)(v)}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^{\eta} (q - M)^2(u)du} \right| . \left(\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^{\eta} (q-M)^2(u)du\right)^{1/2} dv < \infty$$

Remarquons que si X est une semi-martingale,

$$\mathbb{E}[X_t|\gamma] = \frac{c + \gamma}{M(t)} = \mathbb{E}[A_t|\gamma] = \int_0^t \left(\mathbb{E}[X_u|\gamma]\, d\mu(u) + \mathbb{E}[\kappa(u)|\gamma]\, du\right) \quad (\text{si } t < \eta)$$

est à variation intégrable ; si $c^2 + \mathbb{E}[\gamma^2] \neq 0$, X n'est une semi-martingale que si $\frac{1}{M}$ est à variation finie ; plus précisément :

* si $\mathbb{E}[\gamma^2] \neq 0$, $\eta = 1$ et X est une semi-martingale si et seulement si :

(4.k.1) $\frac{1}{M}$ est à variation finie

(4.k.2) $$\int_0^1 \frac{1}{M(t)} \left(\int_t^1 M^2(u)\, du\right)^{1/2} d|\mu_s|(t) < \infty$$

(4.k.3') $$\int_0 \left| \frac{\varphi}{M}(v) + \frac{(q - M)(v)}{\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 (q - M)^2(u)du} \right| . \left(\mathbb{E}[\gamma^2] + \int_v^1 (q-M)^2(u)du\right)^{1/2} dv < \infty$$

(4.k.3') équivaut à *(4.k.3)* : $$\int_0 \left| \frac{\varphi}{M}(v) \left(\int_v^1 M^2(u)du\right)^{1/2} - \frac{M(v)}{\left(\int_v^1 M^2(u)du\right)^{1/2}} \right| dv < \infty$$

* si $\mathbb{E}[\gamma^2] = 0$ et $c \neq 0$, il faut à nouveau *(4.k.1)* et *(4.k.2)* ainsi que :

(4.k.4') $$\int_0 \left| \frac{\varphi}{M}(v) + \frac{(q - M)(v)}{\int_v^1 (q - M)^2(u)du} \right| . \left(\int_v^1 (q - M)^2(u)du\right)^{1/2} dv < \infty \;;$$

(4.k.4') se scinde en *(4.k.3)* et

(4.k.4) $$\int^{\eta} \frac{|q - M|(v)}{\left(\int_v^{\eta} (q - M)^2(u)du\right)^{1/2}}\, dv < \infty.$$

* Si $\mathbb{E}[\gamma^2] = 0 = c$, pour que X soit une semi-martingale, il faut et il suffit que *(4.k.2)*, *(4.k.3)*, *(4.k.4)* soient vérifiées, ainsi que :

(4.k.5)
$$\int_0^{\eta} \frac{|\varphi|}{M}(v) \left(\int_0^v q^2(u)\,du\right)^{1/2} dv < \infty.$$

* en particulier, pour que $X^{(1)}$ soit une semi-martingale (cas C = 0), il faut et il suffit que *(4.k.1)* et*(4.k.3)* soient vérifiées.

En résumé :

Proposition 22 : *Sous les conditions* $\lim_{t\to 0} M(t) = \infty$, $\int_0^1 M^2(u)\,du = \infty$ *et* $\lim_{t\to 0} \frac{1}{M^2(t)} \int_t^1 M^2(u)\,du = 0$, *il existe une semi-martingale gaussienne solution de (4.a) si, et seulement si :*

(4.k.2)
$$\int_0^1 \frac{1}{M(t)}\left(\int_t^1 M^2(u)\,du\right)^{1/2} d|\mu_s|(t) < \infty$$

et

(4.k.3)
$$\int_0 \left| \frac{\varphi}{M}(v) \left(\int_v^1 M^2(u)du\right)^{1/2} - \frac{M(v)}{\left(\int_v^1 M^2(u)du\right)^{1/2}} \right| dv < \infty$$

Alors une solution semi-martingale gaussienne particulière est $X^{(1)}$ *et la solution semi-martingale gaussienne générale est de la forme :* $X^{(1)} + \frac{C}{M}$ *où* $C = c + \gamma + \int_0^1 q(v)dB_v$ *(q déterministe,* $\int_0^1 q^2(v)\,dv < \infty$, $c \in \mathbb{R}$ *et* γ *v.a. gaussienne centrée indépendante de* $\sigma\{B_v,\ 0 \le v \le 1\}$*) à condition que :*

* *si* $\gamma \neq 0$, $\frac{1}{M}$ *est à variation finie ;*
* *si* $\gamma = 0$ *soit* $\eta = \inf\{t \mid \int_t^1 (q - M)^2(u)\,du = 0\}$;
  . *si* $c \neq 0$, $\frac{1}{M}$ *est à variation finie et* $\displaystyle\int^{\eta} \frac{|q - M|(v)}{\left(\int_v^{\eta} (q - M)^2(u)du\right)^{1/2}} dv < \infty$
  . *si* $c = 0$, $\displaystyle\int_{0+} \frac{|\varphi|}{M}(v) \left(\int_0^v q^2(u)du\right)^{1/2} dv < \infty$ *et*

$$\int^{\eta} \frac{|q - M|(v)}{\left(\int_v^{\eta}(q - M)^2(u)du\right)^{1/2}} dv < \infty .$$

(4.5) Exemples.

On se limite à μ absolument continue.

i) Exemple A : On considère $\varphi(u) = \frac{\lambda}{u}$ $(\lambda \neq 0)$; alors, $M(u) = u^{-\lambda}$.

* Il ne peut y avoir unicité que si λ est négatif ; on a alors :

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(u)|}{M(u)} \left(\int_0^u M^2(r)\, dr\right)^{1/2} du = \frac{-\lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda}} \int_0^1 u^{-1/2}\, du < \infty ;$$

la solution est donc $X_t^{(0)} = t^{\lambda} \int_0^t r^{-\lambda}\, dB_r$; c'est une semi-martingale continue.

* Si $\lambda > 0$, $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$;

** pour $\lambda < \frac{1}{2}$, $\int_0 M^2(u)\, du$ est fini ;

les solutions $X_t = C\, t^{\lambda} + t^{\lambda} \int_0^t r^{-\lambda}\, dB_r$ sont continues en 0 ;

$\frac{1}{M(t)} = t^{\lambda}$ est à variation finie et X est une semi-martingale si et seulement si C + B en est une.

** pour $\lambda \geq \frac{1}{2}$, $\int_0 M^2(u)\, du$ est infini et il n'existe plus de solution $\mathcal{B}$-adaptée ; cependant

$$\int_t^1 M^2(u)\, du = \begin{cases} \frac{1}{2\lambda - 1}(t^{1-2\lambda} - 1) & \text{si } \lambda > \frac{1}{2} \\ -\mathrm{Log}\, t & \text{si } \lambda = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et

$$\int_0 \left| \frac{\varphi}{M}(r) \left(\int_r^1 M^2(u)du\right)^{1/2} - \frac{M(r)}{\left(\int_r^1 M^2(u)du\right)^{1/2}} \right| dr$$

$$= \sqrt{2\lambda - 1} \int_0 \left| \lambda t^{\lambda-1}(2\lambda - 1)^{-1}(t^{1-2\lambda} - 1) - t^{-\lambda} \right| (t^{1-2\lambda} - 1)^{-1/2}\, dt$$

$$= \sqrt{2\lambda - 1} \int_0 \left| \lambda(2\lambda - 1)^{-1}(1 - t^{\lambda}) - 1 \right| (t - t^{2\lambda})^{-1/2}\, dt < \infty$$

(si $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient $\int_0 |\frac{1}{2}\mathrm{Log}t - 1|\ (t\mathrm{Log}t)^{-1/2}\,dt < \infty$) ;

$X_t^{(1)} = - t^{\lambda} \int_t^1 r^{-\lambda}\, dB_r$ est une semi-martingale continue.

ii) Exemple B :

On considère : $M(t) = t^a(1 + t^b + \sin\frac{1}{t})^c$, avec $a < 0$, b, $c > 0$ et $a + bc > 0$;

$$\underline{\lim}_{t\to 0} M(t) = \lim_{k\to\infty} M(\vartheta_k) \quad (\text{où } \frac{1}{\vartheta_k} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \vartheta_k^{a+bc} = 0 \quad (\text{il y a donc unicité} \ldots) \ ;$$

$$\overline{\lim}_{t\to 0} M(t) = \lim_{k\to\infty} M(\eta_k) \quad (\text{où } \frac{1}{\eta_k} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

$$= \lim_{k\to\infty} \eta_k^a(2 + \eta_k^b)^c = \infty.$$

Une première condition nécessaire d'existence est $\int_0 M^2(u)\,du$ fini , i.e.:

$$\infty > \int_0 dt\ t^{2a}(1 + t^b + \sin\tfrac{1}{t})^{2c} = \int^{+\infty} u^{-2(1+a)}(1 + u^{-b} + \sin u)^{2c}\, du \ ;$$

comme $a + bc > 0$, une condition équivalente est

$\int^{+\infty} u^{-2(1+a)}(1 + \sin u)^{2c}\, du < \infty$, soit $2(1 + a) > 1$ ou $a > -\frac{1}{2}$.

On supposera cette dernière condition vérifiée dans la suite.

Notons que pour $u \longrightarrow 0$, $\int_0^u M^2(r)\,dr$ est comparable à u^{2a+1} et que $\left(\frac{1}{M^2(u)} \int_0^u M^2(r)\,dr\right)^{1/2}$ est donc comparable à $\frac{\sqrt{u}}{(1 + u^b + \sin\frac{1}{u})^c}$;

une condition nécessaire d'existence est $\lim_{u\to 0} \frac{\sqrt{u}}{(1 + u^b + \sin\frac{1}{u})^c} = 0$, ce qui nécessite $1 - 2bc > 0$; cette dernière condition est d'ailleurs suffisante en vertu de la loi du log-itéré jointe à :

$$\left(\frac{1}{M^2(u)} \int_0^u M^2(r)\,dr\right) \times \mathrm{LogLog}\left(\int_0^u M^2(r)\,dr\right) \cong \frac{u\ \mathrm{LogLog}u}{(1 + u^b + \sin\frac{1}{u})^{2c}} \xrightarrow[u\to 0]{} 0 \ .$$

$\int_0^1 \frac{|\varphi(u)|}{M(u)} \left(\int_0^u M^2(r)\,dr\right)^{1/2} du$ est donc fini en même temps que

$$\int_0 \frac{\sqrt{u}}{(1 + u^b + \sin\frac{1}{u})^c} \left|\frac{a}{u} + \frac{c}{1 + u^b + \sin\frac{1}{u}} \left(bu^{b-1} - u^{-2}\cos\frac{1}{u}\right)\right| du$$

ou que $\displaystyle\int^{\infty} \frac{u^{-1/2}}{(1 + u^{-b} + \sin u)^c} \left|\frac{a}{u} + \frac{c}{1 + u^{-b} + \sin u} \left(bu^{-b-1} - \cos u\right)\right| du$;

avec $\delta = -\varepsilon - \frac{\pi}{2}$ et $\rho = \varepsilon - \frac{\pi}{2}$, $\displaystyle\int^{\infty} \frac{u^{-3/2}}{(1 + u^{-b} + \sin u)^c}$ du est de même nature que

$$\sum_k \int_{\delta+2k\pi}^{\rho+2k\pi} \frac{u^{-3/2}}{(1 + u^{-b} + \sin u)^c}\, du \cong \sum_k k^{-3/2} \int_0^{\varepsilon} \frac{du}{(u^2 + k^{-b})^c} \cong \sum_k k^{(bc-3)/2}$$

qui converge si $bc < 1$; reste à considérer

$$\int^{\infty} \frac{u^{-1/2}}{(1 + u^{-b} + \sin u)^{c+1}} \left|bu^{-b-1} - \cos u\right| du ;$$

$\displaystyle\int^{\infty} \frac{u^{-(b+3/2)}}{(1 + u^{-b} + \sin u)^{c+1}}$ converge $\quad (b - bc + 1 > 0 \Rightarrow b + \frac{3}{2} - \frac{b(c+1)}{2} > 1)$

tandis que $\displaystyle\int^{\infty} \frac{u^{-1/2}}{(1 + u^{-b} + \sin u)^{c+1}} |\cos u|$ du diverge.

Il y a donc existence et unicité si et seulement si :

$$a + bc > 0,\ 1 - 2bc > 0,\ 2a + 1 > 0\ (b,c > 0,\ a < 0) ;$$

la solution n'est jamais une semi-martingale.

REFERENCES

[1] M. Chaleyat-Maurel, Th. Jeulin : Grossissement gaussien de la filtration brownienne.
In : Grossissements de filtrations : exemples et applications.
Lect. Notes in Maths. 1118, Springer (1985).

[2] R.J. Chitashvili, T.A. Toronjadze : On one-dimensional stochastic differential equations with unit diffusion coefficient ; structure of solutions. Stochastics 4, 281-315 (1981).

[3] P. Deheuvels : Invariance of Wiener processes and Brownian bridges by integral transforms and applications.
Stoch. Processes and their Appl. 13, 3, 311-318 (1982).

[4] X. Fernique : Intégrabilité des vecteurs gaussiens.
C.R.Acad.Sci.Paris, Sér.A, 270, 1698-1699 (1970).

[5] K.Itô, H.P.McKean : Diffusion processes and their sample paths.
Springer (1965).

[6] N.C. Jain, D. Monrad : Gaussian quasimartingales.
Z.f.W. 59, 139-159 (1982).

[7] J.Jacod : Grossissement initial, hypothèse (H') et théorème de Girsanov.
In : Grossissements de filtrations : exemples et applications.
Lect. Notes in Maths. 1118, Springer (1985).

[8] Th. Jeulin : Semi-martingales et grossissement d'une filtration.
Lect. Notes in Maths. 833, Springer (1980).

[9] Th. Jeulin, M. Yor : Inégalité de Hardy, semimartingales et faux amis.
Sém. Probas. XIII, Lect. Notes in Maths. 721, 332-359.
Springer (1979).

[10] Th. Jeulin, M. Yor (éditeurs) : Grossissements de filtrations : exemples et applications.
Lect. Notes in Maths. 1118, Springer (1985).

[11] H. Kesten : The 1971 Rietz Lecture : Sums of independent random variables - without moment conditions.
Annals Math.Stat., vol 43, 701-732 (1972).

[12] N.N. Lebedev : Special functions and their applications.
Dover Publications (1972).

[13] K. Petersen : Ergodic theory. Cambridge University Press (1983).

[14] H. von Weizsäcker : Exchanging the order of taking suprema and countable intersection of σ-algebras.
Ann. I.H.P. 19, 91-100 (1983).