SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN BERTOIN

Sur une horloge fluctuante pour les processus de Bessel de petites dimensions

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 117-136

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1990__24__117_0>

SUR UNE HORLOGE FLUCTUANTE POUR LES PROCESSUS DE BESSEL DE PETITES DIMENSIONS

Jean BERTOIN

Laboratoire de Probabilités (L.A.224), Université P. et M. Curie
4 Place Jussieu - Tour 56 - 75252 PARIS CEDEX 05 .

L'origine de ce travail est la recherche d'une extension pour les petites dimensions d'un résultat dû à Biane et Yor [3] sur des changements de temps pour un processus de Bessel (voir (0.3) ci-dessous). Considérons R , un processus de Bessel de dimension $d>0$, issu de 0 (en abrégé $BES_0(d)$), 0 étant une barrière instantanément réfléchissante lorsque $d<2$.

Quand $d>1$, R est une sous-martingale de décomposition canonique

(0.1): $R = B + (d-1)H$, *avec* B *brownien réel et* $H_t = \frac{1}{2}\int_0^t ds/R_s$.

Pour tout t positif, notons

(0.2): $T(t) = \inf\{ s : H_s>t \}$ *et* $\tilde{R} = 2\, R\circ T$.

Biane et Yor ont alors montré que

(0.3): $\tilde{R}$ *est le carré d'un* $BES_0(2d-2)$ *(en abrégé* $BESQ_0(2d-2)$ *)* .

Si l'on prend maintenant d dans l'intervalle $]0;1[$, R n'est plus une semi-martingale, mais un processus de Dirichlet qui admet la décomposition canonique de la forme (0.1) , cette fois avec

$$H_t = \frac{1}{2}\, \text{v.p.}\int_0^t ds/R_s = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} (L_t^a(R) - L_t^0(R))\, a^{d-2}\, da ,$$

où nous avons noté ($L_t^a(R)$: $a \in \mathbb{R}_+$, $t\geq 0$) une version bicontinue des temps locaux de R (voir [1], paragraphe V). L'horloge H est fluctuante, au sens où H est une fonctionnelle additive non monotone de R . L'étude du processus de Markov fort $\tilde{R}$ se présente comme cas particulier d'un problème très général soulevé par Rogers et Williams [13] (voir également London et al. [8], Rogers [11], Mc Gill [9] ...).

D'après sa définition, H est croissant sur tout intervalle dans lequel R ne s'annulle pas, et il est aisé de voir que $\tilde{R}$ évolue comme un $BESQ(2d-2)$

tant qu'il reste dans $]0;+\infty[$. La difficulté consiste à savoir comment se comporte $\tilde{R}$ au voisinage d'un temps d'arrêt en lequel il est nul (le point 0 est-il une barrière instantanément réfléchissante, $\tilde{R}$ peut-il sortir continument de 0 ?). Bien que ces questions soient très proches de celles abordées dans [8] et [13], notre approche sera différente, au moins en apparence: nous allons à nous ramener à la situation classique du changement de temps d'un processus de Markov par une fonctionnelle additive croissante (voir Maisonneuve [10]). Plus précisément, si nous notons

$$S_t = \sup\{ H_s : s\leq t \} ,$$

nous avons $T(t) = \inf\{ s : S_s > t \}$; mais, bien sûr, S n'est pas une fonctionnelle additive de R . C'est, par contre, une fonctionnelle additive du couple Markovien $(R;H-S)$. Nous étudierons donc, dans un premier temps, le processus $(R;H-S)$ en décomposant sa mesure d'excursion hors de $(0;0)$, nous en déduirons une description de $\tilde{R}$, et nous justifierons a posteriori l'intérêt de notre travail en montrant que $\tilde{R}$ intervient dans des théorèmes limites pour des browniens changés de temps par certaines horloges fluctuantes.

Dans un second temps, nous étudierons plus généralement les valeurs prises par R en les lignes de niveaux de H : en notant $T(-t) = \inf\{ s : H_s<-t \}$, nous montrerons que le processus à valeurs dans l'espace des mesures σ-finies sur $]0;\infty[$

$$a \longmapsto \mu_{T(-1)}(a) = \sum_{t<T(-1)} 1_{\{ R_t\neq 0 \,;\, H_t=a \}} \, \delta_{R_t} \qquad (a\geq -1) ,$$

est Markovien, continu et nous expliciterons son semi-groupe. Ce résultat peut également être interprèté comme un théorème du type de ceux de Ray et Knight pour la mesure d'occupation de $(R;H)$.

Tout au long de cet article, $(\Omega,\mathcal{F}_t,\mathbb{P})$ désignera un espace probabilisé filtré. Même lorsque nous travaillerons sous une mesure d'excursion (i.e. seulement σ-finie), nous emploierons le langage probabiliste (loi, variable aléatoire ...) au lieu de celui de la théorie de la mesure (mesure image, fonction mesurable ...). Enfin, si $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue croissante, nous noterons φ^{-1} son inverse continue à droite ($\varphi^{-1}(t) = \inf\{ s : \varphi(s)>t \}$).

I ETUDE DE $\tilde{R}$.

<u>1) Un lemme utile.</u> Dans ce paragraphe, nous appliquerons à plusieurs reprises le résultat élémentaire suivant sur les excursions d'un processus de Markov changé de temps:

Soient E un espace polonais, x_0 un point de E , et X un processus de Markov fort pour lequel x_0 est régulier. Désignons par ℓ un temps local en x_0 pour X au sens de Blumenthal et Getoor [4] (c'est-à-dire que ℓ est une fonctionnelle additive positive de X qui ne croît que quand X_t ou X_{t-} est nul), et par n la mesure d'Itô [7] des excursions de X hors de x_0 associée à ℓ . Nous noterons $x = (x(t) : t\le v)$ l'excursion générique, et v sa durée de vie.

Considérons encore $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne et posons

$$A(t) = \int_0^t f(X_s)\, ds \ , \quad a(t) = \int_0^t f(x(s))\, ds \ .$$

Nous supposerons de plus que

(I.1): $\quad \mathbb{P}_{x_0}$ *p.s. pour tout* t *,* $A(t) < \infty$ *; et* n *p.s. ,* $a(v) > 0$.

Lemme I.1. *Si* $\ell\circ A^{-1}$ *est un temps local en* x_0 *pour* $X\circ A^{-1}$ *(au sens de Blumenthal et Getoor), alors la mesure d'Itô des excursions de* $X\circ A^{-1}$ *hors de* x_0 *est l'image de* n *par l'application*

$$x \longmapsto x\circ a^{-1} \quad \textit{(avec la convention } x(\infty) = x_0 \textit{).}$$

Preuve. Montrons tout d'abord que les intervalles d'excursions de $X\circ A^{-1}$ sont les images par A des intervalles d'excursions de X : $\ell\circ A^{-1}$ étant continu, pour tout $t\ge 0$,nous avons

$$(\ell\circ A^{-1})^{-1}(t) = A\circ\ell^{-1}(t) \quad \text{et} \quad (\ell\circ A^{-1})^{-1}(t-) = A\circ\ell^{-1}(t-) \ .$$

Par conséquent, si $\ell^{-1}(t-)<\ell^{-1}(t)$, $]\ell^{-1}(t-);\ell^{-1}(t)[$ est un intervalle d'excursion pour X , et d'après (I.1), $A\circ\ell^{-1}(t-) < A\circ\ell^{-1}(t)$. Ainsi, $](\ell\circ A^{-1})^{-1}(t-);\ (\ell\circ A^{-1})^{-1}(t)[$ est un intervalle d'excursion pour $X\circ A^{-1}$.

Réciproquement, si $(\ell\circ A^{-1})^{-1}(t-) < (\ell\circ A^{-1})^{-1}(t)$, c'est-à-dire si $A\circ\ell^{-1}(t-) < A\circ\ell^{-1}(t)$, alors $\ell^{-1}(t-) < \ell^{-1}(t)$; et $]\ell^{-1}(t-);\ \ell^{-1}(t)[$ est un intervalle d'excursion de X .

Enfin, A étant une fonctionnelle additive, pour tout $s\ge 0$,

$$X\circ A^{-1}((\ell\circ A^{-1})^{-1}(t-) + s) = X(\ell^{-1}(t-) + \inf\{ u : \int_0^u f\circ X(\ell^{-1}(t-) + r)\, dr > s \}),$$

ce qui entraine le lemme (il suffit de raisonner sur les processus de comptage).□

<u>2) Excursions de (R;H-S) .</u> La décomposition des excursions de $(R;H-S)$ que nous allons donner découle des résultats obtenus dans [2] pour $(R;H)$ et de l'analogue suivant d'une identité en loi pour le mouvement brownien dûe à P. Lévy: introduisons les changements de temps

$$\alpha(t) = \inf\{ s : \int_0^s 1_{\{H_u<S_u\}}\, du > t \} \quad , \quad \beta(t) = \inf\{ s : \int_0^s 1_{\{H_u<0\}}\, du > t \}$$

(on vérifie aisément que ces quantités sont finies p.s.). Nous avons le

Lemme I.2. *Les processus* $(R;H-S)_{\alpha(.)}$ *et* $(R;H)_{\beta(.)}$ *ont même loi .*

Preuve. Pour tout $\varepsilon>0$, notons

$$\alpha(\varepsilon,t) = \inf\{s: \int_0^s 1_{\{H_u-S_u<-\varepsilon\}}\, du > t\} \ , \quad \beta(\varepsilon,t) = \inf\{s: \int_0^s 1_{\{H_u<-\varepsilon\}}\, du > t \}$$

quantités qui sont finies p.s. pour tout t . Comme $\int_0^s 1_{\{H_u-S_u<-\varepsilon\}}\, du$ converge en croissant quand ε décroît vers 0 vers $\int_0^s 1_{\{H_u<S_u\}}\, du$, alors p.s. pour tout t , $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \alpha(\varepsilon,t) = \alpha(t)$ et de même $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \beta(\varepsilon,t) = \beta(t)$. Ainsi,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} (R;H-S)_{\alpha(\varepsilon,t)} = (R;H-S)_{\alpha(t)} \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (R;H)_{\beta(\varepsilon,t)} = (R;H)_{\beta(t)} ,$$

et il nous suffit de vérifier que $(R;H-S)_{\alpha(\varepsilon,.)}$ et $(R;H)_{\beta(\varepsilon,.)}$ ont même loi. A cette fin, introduisons les suites de temps d'arrêt p.s. finis

$$\begin{aligned} U(\varepsilon,0) &= V(\varepsilon,0) \equiv 0 , \\ U(\varepsilon,2n+1) &= \inf\{ t>U(\varepsilon,2n) : (H-S)_t<-\varepsilon \} , \\ U(\varepsilon,2n+2) &= \inf\{ t>U(\varepsilon,2n+1) : (H-S)_t=0 \} , \\ V(\varepsilon,2n+1) &= \inf\{ t>V(\varepsilon,2n) : H_t<-\varepsilon \} , \text{ et} \\ V(\varepsilon,2n+2) &= \inf\{ t>V(\varepsilon,2n+1) : H_t=0 \} \end{aligned}$$

($U(\varepsilon,n+1)$ est le premier temps après $U(\varepsilon,n)$ en lequel $H-S$ atteint 0 quand n est impair et $-\varepsilon$ quand n est pair; la construction est la même pour $V(\varepsilon,.)$ relativement à H). H étant croissant sur tout intervalle sur lequel R ne s'annulle pas, pour tout entier n , $R_{U(\varepsilon,2n+1)}$ et $R_{V(\varepsilon,2n+1)}$ sont nuls. Il découle alors de la propriété forte de Markov et de ce que H est une fonctionnelle additive de R que

(I.2): $\{ ((R;H-S)_{U(\varepsilon,2n+1)+t} : 0\le t\le U(\varepsilon,2n+2) - U(\varepsilon,2n+1)) , n \in \mathbb{N} \}$
est une suite de processus indépendants, chacun ayant la même loi que
$((R;H-\varepsilon)_t : 0\le t\le T(\varepsilon))$ *(c.f. définition* (0.2)*) .*

Il en est de même pour

(I.2'): $\{ ((R;H)_{V(\varepsilon,2n+1)+t} : 0 \le t \le V(\varepsilon,2n+2) - V(\varepsilon,2n+1)) , n \in \mathbb{N} \}$.

Notons J (= $J(\varepsilon)$) le processus obtenu en "recollant bout-à-bout" la suite (I.2) , et J' celui obtenu de même à partir de (I.2'). J et J' ont même loi et sont construits à partir de $(R;H-S)$ et de $(R;H)$ en effaçant des intervalles de temps qui apportent une contribution nulle respectivement aux intégrales $\int_0^s 1_{\{H_u - S_u < -\varepsilon\}} du$ et $\int_0^s 1_{\{H_u < -\varepsilon\}} du$. Nous avons donc

$$(R;H-S)_{\alpha(\varepsilon,t)} = J_{\gamma(\varepsilon,t)} \quad \text{où} \quad \gamma(\varepsilon,t) = \inf\{ s : \int_0^s 1_{\{J_u < -\varepsilon\}} du > t\} ,$$

$$(R;H)_{\beta(\varepsilon,t)} = J'_{\gamma'(\varepsilon,t)} \quad \text{où} \quad \gamma'(\varepsilon,t) = \inf\{ s : \int_0^s 1_{\{J'_u < -\varepsilon\}} du > t\} .$$

Ainsi, $(R;H-S)_{\alpha(\varepsilon,.)}$ et $(R;H)_{\beta(\varepsilon,.)}$ ont même loi, ce qui prouve le lemme.□

Rappelons maintenant le principal résultat de [2]: soit $d_n(t)$ ($n \in \mathbb{N}$, $t \ge 0$), le nombre de descentes de 0 à -2^{-n} que H accomplit sur l'intervalle de temps $[0;t]$. $2^{n(d-1)} d_n(t)$ converge p.s. pour tout t quand n tend vers l'infini vers $\delta(t)$, le temps local en $(0;0)$ de $(R;H)$. Le processus des excursions de $(R;H)$ hors de $(0;0)$ est un processus de Poisson ponctuel (en abrégé p.p.p.) à valeurs dans Ω^{abs} , l'espace des trajectoires continues, issues de $(0;0)$, et absorbées après le premier retour à l'origine. Nous désignons par m la mesure caractéristique de ce p.p.p., et afin de la décrire, nous introduisons les

Notations. - *Pour tout* $\omega = (\omega^1,\omega^2) \in \Omega^{abs}$ *, nous posons*
$i = \inf\{\omega^2(r) : r \ge 0\}$, $u = \inf\{r>0 : \omega^2(r)=0\}$ *, et* $v = \inf\{r>0 : \omega(r)=(0;0)\}$.

- *Pour tout* $x>0$ *, nous désignons par* R^x *un* $BES_x(d)$. R^x *est un processus de Dirichlet de décomposition canonique* $R^x = x + B + (d-1)H^x$ *, avec*

$$H^x_t = \frac{1}{2} \text{ v.p.}\int_0^t ds/R^x_s = \frac{1}{2} \int_0^\infty (L^a_t(R^x) - L^0_t(R^x)) \, a^{d-2} \, da .$$

Nous notons encore $\xi^x = \inf\{ t : R^x_t=0 \}$ *et* $T^x(0) = \inf\{ t>0 : H^x_t=0 \}$ *(* H^x *étant strictement croissant sur* $]0;\xi^x[$ *, on a* $\xi^x < T^x(0)$ *).*

m se décompose alors de la façon suivante (c.f. [2]):

(I.3) : *i) La loi de* $\omega^1(u)$ *sous* m *est donnée par*
$m(\omega^1(u)=0) = 0$ et $m(\omega^1(u) \in dx) = \frac{1-d}{\Gamma(d)} x^{d-2} dx$ ($x>0$) .

ii) Sous m *, conditionnellement à* $\omega^1(u) = x$ $(x>0)$*, les processus* $(\omega(u+r) : 0\le r\le v-u)$ *et* $((\omega^1(u-r);-\omega^2(u-r)) : 0\le r\le u)$ *sont indépendants et ont même loi que* $((R^x;H^x)_t : 0\le t\le T^x(0))$.

Cette description entraine que la condition (I.1) du lemme I.1 est satisfaite pour $X = (R;H)$, $f(r,h) = 1_{h<0}$ et $A^{-1} = \beta$. Montrons maintenant

(I.4): $\delta\circ\beta$ *est un temps local en* $(0;0)$ *pour* $(R;H)_{\beta(.)}$.

Par construction, $d_n(\beta(t))$ est le nombre de descentes de 0 à -2^{-n} que $H_{\beta(.)}$ a effectuées sur l'intervalle de temps $[0;t]$. D'après (I.3), $\delta(\beta(t)) = \lim 2^{n(d-1)}d_n(\beta(t))$ est une fonctionnelle additive de $(R;H)_{\beta(.)}$ qui ne croît que quand $H_{\beta(.)}$ est nul. Or, p.s. pour tout t , si $H_{\beta(t)}$ est nul, $R_{\beta(t)}$ l'est également (en effet, si $R_{\beta(t)} \neq 0$, alors H est strictement croissant au voisinage de $\beta(t)$, et H est strictement positif immédiatement à droite de $\beta(t)$, ce qui contredit la définition de β). Il nous reste à voir que $\delta\circ\beta$ est continu: comme δ est continu, les sauts de $\delta\circ\beta$ ne peuvent provenir que de ceux de β . Si $\beta(t-)<\beta(t)$, alors $H_r\ge 0$ pour presque tout r de $[\beta(t-);\beta(t)]$, et d'après la description (I.3.ii), ceci n'est possible que si $H>0$ sur $]\beta(t-);\beta(t)[$. Comme δ ne croît que quand H est nul, nous avons bien $\delta(\beta(t-)) = \delta(\beta(t))$, ce qui prouve notre assertion.

Notons $\hat{d}_n(s)$ le nombre de descentes de 0 à -2^{-n} que $H-S$ a accomplies sur $[0;s]$. Par construction,

$$\hat{d}_n(s) = \hat{d}_n(\alpha(t)) \quad \text{pour} \quad t = \int_0^s 1_{\{H_u<S_u\}}\,du \ ,$$

et comme, d'après le lemme I.2 et (I.4) , $2^{n(d-1)}\hat{d}_n(\alpha(t))$ converge quand n tend vers l'infini vers $\hat{\delta}\circ\alpha(t)$, le temps local en $(0;0)$ de $(R;H-S)_{\alpha(.)}$, p.s., pour tout s , $\lim 2^{n(d-1)}\hat{d}_n(s) = \hat{\delta}(s) \overset{\text{déf}}{=} \hat{\delta}\circ\alpha(t)$. D'autre part, les applications

$$s \longmapsto t = \int_0^s 1_{\{H_u<S_u\}}\,du \quad \text{et} \quad s \longmapsto \hat{\delta}\circ\alpha(t)$$

étant continues, $\hat{\delta}$ est une fonctionnelle additive continue de $(R;H-S)$ qui ne croît que quand R et $H-S$ sont nuls (puisque $H-S$ est croissant au sens large sur tout intervalle sur lequel R ne s'annulle pas). Finalement, $\hat{\delta}$ est un temps local en $(0;0)$ pour $(R;H-S)$.

Le processus des excursions de $(R;H-S)$ hors de $(0;0)$ est un p.p.p. à valeurs dans Ω^{abs} ; nous notons $\hat{m}$ sa mesure caractéristique. Elle est décrite par le théorème suivant (voir figure 1):

Théorème I.3. *i) La loi de* $\omega^1(u)$ *sous* $\hat{m}$ *est donnée par*

$$\hat{m}(\ \omega^1(u)=0\ ) = 0 \quad et \quad \hat{m}(\ \omega^1(u) \in dx\ ) = \frac{1-d}{\Gamma(d)}\ x^{d-2}\ dx \quad (\ x>0\ ) .$$

ii) Sous $\hat{m}$ *, conditionnellement à* $\omega^1(u) = x$ *(* $x>0$ *) , les processus* $(\omega(u+r)\ :\ 0\le r\le v-u)$ *et* $(\omega(u-r)\ :\ 0\le r\le u)$ *sont indépendants . Le premier est distribué comme* $((R^x;0)_r\ :\ 0\le r\le \xi^x)$ *et le second comme* $((R^x;-H^x)_r\ :\ 0\le r\le T^x(0))$.

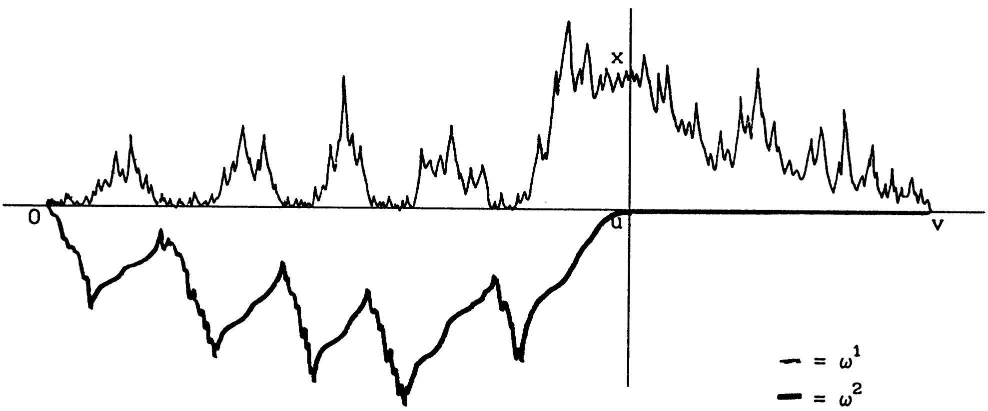

figure 1

Preuve. Commençons par montrer

(I.5): $\hat{m}$ *p.s.,* $\omega^2 \equiv 0$ *sur* $[u,v]$ *,* $u>0$ *, et* $\omega^2<0$ *sur* $]0;u[$.

A cette fin, supposons qu'il existe $r \in\ ]u,v[$ tel que $\omega^2(r)<0$. De la définition même de u , si $g(r) = \sup\{\ r'<r\ :\ \omega^2(r')=0\ \}$ est le dernier instant avant r en lequel ω^2 est nulle, alors $g(r)>0$. D'autre part, ω^2 n'est croissante sur aucun voisinage de $g(r)$, et donc, $\hat{m}$ p.s., $\omega^1(g(r)) = \omega^2(g(r)) = 0$, c'est-à-dire $g(r)=v$, ce qui est contraire à notre hypothèse. Ainsi, $\omega^2 \equiv 0$ sur $[u,v]$, et $v = \inf\{\ r>u\ :\ \omega^1(r)=0\ \}$. Si maintenant ω est une excursion telle que $u=0$, alors $v = \inf\{\ r>0\ :\omega^1(r)=0\ \}$, et le temps local en 0 de ω^1 est identiquement nul. Désignons par τ l'inverse continu à droite de $L^0(R)$. Si $\hat{m}(u=0) \neq 0$, il existe p.s. un instant t tel que $H_{\tau(t)}>H_{\tau(t-)} = \sup\{\ H_{\tau(s)}\ :\ s<t\ \}$, ce qui contredit le corollaire 1 de Rogers [12] (rappelons que H_τ est un processus stable d'exposant $2-d>1$, voir Biane et Yor [3] p. 24). Ainsi, $\hat{m}(u=0) = 0$, et la définition de u entraine que ω^2 est strictement négative sur $]0,u[$.

Il découle de (I.5) et du lemme I.1 que la mesure d'excursion de $(R;H-S)_{\alpha(.)}$ est l'image de $\hat{m}$ par l'application $\phi\ :\ \omega \longmapsto \phi(\omega)$, où $\phi(\omega)\ :\ [0,u] \longrightarrow \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $\phi(\omega)(r) = \omega(r)$ si $r \in [0,u[$, $\phi(\omega)(u) = (0;0)$; et de même, (I.3), (I.4) et le lemme I.1 entrainent que la mesure d'excursion de $(R;H)_{\beta(.)}$ est l'image de m par l'application précédente. Nous déduisons du lemme I.2 que le processus $(\omega(u-r)\ :\ 0\le r\le u)$ a même loi sous m que sous $\hat{m}$, ce qui établit i) et la dernière partie de ii) grâce à (I.3). Enfin la première partie de ii) découle de la propriété de Markov forte appliquée au temps d'arrêt u .□

Ouvrons ici une petite parenthèse pour donner une application très simple de ce résultat: considérons t un temps exponentiel indépendant de paramètre θ , et k un réel positif. D'après la théorie des excursions, on a

$$\mathbb{E}[\ 1_{\{(H-S)_t<0\}}\ \exp(k(H-S)_t)\ ] =$$

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty \exp(-\theta\ \hat{\delta}^{-1}(t))\ dt\ ]\ \left[\int \hat{m}(d\omega) \int_0^V \theta\ e^{-\theta r} \exp(k\omega^2(r))\ 1_{\{\omega^2(r)<0\}}\ dr\right],$$

et de même

$$\mathbb{E}[\ 1_{\{H_t<0\}}\ \exp(k\ H_t)\ ] =$$

$$\mathbb{E}[\int_0^\infty \exp(-\theta\ \delta^{-1}(t))\ dt\ ]\ \left[\int m(d\omega) \int_0^V \theta\ e^{-\theta r} \exp(k\omega^2(r))\ 1_{\{\omega^2(r)<0\}}\ dr\right].$$

D'une part, nous déduisons de la propriété de scaling et des définitions de δ et $\hat{\delta}$ que δ^{-1} et $\hat{\delta}^{-1}$ sont deux subordinateurs stables d'exposant $(1-d)/2$ (voir [2] prop.II.4); et d'autre part, d'après (I.3) et le théorème I.3, $\int_0^V \theta\ e^{-\theta r} \exp(k\omega^2(r))\ 1_{\{\omega^2(r)<0\}}\ dr$ a même intégrale sous m que sous $\hat{m}$.

Par conséquent, $\mathbb{E}[\ \exp(k(H-S)_t)\ |\ (H-S)_t<0\ ] = \mathbb{E}[\ \exp(k\ H_t)\ |\ H_t<0\ ]$. Cette relation étant satisfaite pour tout θ , la loi de $(H-S)_1$ conditionnellement à $(H-S)_1<0$ est la même que celle de H_1 conditionnellement à $H_1<0$. D'après la proposition IV.3 de [2], nous avons donc pour tout $x>0$,

$$\mathbb{P}((S-H)_1 \in dx\ |\ S_1-H_1>0\ ) = 2(1-d)(2\pi)^{-1/2} \exp\{\ -(1-d)^2x^2/2\ \}\ dx\ .$$

Il serait bien sûr intéressant de pouvoir calculer $\mathbb{P}(\ S_1-H_1=0\ )$, ce qui permettrait de déterminer complètement la loi de S_1-H_1 ; malheureusement les calculs deviennent vite très compliqués, et nous n'avons pu les mener à bout.

Enfin, comme nous l'avons signalé en introduction, S est une fonctionnelle additive de $(R;H-S)$. Plus précisément, nous avons le

Lemme I.4. $\mathbb{P}$ *p.s., pour tout* $t\geq 0$, $S_t = \frac{1}{2}\int_0^t 1_{\{H_u=S_u\}}\frac{du}{R_u}$.

Preuve. Si à l'instant t , H et S sont égaux et R est non nul, alors H est dérivable en t et sa dérivée vaut $1/(2R_t)$; S est donc dérivable à droite en t , sa dérivée à droite valant également $1/(2R_t)$. Comme S ne croît que quand $H = S$, il suffit pour prouver le lemme, de montrer que la mesure dS_t ne charge pas l'ensemble des zéros de R . Or, nous verrons dans la proposition I.6 (qui est établie indépendement de cette partie) que pour tout $t>0$, $\mathbb{P}(\tilde{R}_t=0) = 0$ (rappelons que $\tilde{R} = 2\, R\circ S^{-1}$), et donc

$$\mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}_+} 1_{\{\tilde{R}_t=0\}}\,dt\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_{\mathbb{R}_+} 1_{\{R_t=0\}}\,dS_t\Big] = 0 \quad .\square$$

<u>3) Une description de $\tilde{R}$.</u> Il ne nous reste plus qu'à appliquer le lemme I.1 à $X = (R;H-S)$, $A = S$ et $A^{-1} = T$. Grâce à la décomposition des excursions de $(R;H-S)$ donnée par le théorème I.3, la condition (I.1) est satisfaite. Pour montrer que $\tilde{\delta} = \hat{\delta}\circ S^{-1}$ est un temps local en $(0;0)$ de $(R;H-S)_{S^{-1}(t)} = (\frac{1}{2}\tilde{R};0)_t$, commençons par remarquer que si $\hat{J}(n;t)$ désigne le nombre d'excursions de $(R;H-S)$ effectuées avant t telles que $\omega^1(u)>2^{-n}$, alors p.s. pour tout t ,

$$\lim_{n\uparrow\infty} 2^{n(d-1)}\,\hat{J}(n;t) = \hat{\delta}(t)/\Gamma(d)$$

(ceci découle, grâce au théorème I.3 i. des mêmes arguments que ceux employés par Williams [14] pour montrer le théorème de Lévy sur le nombre de descentes du brownien par la théorie des excursions). Or par construction, d'après (I.5) et le lemme I.4, pour tout $t\geq 0$,

$$\hat{J}(n;S^{-1}(t)) = \#\,\{\,s<t\ :\ S^{-1}(s-)<S^{-1}(s)\ \text{ et }\ R_{S^{-1}(s)}>2^{-n}\,\}$$
$$= \#\,\{\,s<t\ :\ \tilde{R}_{s-}=0\ \text{ et }\ \tilde{R}_s>2^{-n+1}\,\}\ ,$$

et donc

$$\tilde{\delta}(t) = \lim_{n\uparrow\infty} 2^{n(d-1)}\,\#\,\{\,s<t\ :\ \tilde{R}_{s-}=0\ \text{ et }\ \tilde{R}_s>2^{-n+1}\,\} = \hat{\delta}\circ S^{-1}(t)$$

est une fonctionnelle additive de $\tilde{R}$ qui ne croît que sur $\{\,\tilde{R}_{s-}=0\,\}$. Les sauts de $\tilde{\delta}$ ne peuvent provenir que de ceux de S^{-1} . Si $S^{-1}(s-)<S^{-1}(s)$, alors d'après le lemme I.4, $H<S$ pour presque tout r de $[S^{-1}(s-)\,,S^{-1}(s)]$; et grâce à (I.5), ceci n'est possible que si $H<S$ pour tout r de $]S^{-1}(s-),$ $S^{-1}(s)[$. Comme $\hat{\delta}$ ne croît que quand H et S sont égaux, nous avons $\hat{\delta}\circ S^{-1}(s-) = \hat{\delta}\circ S^{-1}(s)$. $\hat{\delta}\circ S^{-1}$ est un temps local en 0 pour $\tilde{R}$. Notons $\tilde{m}$ la mesure caractéristique du p.p.p. des excursions de $\tilde{R}$ hors de 0 à

valeurs dans $\Xi = \{ \omega : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, ω continue et absorbée en $0 \}$ (ω n'est pas nécessairement issue de 0), et énonçons le

Théorème I.5. *Sous* $\tilde{m}$ *, le processus canonique a pour loi initiale*

$$\tilde{m}(\omega(0) = 0) = 0 \quad et \quad \tilde{m}(\ \omega(0) \in dx\ ) = 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} x^{d-2} dx \quad (\ x>0\ ),$$

et est le carré d'un processus de Bessel de dimension $2d-2$ *tué en* 0 .

Preuve. La loi initiale découle immédiatement du lemme I.1 et du théorème I.3 i) . Considérons $x>0$ et $\sigma(t) = \inf\{\ s\ :\ H^x_s > t\ \}$ ($t<H^x(\xi^x)$) . Une extension immédiate du lemme I.3 de Biane et Yor [3] montre que

$$(\ 2R_{\sigma(t)}\ :\ 0 \le t \le H^x(\xi^x)\ )\ \text{ est un }\ BESQ_{2x}(2d-2)\ \ (\text{tué en } 0\ ) .$$

Le lemme I.1 et le théorème I.3 ii) entraînent que ($\tilde{m} \mid \omega(0) = 2x$) est la loi du $BESQ_{2x}(2d-2)$.□

Remarque. Nous avons vu dans la preuve du lemme I.4 que la mesure d'occupation de $\tilde{R}$ ne charge pas $\{0\}$. Le coefficient de retard de $\tilde{R}$ en 0 est nul, c'est-à-dire que 0 est une barrière instantanément réfléchissante pour $\tilde{R}$. $\tilde{R}$ est donc complètement caractérisé par la donnée de sa mesure d'excursion (Itô [7], théorème 6.1). Enfin, pour répondre à une question posée dans l'Introduction, i) nous dit que $\tilde{R}$ ne sort de 0 que par sauts.

Cette description nous permet par exemple de déterminer la loi de la durée de vie et de la hauteur de l'excursion: nous avons d'une part

$$\tilde{m}(\ v \in dt\ ) = 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} \int_0^\infty x^{d-2}\ \mathbb{P}(\ \xi(x,2d-2) \in dt\ )\ dx ,$$

où $\xi(x,2d-2)$ désigne la durée de vie du carré de Bessel de dimension $2d-2$ issu de x . D'après Getoor [5] et Getoor et Sharpe [6], la loi de $\xi(x,2d-2)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(\ \xi(x,2d-2) \in dy\ ) = \left(\frac{x^2}{2} \right)^{1-d/2} \frac{\exp(-x^2/2y)}{\Gamma(1-d/2)}\ y^{-1+d/2}\ dy ,$$

et donc

$$\tilde{m}(\ v \in dt\ ) = 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} \int_0^\infty x^{d-2}\ (x/2)^{2-d}\ (\Gamma(2-d)\ t^{3-d})^{-1}\ \exp-(x/2t)\ dt$$

$$= \frac{1-d}{\Gamma(d)\ \Gamma(2-d)}\ t^{d-2}\ dt = \frac{t^{d-2}}{\pi}\ \sin d\pi\ dt .$$

De même, $x \longmapsto x^{2-d}$ est une fonction d'échelle pour le $BESQ_x(2d-2)$, de sorte que, si h désigne la hauteur de l'excursion générique ω ,

$$\tilde{m}(\ h>y\ ) = 2^{1-d} \frac{1-d}{\Gamma(d)} \left[\int_0^y x^{d-2}\ x^{2-d}\ y^{d-2}\ dx + \int_y^\infty x^{d-2}\ dx \right] = 2^{1-d} \frac{2-d}{\Gamma(d)}\ y^{d-1} .$$

Nous allons maintenant compléter l'étude de $\tilde{R}$ en explicitant, grâce au calcul stochastique, son semi-groupe de transition :

Proposition I.6. *Si* k , x , *et* t *sont trois réels positifs,*

$$\mathbb{E}_x[\ \exp -k\,\tilde{R}_t\ ] = \exp(-x/2t)\ [(1+2kt)^{1-d} \exp(x/(2+4kt)) - (2kt)^{1-d}\ ] .$$

En particulier,

$$\mathbb{P}_0(\ \tilde{R}_t \in dy\ ) = \frac{1-d}{\Gamma(d)}\ (2t)^{1-d}\ y^{d-2}\ (1 - e^{-y/2t})\ dy \qquad (\ y>0\ ) .$$

Preuve. Nous avons vu dans [1] que pour toute fonction f de classe C^1 , si F désigne la primitive de f nulle en 0 ,

$$\exp\{\ R_t^x\ f(H_t^x) + (1-d)F(H_t^x) - \frac{1}{2}\int_0^t (f' + f^2)(H_s^x)\ ds\ \}$$

est une martingale locale. Pour $a>0$, $N \in \mathbb{N}$, en prenant $f(y) = 1/(y-a)$, on obtient par application du théorème d'arrêt

$$\mathbb{P}_x(\ T^x(a) > T^x(-N)\ ) = \exp(-x/a)\ [a/(a+N)]^{1-d}$$

($T^x(y) = \inf\{\ t : H_t^x = y\ \}$) . D'autre part, si l'on prend $b>a$ et $f(y) = 1/(y-b)$, on obtient de même

$$\mathbb{E}_x[\ \exp\{\ R_{T^x(a)}/(a-b)\}\ ((b-a)/a)^{1-d}\ 1_{\{\ T^x(a)\ <\ T^x(-N)\ \}}\ ]$$
$$+\ \exp(-x/a)\ \left[\ \frac{b+N}{b}\cdot\frac{a}{a+N}\ \right]^{1-d} = \exp(-x/b) ,$$

d'où, en faisant tendre N vers l'infini et en posant $k = 1/(b-a)$,

$$\mathbb{E}_x[\ \exp(-k\ R_{T^x(a)}\ )\ ] = \mathbb{E}_{2x}[\ \exp -\frac{k}{2}\ \tilde{R}_t\ ]$$
$$= \exp(-x/t)\ [\ (1+kt)^{1-d}\ \exp(x/(1+kt)) - (kt)^{1-d}\ ] .$$

Nous avons donc la première partie de la proposition. La seconde, quant à elle, découle de la première en prenant $x = 0$ et en inversant la transformée de Laplace.□

4) Théorèmes limites relatifs à certains problèmes d'horloges fluctuantes :

Pour conclure ce paragraphe, nous allons montrer que $\tilde{R}$ intervient de façon naturelle dans le problème, dit de l'horloge fluctuante, posé par Rogers et Williams [13] : considérons B un mouvement brownien réel, f une fonction localement intégrable, et notons

$$T(f,t) = \inf\{\ s : \int_0^s f(B_u)\ du > t\ \}\ ,\quad \tilde{B}_t = \tilde{B}(f,t) = B_{T(f,t)}$$

(avec la convention $B_\infty = \infty$). Au regard des travaux de Yamada [15] , nous nous intérèssons au comportement asymptotique de $\tilde{B}$ sous l'hypothèse

(H): *Il existe* $\eta \in]0;\frac{1}{2}[$, $\eta'>\eta$ *et* g *fonction continue à support compact, höldérienne d'ordre* η' , *dont la dérivée fractionnaire d'ordre* η *soit* f , *c'est-à-dire que*

$$f = D^{\eta}g : x \longmapsto \frac{1}{\Gamma(-\eta)} \int_{-\infty}^{x} (g(x) - g(a))(x-a)^{-1-\eta}\, da .$$

Nous avons le

Théorème I.7. *Prenons* $d = (1-2\eta)/(1-\eta)$. *Alors*

i) Si $\int_{\mathbb{R}} g(a)da < 0$, *la suite de processus* $(k^{1/(\eta-1)}\tilde{B}_{kt} : t\geq 0)$ *converge en loi au sens des distributions finies dimensionnelles quand* $k\uparrow\infty$ *vers*

$$\left(\left[\frac{4}{\Gamma(-\eta)} \int_{\mathbb{R}} g(a)\ da \right]^{1/(\eta-1)} \tilde{R}_t^{\,1/(1-\eta)} : t\geq 0 \right) .$$

ii) Si $\int_{\mathbb{R}} g(a)da > 0$, *alors pour tout* t *positif,* $k^{1/(\eta-1)}\tilde{B}_{kt}$ *converge vers* 0 *en probabilité quand* k *tend vers l'infini.*

Preuve. Posons $f_k(x) = f(k^{1/2}x)$. Yamada [15] a montré que sous l'hypothèse (H),

(I.6): $k^{(1+\eta)/2} \int_0^t f_k(B_u)\ du$ *converge p.s. uniformément sur tout compact vers*

$$\frac{1}{\Gamma(-\eta)}\left[\int_{\mathbb{R}} g(a)\ da \right] H(-1-\eta;t) \ , \text{ où } H(-1-\eta;t) = \int_0^{\infty} (L_t^a(B) - L_t^0(B))\ a^{-(1+\eta)}da$$

(la constante $\Gamma(-\eta)$ manque dans le théorème II.2 de Yamada; elle doit en effet être rajoutée dans son égalité (2.11) afin d'être en accord avec son lemme I.3). Supposons maintenant que $\int g(a)da < 0$. Il découle de (I.6) que

$$\lim_{k\uparrow\infty} T(k^{(1+\eta)/2} f_k, t) = \inf\{ s : \left[\int_{\mathbb{R}} g(a)\ da \right] H(-1-\eta;s)/\Gamma(-\eta) > t \}$$

pour tout temps t en lequel

$$t \longmapsto \inf\{ s : \left[\int_{\mathbb{R}} g(a)\ da \right] H(-1-\eta;s)/\Gamma(-\eta) > t \}$$

est continue, c'est-à-dire pour tout t p.s., comme on le voit aisément à l'aide de la proposition IV.5 de [1]. D'une part, d'après le paragraphe V de [1], si l'on pose $A(t) = \int_0^t 1_{\{B_s>0\}}\ B_s^{-2\eta}\, ds$ et $d = \frac{1-2\eta}{1-\eta}$, (R;H) a même loi que $(B\circ A^{-1}(.)/(1-\eta)\ ;\ H(-1-\eta;A^{-1}(.))/(2-2\eta))$; et c'est donc aussi le cas pour $\left[\frac{1-\eta}{2}\ \tilde{R}(./(2-2\eta))\right]^{1/(1-\eta)}$ et $B(\inf\{ s : \left[\int_{\mathbb{R}} g(a)\ da\right] H(-1-\eta;s)/\Gamma(-\eta) > .\ \})$.

Ainsi, $(\tilde{B}(k^{(1+\eta)/2}f_k,t)\ :\ t\geq 0)$ converge au sens des distributions finies dimensionnelles vers $\left[\left[\frac{1-\eta}{2}\tilde{R}\left[\frac{\Gamma(-\eta)\ t}{(\int g(a)da)(2-2\eta)}\right]\right]^{1/(1-\eta)}\ :\ t\geq 0\right]$, processus qui, par scaling, a même loi que

$$\left[\left[\frac{4}{\Gamma(-\eta)}\int_{\mathbb{R}} g(a)\ da\right]^{1/(\eta-1)}\tilde{R}_t^{\ 1/(1-\eta)}\ :\ t\geq 0\right].$$

D'autre part, nous déduisons de l'égalité en loi

$$((B_{kt};\int_0^{kt} f(B_u)\ du)\ :\ t\geq 0)\ \stackrel{\mathcal{L}}{=\!=}\ (k^{1/2}B_t;\ k\int_0^t f_k(B_u)\ du)\ :\ t\geq 0)$$

que

$$(k^{1/(\eta-1)}\tilde{B}(f,kt)\ :\ t\geq 0)\ \stackrel{\mathcal{L}}{=\!=}\ (\tilde{B}(k^{(1+\eta)/2}f_k,t)\ :\ t\geq 0)\ ,$$

ce qui prouve i).

Enfin, si $\int g(a)da > 0$, alors

$$\lim_{k\uparrow\infty} T(k^{(1+\eta)/2}\ f_k,t) = \inf\{\ s\ :\ \left[\int_{\mathbb{R}} g(a)\ da\right] H(-1-\eta;s) < \Gamma(-\eta)t\ \}\ ,$$

temps en lequel B est nul (puisque $\Gamma(-\eta) < 0$, voir lemme III.7 de [1]), et ii) est démontré.□

II Un théorème de Ray-Knight pour la mesure d'occupation de (R;H) .

Intéressons nous maintenant à la description des valeurs prises par R sur l'ensemble des temps en lesquels l'horloge H vaut h . Il découle de la décomposition (I.3) des excursions de $(R;H)$ que p.s., pour tout $\varepsilon>0$, $\{\ s\ :\ H_s=h\ \text{ et }\ R_s>\varepsilon\ \}$ est discret. Ainsi,

$$\mu_t(h) = \sum_{s<t} 1_{\{\ R_s\neq 0\ ;\ H_s=h\ \}}\ \delta_{R_s} \qquad (\ t>0\ ,\ h\in\mathbb{R}\ )$$

(où δ_x désigne la masse de Dirac au point x , à ne pas confondre avec $\delta(t)$, le temps local à l'instant t de $(R;H)$) est une mesure σ-finie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus (c.f. corollaire III.10 de [1]), p.s. pour tout h ,

(II.1): $$\lambda_t^h \stackrel{(\text{déf})}{=\!=} 2\langle\mu_t(h);Id\rangle = 2\int_{]0;\infty[} x\ \mu_t(h)(dx)\ <\infty\ ,$$

et $(\ \lambda_t^h\ :\ h\in\mathbb{R}\ ,\ t\geq 0\ )$ est une version mesurable des densités d'occupation de H , c'est-à-dire que pour toute fonction f borélienne bornée, on a

$$\int_0^t f(H_s)\ ds\ =\ \int_{\mathbb{R}} f(h)\ \lambda_t^h\ dh\ .$$

Nous en déduisons la désintégration suivante de la mesure d'occupation de $(R;H)$: pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée,

$$\text{(II.2):} \qquad \int_0^t \phi(R_s;H_s)\, ds = 2 \int_{\mathbb{R}} dh \int_{\mathbb{R}_+^*} \phi(x;h) \times \mu_t(h)(dx) .$$

Notons $\mathcal{M}_p$ l'ensemble des mesures μ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs entières, dont le support peut être rangé en une suite décroissante éventuellement finie (x_n) de réels strictement positifs (i.e. $\mu = \sum \alpha_n \delta_{x_n}$, $\alpha_n \in \mathbb{N}^*$). $\mathcal{M}_p$, muni de la topologie de la convergence vague, est un espace métrisable localement compact. Rappelons que $T(-t)$ désigne le premier temps d'atteinte de $-t$ par H , et énonçons le

Lemme II.1. *Le processus* $h \longmapsto \mu_{T(-1)}(h)$ *admet une version continue.*

Preuve. Soit f une fonction positive à support compact et de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$. Pour toute fonction φ borélienne bornée, nous avons d'après (II.2)

$$\text{(II.3):} \qquad \int_0^{T(-1)} \varphi(H_s)\, f(R_s)/R_s\, ds = 2 \int_{-1}^{\infty} dh\, \varphi(h) < \mu_{T(-1)}(h);f > .$$

D'autre part, si nous définissons $\lambda_t^h(f)$ ($h \in \mathbb{R}$) par la formule de Tanaka

$$\text{(II.4):} \quad f(R_t)\, 1_{\{H_t>h\}} = \int_0^t 1_{\{H_s>h\}} f'(R_s)\, dR_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1_{\{H_s>h\}} f''(R_s)\, ds + \frac{1}{2} \lambda_t^h(f) ,$$

la formule d'Itô, valable pour toute fonction g de classe C^2 :

$$f(R_t)g(H_t) = \int_0^t g(H_s)f'(R_s)\, dR_s + \frac{1}{2} \int_0^t g(H_s)f''(R_s)\, ds + \frac{1}{2} \int_0^t g'(H_s)f(R_s) \frac{ds}{R_s} ,$$

entraine que

$$\int_0^t g'(H_s)f(R_s) \frac{ds}{R_s} = \int_{\mathbb{R}} g'(h)\, \lambda_t^h(f)\, dh ,$$

et donc, d'après (II.3), $\lambda_t^h(f) = 2 < \mu_t(h);f >$ pour presque tout h . On montre aisément à l'aide du critère de Kolmogorov, des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy et de la formule (II.4) qu'il existe une version continue de $(t;h) \longmapsto \lambda_t^h(f) - f(R_t)\, 1_{\{H_t>h\}}$. Comme $R_{T(-1)}$ est nul, il existe une version continue de $h \longmapsto < \mu_{T(-1)}(h);f > = \frac{1}{2} \lambda_{T(-1)}^h(f)$. Rappelons qu'il existe une suite $(f_n : n \in \mathbb{N})$ de fonctions positives à support compact et de classe C^∞ qui caractérise la convergence vague dans $\mathcal{M}_p$ (i.e. $h \longmapsto \mu(h)$ est continue si et seulement si pour tout n ,

$h \longmapsto \langle \mu(h) ; f_n \rangle$ est continue); ce qui prouve le lemme.□

Soit $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow [0,1]$ une fonction continue. On note $M\varphi$ le monome

$$M\varphi : \mathcal{M}_p \longrightarrow [0,1] , \quad M\varphi(\sum \alpha_n \delta_{x_n}) = \prod \varphi(x_n)^{\alpha_n} .$$

Rappelons que, d'après le théorème de Stone-Weierstrass, la tribu sur $\mathcal{M}_p$ engendrée par les polynomes (c'est-à-dire les combinaisons linéaires de monomes) est la tribu borélienne. Le principal résultat de ce paragraphe, qui peut être interprété grâce à (II.2) comme un théorème du type de celui de Ray-Knight pour la mesure d'occupation de $(R;H)$ sur $[0;T(-1)]$, est le

Théorème II.2. *Les processus* $(\mu_{T(-1)}(h-1) : 0\le h\le 1)$ *et* $(\mu_{T(-1)}(h) : 0\le h)$ *sont Markoviens. Plus précisément, pour toute* $\varphi :]0,\infty[\longrightarrow [0,1]$ *continue,*

i) Si $-1\le h\le k\le 0$,

$$\mathbb{E}(M\varphi(\mu_{T(-1)}(k)) \mid \mu_{T(-1)}(h)) = C(k-h,\varphi)\, M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)) ,$$

ii) Si $0\le h\le k$,

$$\mathbb{E}(M\varphi(\mu_{T(-1)}(k)) \mid \mu_{T(-1)}(h)) = M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)) ,$$

où

$$1/C(t,\varphi) = 1 + t^{1-d} \int_{\mathbb{R}_+} dy\ \frac{1-d}{\Gamma(d)}\ y^{d-2} \exp(-y/t)\ (1 - \varphi(y)) ,$$

$$\varphi_t(x) = \exp(-x/t) + C(t,\varphi) \int_0^\infty \varphi(y)\ p_t(x,y)\ dy ,$$

et $$p_t(x,y) = \frac{2x}{t^2}\ (y/x)^{(d-1)/2} \exp-(\frac{x+y}{t}) \left[\frac{t}{2\sqrt{xy}}\ I_{d-2}\left(\frac{2\sqrt{xy}}{t}\right) - \frac{2^{2-d}}{\Gamma(d-1)} \left(\frac{2\sqrt{xy}}{t}\right)^{d-3} \right] .$$

Preuve. i) Considérons $-1\le h_1<\ldots<h_n<h<k\le 0$, et $\psi_1 ,\ldots, \psi_n ,\psi , \varphi$, $n+2$ fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $[0,1]$. Notons

$$\Theta = \mathbb{E} [M\varphi(\mu_{T(-1)}(k)) \times M\psi(\mu_{T(-1)}(h)) \times \prod_{j=1}^{n} M\psi_j(\mu_{T(-1)}(h_j))] ,$$

et introduisons encore le temps $D(h) = \sup\{ t<T(-1) : H_t=h \}$ (notons que R est nul en $T(-1)$ et $D(h)$; voir figure 2). Il découle de la propriété forte de Markov et de la théorie des excursions que les processus $((R;H)_t : 0\le t\le T(h))$, $((R;H-h)_{t+T(h)}: 0\le t\le D(h)-T(h))$ et $((R;H)_{t+D(h)}: 0\le t\le T(-1)-D(h))$ sont indépendants; de plus le processus des excursions du deuxième est un p.p.p. de mesure caractéristique $1_{\{i>-1-h\}}\ m$ (c.f. notations du § I) tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $(1+h)^{d-1}$ (car $\delta(T(-1+h))$ suit une loi exponentielle de paramètre $(1+h)^{d-1}$, c.f. lemme II.2 de [2]).

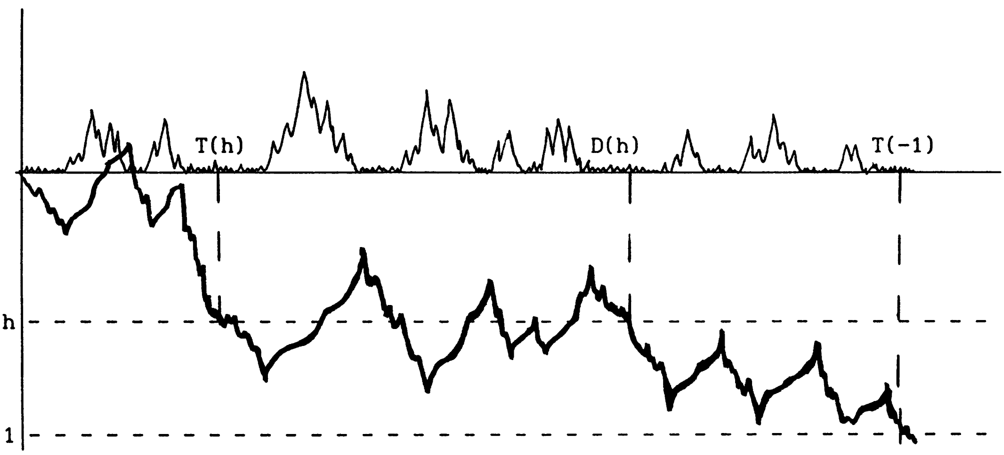

figure 2 (— = R , ▬ = H)

Par conséquent, $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2 \times \Theta_3$, où

$$\Theta_1 = \mathbb{E}\Big(\prod_{A_1} \varphi(R_s) \Big) \quad , \quad A_1 = \{ s<T(h) : H_s=k \ , \ R_s\neq 0 \} \ ,$$

$$\Theta_2 = \mathbb{E}\Big(\prod_{A_{21}} \varphi(R_s) \times \prod_{A_{22}} \psi(R_s) \times \prod_{j=1}^{n} \prod_{A_{23j}} \psi_j(R_s) \Big) \ ,$$

avec

$$A_{21} = \{ s \in [T(h),D(h)] : H_s=k \ , \ R_s\neq 0 \} \ ,$$
$$A_{22} = \{ s \in [T(h),D(h)] : H_s=h \ , \ R_s\neq 0 \} \ ,$$
$$A_{23j} = \{ s \in [T(h),D(h)] : H_s=h_j \ , \ R_s\neq 0 \} \ ,$$

et $\Theta_3 = \mathbb{E}\Big(\prod_{j=1}^{n} \prod_{A_{3j}} \psi_j(R_s) \Big)$, $A_{3j} = \{ s \in [D(h),T(-1)] : H_s = h_j \ , \ R_s \neq 0 \}$.

La formule pour les fonctionnelles multiplicatives de la théorie des excursions nous donne:

$$1/\Theta_2 = 1 + (1+h)^{1-d} \int m(d\omega)\, 1_{i>-1-h} \Big[1 - \psi(\omega^1(u)) \prod_{A_4} \varphi(\omega^1(r)) \prod_{j=1}^{n} \prod_{A_{5j}} \psi_j(\omega^1(r))\Big],$$

où

$$A_4 = \{ r\leq v : \omega^2(r)=k-h \ ; \ \omega^1(r)\neq 0 \} = \{ r \in [u,v] : \omega^2(r)=k-h \ ; \ \omega^1(r)\neq 0 \}$$
$$A_{5j} = \{ r\leq v : \omega^2(r)=h_j-h \ ; \ \omega^1(r)\neq 0 \} = \{ r \in [0,u] : \omega^2(r)=h_j-h \ ; \ \omega^1(r)\neq 0 \} \ .$$

Comme sous $m(.\,|\omega^1(u)=x)$, $(\omega(u+r) : 0\leq r\leq v-u)$ et $((\omega^1(u-r);-\omega^2(u-r)) : 0\leq r\leq u)$ sont indépendants et ont même loi que $((R^x;H^x)_r : 0\leq r\leq T^x(0))$ (voir (I.3)),

$$1/\Theta_2 = 1 + (1+h)^{1-d} \int_0^\infty dx \, \frac{1-d}{\Gamma(d)} \, x^{d-2} \times$$

$$[\, \mathbb{P}(T^x(0)<T^x(1+h)) - \varphi(x)\, \mathbb{E}(\, 1_{T^x(0)>T^x(1+h)} \prod_{j=1}^{n} \prod_{A_{6j}} \psi_j(R_s^x) \,) \times \mathbb{E}(\prod_{A_7} \varphi(R_s^x))\,] \,,$$

où

$A_{6j} = \{ s<T^x(0) : H_s^x = h-h_j \,,\, R_s^x \neq 0 \}$ et $A_7 = \{ s<T^x(0) : H_s^x = k-h \,,\, R_s^x \neq 0 \}$.

Si nous notons

$$\varphi_{k-h}(x) = \mathbb{E}(\prod_{A_7} \varphi(R_s^x)) \,,$$

nous avons alors

$$1/\Theta_2 = 1 + (1+h)^{1-d} \int_0^\infty dx \, \frac{1-d}{\Gamma(d)} \, x^{d-2} \times$$

$$[\, \mathbb{P}(T^x(0)<T^x(1+h)) - \varphi_{k-h}(x)\, \varphi(x)\, \mathbb{E}(\, 1_{T^x(0)>T^x(1+h)} \prod_{j=1}^{n} \prod_{A_{6j}} \psi_j(R_s^x) \,)\,]$$

$$= 1/\mathbb{E}(\prod_{A_{22}} \varphi_{k-h}(R_s) \times \prod_{A_{22}} \psi(R_s) \times \prod_{j=1}^{n} \prod_{A_{23j}} \psi_j(R_s)\,) \,.$$

Finalement, nous avons obtenu

$$\Theta = \Theta_1\, \mathbb{E}[\, M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)) \times M\psi(\mu_{T(-1)}(h)) \times \prod_{j=1}^{n} M\psi_j(\mu_{T(-1)}(h_j))\,] \,.$$

Par classe monotone, $\mu_{T(-1)}(k)$ et $(\, \mu_{T(-1)}(h_j) : j = 1$ à $n\,)$ sont indépendants conditionnellement à $\mu_{T(-1)}(h)$, et

$$\mathbb{E}(\, M\varphi(\mu_{T(-1)}(k)) \mid \mu_{T(-1)}(h)\,) = \Theta_1\, M\varphi_{k-h}(\mu_{T(-1)}(h)) \,.$$

Il nous reste à expliciter le membre de droite de cette égalité. Grâce à la propriété forte de Markov,

$$\Theta_1 = \mathbb{E}(\prod_{A_8} \varphi(R_s)\,) \text{ ,où } A_8 = \{ s < T(h-k) : H_s=0 \text{ et } R_s \neq 0 \} \,.$$

Comme plus haut, le processus des excursions de $(R;H)$ effectuées (en totalité) avant $T(h-k)$ est un p.p.p. de mesure caractéristique $1_{i>h-k}\, m$ tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre $(k-h)^{d-1}$. La formule pour les fonctionnelles multiplicatives de la théorie des excursions nous donne

$$1/\Theta_1 = 1 + (k-h)^{1-d} \int_0^\infty dy \, \frac{1-d}{\Gamma(d)} \, y^{d-2}(1-\varphi(y))\, \mathbb{P}(T^y(0) < T^y(h-k)\,) \,,$$

et l'on montre aisément à l'aide du calcul stochastique que

$$\mathbb{P}(T^y(0) < T^y(h-k)\,) = \exp\{-y/(k-h)\} \,.$$

Nous avons alors

$$1/\Theta_1 = 1/C(k-h,\varphi) = 1 + (k-h)^{1-d} \int_0^\infty dy\ \frac{1-d}{\Gamma(d)}\ y^{d-2}\ (1-\varphi(y))\ \exp\{-y/(k-h)\}\ dy\ .$$

Calculons maintenant $\varphi_t(x)$ ($t=k-h$).

D'une part,

$$\mathbb{P}(\ A_7=\emptyset\ ) = \mathbb{P}(\ T^x(0)<T^x(t)\ ) = \exp -x/t\ .$$

D'autre part, sur $T^x(t) < T^x(0)$, introduisons

$$V^x(t) = \inf\{\ r>T^x(t)\ :\ H^x_r=t\ \}\ ,\ D^x(t) = \sup\{\ r<T^x(0)\ :\ H^x_r=t\ \}$$

(H^x est strictement croissant sur un voisinage de $T^x(t)$, $V^x(t)$ est le deuxième temps de passage de H^x en t , $D^x(t)$ le dernier temps de passage en t avant $T^x(0)$, et bien sûr, R^X est nul en $V^x(t)$ et en $D^x(t)$). Conditionnellement à $T^x(t)<T^x(0)$, les processus $((R^x;H^x)_r\ :\ 0\le r\le V^x(t))$, $((R^x;H^x-t)_{r+V^x(t)}\ :\ 0\le r\le D^x(t)-V^x(t))$ et $((R^x;H^x)_{r+D^x(t)}\ :\ 0\le r\le T^x(0)-D^x(t))$ sont indépendants, et le processus des excursions du deuxième est un p.p.p. de mesure caractéristique $1_{\{i>-t\}}\ m$ tué en un temps exponentiel indépendant de paramètre t^{d-1} . En découpant la trajectoire en $V^x(t)$ et $D^x(t)$, nous obtenons

$$\varphi_t(x) = e^{-x/t} + \int_0^\infty \varphi(y)\ p_t(x,dy) \left[\ 1 + t^{1-d}\int_0^\infty ds\ \frac{1-d}{\Gamma(d)}\ s^{d-2}\ (1-\varphi(s))\ \exp(-s/t)\ ds\ \right]^{-1} ,$$

où $p_t(x,dy) = \mathbb{P}_x(\ R^x(T^x(t)) \in dy\ ;\ T^x(t)<T^x(0)\ )$. De même que dans la proposition I.6, le calcul stochastique donne pour tout γ positif,

$$\text{(II.5):}\qquad \mathbb{E}[\ \exp\{-\gamma R^x(T^x(t))\}\ 1_{\{T^x(t)<T^x(0)\}}\ ] = (1+\gamma t)^{1-d}\ [\exp(-\gamma x/(1+\gamma t)) - \exp(-x/t)]\ ,$$

d'où l'on déduit, par inversion de la transformée de Laplace, l'expression de $p_t(x,dy) = p_t(x,y)dy$ donnée dans l'énoncé du théorème.

ii) se démontre par des arguments analogues à ceux employés pour i) .□

On obtient de même un second théorème du type précédent en remplaçant $T(-1)$ par $\delta^{-1}(1)$ (c'est-à-dire par le premier instant où le temps local de $(R;H)$ vaut 1):

Théorème II.3. *Les processus* $(\mu_{\delta^{-1}(1)}(h)\ :\ h\ge 0)$ *et* $(\mu_{\delta^{-1}(1)}(-h)\ :\ h\ge 0)$ *sont Markoviens et continus. Ils ont même loi et sont indépendants conditionnellement à* $\mu_{\delta^{-1}(1)}(0)$. *Pour toute fonction continue* φ *à valeurs dans* $[0;1]$ *et pour tout* $0\le h\le k$, *on a*

$$\mathbb{E}(\ M\varphi(\mu_{\delta^{-1}(1)}(k))\ |\ \mu_{\delta^{-1}(1)}(h)\ ) = M\varphi_{k-h}(\mu_{\delta^{-1}(1)}(h))\ .$$

Pour conclure, notons que ces deux résultats permettent de retrouver très rapidement les théorèmes de Ray-Knight pour les densités d'occupation de H (théorèmes IV.1 de [1] et IV.2 de [2]) que nous rappelons ci-dessous:

Corollaire II.4. *i)* $(\lambda^{h-1}_{T(-1)} : 0\le h\le 1)$ *est un* $BESQ_0(2-2d)$.

ii) Conditionnellement à $\lambda^{0}_{T(-1)} = x$, $(\lambda^{h}_{T(-1)} : h\ge 0)$ *est un* $BESQ_x(0)$.

iii) Conditionnellement à $\lambda^{0}_{\delta^{-1}(x)} = x$, $(\lambda^{h}_{\delta^{-1}(x)} : h\ge 0)$ *est un* $BESQ_x(0)$.

Preuve. Soit $\theta>0$ et $\varphi(x) = e^{-\theta x}$. D'après (II.1), $M\varphi(\mu_t(h)) = \exp - \frac{\theta}{2}\lambda^h_t$, et l'on trouve $C(t,\varphi) = (1+\theta t)^{d-1}$. Enfin, grâce à (II.5),

$$\begin{aligned}\varphi_t(x) &= \exp(-x/t) + (1+\theta t)^{d-1}(1+\theta t)^{1-d}[\exp(-x\theta/(1+\theta t)) - \exp(-x/t)]\\ &= \exp(-x\theta/(1+\theta t)) .\end{aligned}$$

Les théorèmes II.2.i , ii et II.3 entraînent respectivement i, ii et iii.□

REFERENCES

[1] **J. Bertoin** : Complements on the Hilbert transform and the fractional derivatives of brownian local times, à paraître dans J.Math. Kyoto Univ.

[2] **J. Bertoin** : Excursions of a $BES_0(d)$ and its drift term ($0<d<1$), à paraître dans Probab. Th. Rel. Fields.

[3] **Ph. Biane et M. Yor** : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens, Bull.Sc.Math. 2ème série 111 (1987), p. 23-101.

[4] **R.M. Blumenthal et R.K. Getoor** : *Markov Processes and Potential Theory*, Academic Press (1968).

[5] **R.K. Getoor** : The brownian escape process, Annals of Probab. 5, t.7 (1979), p. 864-867.

[6] **R.K. Getoor et M.J. Sharpe** : Excursions of brownian motion and Bessel processes, Z.f.W. 47 (1979), p. 83-106.

[7] **K. Itô** : Poisson point process attached to Markov processes, Proc. 6th Berkeley Symp. vol.III (1971), p. 225-239.

[8] **R.R. London, H.P. Mc Kean, L.C.G. Rogers et D. Williams** : A martingale approach to some Wiener-Hopf problems I , Séminaire de Probabilités XVI , Lect. Notes in Math. n° 920 (1981), p. 41-67.

[9] **P. Mc Gill** : Wiener-Hopf factorisation of Brownian motion, Probab. Th. Rel. Fields 83 (1989), p. 355-389.

[10] **B. Maisonneuve** : Changement de temps d'un processus de Markov additif, Séminaire de Probabilités XI, Lect. Notes in Math. n° 528 (1977), p.529-538.

[11] **L.C.G. Rogers** : Wiener-Hopf factorization of diffusions and Lévy processes, Proc. London Math. Soc. 47 (1983), p. 177-191.

[12] **L.C.G. Rogers** : A new identity for real Lévy processes, Ann. Inst. Henri Poincaré vol.20 n°1 (1984), p. 21-34.

[13] **L.C.G. Rogers et D. Williams** : Time substitution based on fluctuating additive functionals (Wiener-Hopf factorization for infinitesimal generators), Séminaire de Probabilités XIV , Lect. Notes in Math. n° 784 (1979), p. 332-342.

[14] **D. Williams** : On Lévy's downcrossing theorem, Z.f.W. 40 (1977), p. 157-158.

[15] **T. Yamada** : On some limit theorems for occupation times of one dimensional brownian motion and its continuous additive functionals locally of zero energy, J.Math. Kyoto Univ. vol. 26-2 (1986), p. 309-322.