Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Jacques Azéma

Marc Yor

Étude d'une martingale remarquable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 88-130

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__88_0>

ETUDE D'UNE MARTINGALE REMARQUABLE

J. Azéma et M. Yor
Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie
Tour 56, 4, Place Jussieu, F. 75252 PARIS CEDEX 05

1. Introduction :

(1.1) Dans tout ce travail, $(B_t, t \geq 0)$ désigne le mouvement brownien réel, issu de 0. On note $g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\}$ le dernier zéro de B avant l'instant t. $(\mathcal{F}_t)$ désigne la filtration naturelle de B. Pour tout t, on note $\mathcal{F}_{g_t} = \sigma\{Z_{g_t} ; (Z_u)$ processus $(\mathcal{F}_u)$ prévisible$\}$.

Il est bien connu que $\mathcal{F}_{g_t}$ croit avec t. On introduit également une autre tribu

$$\mathcal{G}_t \overset{\text{déf}}{=} \mathcal{F}_{g_t} \vee \sigma\{\mathrm{sgn}(B_t)\}$$

et on remarque encore que $\mathcal{G}_t$ croît avec t ; en effet, si $s < t$, on a :

$$\mathrm{sgn}(B_s) = \mathrm{sgn}(B_s) 1_{(s \leq g_t)} + \mathrm{sgn}(B_t)\, 1_{(g_t < s)},$$

d'où l'on déduit que $\mathrm{sgn}(B_s)$ est $\mathcal{G}_t$-mesurable.

(1.2) Une partie importante de ce travail consiste à expliciter les projections (optionnelles) sur $(\mathcal{G}_t)$ de certaines $(\mathcal{F}_t)$ martingales remarquables. Par souci de concision, on notera (de façon légèrement incorrecte !) $p(M_t)$ la projection de la martingale M_t.

Nous montrerons, au paragraphe suivant, les deux formules :

$$\text{(1.a)} \qquad p(B_t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mathrm{sgn}(B_t)\sqrt{t-g_t} \;;\; p(B_t^2 - t) = 2(t-g_t) - t.$$

La première égalité montre que $\mu_t \overset{\text{déf}}{=} \mathrm{sgn}(B_t)\sqrt{t-g_t}$ est une $(\mathcal{G}_t)$ martingale vérifiant $[\mu,\mu]_t = g_t$; de la seconde, on tire aisément l'égalité : $\langle\mu,\mu\rangle_t = \frac{t}{2}$.

Depuis sa construction par le premier auteur en [1], cette martingale a fait l'objet d'un certain nombre d'études (Emery, Meyer, Parthasarathy), si bien qu'il nous a paru utile d'établir un formulaire donnant les projections sur la filtration $(\mathcal{G}_t)$ des objets naturels associés au mouvement brownien. Les propriétés du méandre brownien ont été l'outil-clef permettant de donner des formules explicites simples.

Au paragraphe 2, nous donnons une autre démonstration d'un résultat d'Emery que nous rappelons ici. L'intégrale itérée :

$$I_n(f) = \int_{\Delta_n} d\mu_{s_1}\, d\mu_{s_2} \dots d\mu_{s_n}\, f(\underline{s})$$

pour $f : \Delta_n = \{\underline{s} = (s_1,\dots,s_n) : 0 < s_n < s_{n-1} < \dots < s_1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, borélienne, telle que : $\int_{\Delta_n} d\underline{s}\, f^2(\underline{s}) < \infty$, est bien définie.

Emery [6] (voir aussi P.A. Meyer [10]) a montré, pour (μ_t), l'analogue du théorème de Wiener pour le mouvement brownien, c'est-à-dire que toute variable $X \in L^2(\mathcal{M}_\infty)$, où $\mathcal{M}_t = \sigma\{\mu_s \; ; \; s \le t\} \equiv \sigma\{\mathrm{sgn}(B_s) \; ; \; s \le t\}$ (aux ensembles négligeables près) peut se représenter sous la forme :

(1.b) $$X = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n) \text{ , avec } f_n \in L^2(\Delta_n)$$

(On dit que μ possède la propriété de représentation chaotique).

(1.3) Outre la projection sur $(\mathcal{G}_t)$ d'une $(\mathcal{F}_t)$ martingale générique, nous nous intéressons à la décomposition de la projection $(\mathcal{G}_t)$ optionnelle ${}^oX_t$ de $X_t = M_t + V_t$, $(\mathcal{F}_t)$ semimartingale continue, dont M_t, resp : V_t, est la partie martingale, resp : à variation bornée.

La décomposition de ${}^oX_t$ comme $(\mathcal{G}_t)$ semimartingale spéciale est alors :

$${}^oX_t = N_t + V_t^{\neq}$$

où $V_t^{\neq}$ est la $(\mathcal{G}_t)$ projection duale prévisible de V_t et

$$N_t = {}^oM_t + {}^oV_t - V_t^{\neq} \text{ est une } (\mathcal{G}_t) \text{ martingale.}$$

2. <u>La propriété de représentation chaotique de</u> (μ_t).

(2.1) <u>Rappels et compléments sur le méandre brownien.</u>

La définition et une propriété essentielle du méandre brownien sont rappelées dans le

Lemme 1 : *1) Pour tout* $t > 0$, *le processus*

$$\left\{m_u = \frac{1}{\sqrt{t-g_t}} \left|B_{g_t+u(t-g_t)}\right|, \ u \le 1\right\},$$

la variable $\mathrm{sgn}(B_t)$ *et la tribu* $\mathcal{F}_{g_t}$ *sont indépendants.*

(Le processus m est connu dans la littérature sous le nom de méandre brownien ; voir Chung [5]).

*2) (*Imhof [7]*). Soient* M *et* R *respectivement les lois du méandre brownien et du processus de Bessel de dimension* 3 *issu de* 0, *considérées comme probabilités sur l'espace* $C([0,1])$, *muni de la tribu* $\mathcal{C} = \sigma\{X_u(\omega) \equiv \omega(u) \ ; \ u \le 1\}$.

M *et* R *sont liées par la relation :* (2.a) $M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{X_1} \cdot R$.

En particulier, la loi de m_1 *est donnée par :*

$$\text{(2.b)} \qquad P(m_1 \in d\rho) = \rho\, e^{-\rho^2/2}\, d\rho.$$

On trouvera une synthèse des résultats connus sur le méandre brownien dans Biane-Yor [2].

Nous remarquons maintenant, comme application de la première partie du Lemme 1, que : $p(B_t) = E[m_1]\mu_t \ ; \ p(B_t^2-t) = E[m_1^2]\mu_t^2-t$.

Or, d'après (2.b), on a : $E[m_1] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $E[m_1^2] = 2$; nous venons ainsi de démontrer les formules (1.a).

Remarque : Plus généralement, on déduit de la formule (2.b) l'expression suivante des moments de m_1 :

$$\text{(2.c)} \qquad E[m_1^k] = 2^{k/2}\, \Gamma\left(1 + \frac{k}{2}\right). \qquad \square$$

Les compléments suivants au lemme 1 sont intéressants par eux-mêmes et nous seront utiles au paragraphe 3 ; toutefois, le lecteur intéressé essentiellement par la propriété de représentation chaotique peut passer directement au sous-paragraphe (2.2).

Lemme 2 : *1) Le méandre brownien* $(m_u \ ; \ u \le 1)$ *est, dans sa filtration propre, une semimartingale de décomposition canonique :*

(2.d) $$m_u = \beta_u + \int_0^u \frac{ds}{\sqrt{1-s}} \left(\frac{\Phi'}{\Phi}\right)\left(\frac{m_s}{\sqrt{1-s}}\right), \quad \text{où} \quad \Phi(a) = \int_0^a dy\, e^{-y^2/2}.$$

2) Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, *borélienne, bornée, à support compact, on a :*

(2.e) $$E\left[\int_0^1 f(m_u)dm_u\right] = 2\int_0^\infty d\xi\, e^{-2\xi^2} f(\xi).$$

Démonstration : 1) Plaçons-nous sur l'espace canonique $C([0,1])$, et reprenons les notations du lemme 1. On a alors :

$$\frac{dM}{dR}\Big|_{\mathscr{C}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{X_1}.$$

Nous allons obtenir la formule (2.d) après avoir explicité :

$$D_u = \frac{dM}{dR}\Big|_{\mathscr{C}_u} = R\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{X_1}\,\Big|\mathscr{C}_u\right] \qquad (u \le 1)$$

puis en appliquant le théorème de Girsanov.

Montrons tout d'abord la formule :

(2.f) $$D_u \equiv R\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{X_1}\,\Big|\mathscr{C}_u\right] = \frac{1}{X_u}\,\Phi\left(\frac{X_u}{\sqrt{1-u}}\right).$$

Par application de la propriété de Markov, on a :

$$D_u \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, R_{X_u}\left(\frac{1}{X_{1-u}}\right)$$

et il s'agit donc de calculer :

$$R_x\left(\frac{1}{X_t}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, R_{x/\sqrt{t}}\left(\frac{1}{X_1}\right).$$

Posons $a = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$, et rappelons la formule générale donnant $p_1^{(\nu)}(a,y)$, densité du semi-groupe de Bessel d'indice ν au temps 1 :

$$p_1^{(\nu)}(a,y) = y\left(\frac{y}{a}\right)^\nu \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2+y^2)\right] I_\nu(ay).$$

On a donc :

$$R_a\left(\frac{1}{X_1}\right) = \int_0^\infty dy\left(\frac{y}{a}\right)^\nu \exp\left[-\frac{1}{2}\,(a^2+y^2)\right] I_{1/2}(ay).$$

Or, $I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{sh}(z)}{\sqrt{z}}$. On en déduit :

$$R_a\left(\frac{1}{X_1}\right) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty dy\, \exp\left[-\frac{1}{2}(a^2+y^2)\right]\mathrm{sh}(ay)$$

$$= \frac{1}{a}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dy\left[\exp -\frac{1}{2}(a^2+y^2-2ay) - \exp -\frac{1}{2}(a^2+y^2+2ay)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{a}\,\Phi(a)$$

ce qui implique la formule (2.f).

Maintenant, d'après le théorème de Girsanov, la décomposition canonique de X sous R : $X_u = \gamma_u + \int_0^u \frac{ds}{X_s}$, avec γ mouvement brownien, devient, sous M :

$$X_u = \beta_u + \int_0^u \frac{ds}{X_s} + \int_0^u \frac{d\langle X,D\rangle_s}{D_s} .$$

Or, on a :

$$d\langle X,D\rangle_s = ds\left\{-\frac{1}{X_s^2}\,\Phi\left(\frac{X_s}{\sqrt{1-s}}\right) + \frac{1}{X_s}\,\Phi'\left(\frac{X_s}{\sqrt{1-s}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-s}}\right\}$$

$$= D_s\, ds\left\{-\frac{1}{X_s} + \frac{\Phi'}{\Phi}\left(\frac{X_s}{\sqrt{1-s}}\right)\frac{1}{\sqrt{1-s}}\right\},$$

ce qui implique la formule (2.d).

2) En utilisant conjointement (2.d) et (2.f), on obtient :

$$E\left[\int_0^1 f(m_u)dm_u\right] = E\left[\int_0^1 f(m_u)\,\frac{\Phi'}{\Phi}\left(\frac{m_u}{\sqrt{1-u}}\right)\frac{du}{\sqrt{1-u}}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}}\, R\left[f(X_u)\,\frac{\Phi'}{\Phi}\left(\frac{X_u}{\sqrt{1-u}}\right)\frac{1}{X_u}\,\Phi\left(\frac{X_u}{\sqrt{1-u}}\right)\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u}}\, R\left[f(X_u)\frac{1}{X_u}\,\Phi'\left(\frac{X_u}{\sqrt{1-u}}\right)\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}\quad R\left[f(\sqrt{u}\,X_1)\,\frac{1}{X_1}\,\exp -\frac{uX_1^2}{2(1-u)}\right]$$

$$= \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty d\rho\, \rho\, f(\sqrt{u}\rho)\, e^{-\frac{\rho^2}{2(1-u)}}, \text{ d'après (2.b).}$$

On a donc la formule :

$$E\left[\int_0^1 f(m_u)dm_u\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty d\xi\, \xi\, f(\xi) \int_0^1 \frac{du}{(u^3(1-u))^{1/2}}\, e^{-\xi^2/2u(1-u)}.$$

En faisant le changement de variables : $u = \frac{1}{1+v}$, l'intégrale en (du) devient :

$$e^{-\xi^2} \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{v}}\, e^{-\frac{\xi^2}{2}(v+\frac{1}{v})}$$

soit, avec le changement de variables : $v = e^u$:

$$e^{-\xi^2} \int_{-\infty}^\infty du\, e^{\frac{u}{2}}\, e^{-\xi^2 \mathrm{ch} u} = 2\, e^{-\xi^2}\, K_{1/2}(\xi^2),$$

grâce à la formule générale (voir Lebedev [9], p. 119) :

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-z\, \mathrm{ch}\, u}\, e^{\nu u}\, du.$$

Or, on a : $K_{1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}$, et l'on obtient maintenant aisément la formule (2.e). □

<u>Remarque</u> : Désignons ici par $(X_t, t \geq 0)$ le processus de Bessel de dimension 3, issu de 0.
$(1/X_t, t > 0)$ fournit un des exemples les plus classiques de martingale locale <u>qui n'est pas une martingale</u>. Cette dernière assertion est confirmée par la formule explicite :

$$\text{(2.f)} \qquad R\left[\frac{1}{X_1} \middle| \mathcal{E}_u\right] = \frac{1}{X_u} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Phi\left(\frac{X_u}{1-u}\right) \qquad (u < 1)$$

et il est amusant de noter que, dans la littérature, la fonction Φ est souvent appelée fonction d'erreur (à des transformations élémentaires près).

(2.2) <u>Projections des martingales exponentielles.</u>

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $\mathcal{E}_t^{(\alpha)} = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2 t}{2}\right)$, et $\tilde{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)} = p(\mathcal{E}_t^{(\alpha)})$. D'après le lemme 1, on a :

$$\text{(2.g)} \qquad \tilde{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)}(\omega) = M\left\{\exp\left[\alpha\mu_t(\omega)X_1 - \frac{\alpha^2 t}{2}\right]\right\}.$$

En fait, on peut calculer explicitement la martingale $(\tilde{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)}, t \geq 0)$.

__Proposition 1__ : *Soit* $\alpha \in \mathbb{C}$.

1) $\tilde{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)} = h(\alpha\mu_t)\exp\left[-\frac{\alpha^2 t}{2}\right]$, avec

$$h(x) = 1 + x\exp\left[\frac{x^2}{2}\right]k(x), \text{ où } k(x) = \int_{-\infty}^{x} dy\, e^{-y^2/2}.$$

2) $p\left[\mathrm{sh}(\alpha B_t)\exp(-\frac{\alpha^2 t}{2})\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(\alpha\mu_t)\exp\frac{\alpha^2}{2}(\mu_t^2 - t)$.

3) $$p\left[\mathrm{ch}(\alpha B_t)\exp(-\frac{\alpha^2 t}{2})\right] = \exp(-\frac{\alpha^2 t}{2}) + \alpha^2\mu_t^2\int_0^1 dy\,\exp\frac{\alpha^2}{2}\left\{\mu_t^2(1-y^2) - t\right\}$$

$$= \exp(-\frac{\alpha^2 t}{2}) + \alpha\mu_t\exp\left[\frac{\alpha^2}{2}(\mu_t^2 - t)\right]\Phi(\alpha\mu_t)$$

(rappelons ici que : $\mu_t^2 - t = -g_t$).

Démonstration : 1) La première partie de la proposition découle immédiatement de la formule (2.b) ; on a :

$$\tilde{\mathcal{E}}_t^{(\alpha)} = h(\alpha\mu_t)e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}}, \text{ où } h(x) = \int_0^{\infty} d\rho\, e^{\rho x}\rho e^{-\rho^2/2},$$

et l'on obtient le résultat cherché par intégration par parties.

2) A l'aide de la relation : $k(x) + k(-x) = \sqrt{2\pi}$, on obtient :

$$\frac{1}{2}(h(x) - h(-x)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, x\exp(\frac{x^2}{2})$$

et la partie 2) de la proposition en découle.

3) On déduit de l'expression donnée pour $h(x)$ en 1) que :

$$\frac{1}{2}\,(h(x) + h(-x)) = 1 + \frac{x^2}{2}\int_{-1}^{1} dy \exp \frac{x^2}{2}\,(1-y^2) = 1 + x \exp(\frac{x^2}{2})\Phi(x)$$

et la partie 3) de la proposition en découle. □

Introduisons maintenant les polynômes d'Hermite H_k au moyen du développement en série :

$$\exp(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} H_k(x).$$

On utilisera ci-dessous la variante suivante :

$$\exp(\alpha x - \frac{\alpha^2 t}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} H_k(x,t)$$

où $H_k(x,t)$ est un polynôme (dans les 2 variables x et t) qui satisfait, pour tout $t > 0$: $H_k(x,t) = t^{k/2} H_k\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$.

On déduit alors de la formule (2.g) que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$p(H_k(B_t,t)) = M[H_k(\mu_t(\omega)X_1,t)]. \tag{2.h}$$

L'obtention d'une formule explicite pour le membre de gauche de (2.h) est ainsi ramenée à celle du calcul des fonctions $P_k(x,t)$ définies par :

$$\text{(2.i)}\quad \begin{cases} M[H_{2p+1}(xX_1,t)] = \dfrac{(2p+1)!}{2^p\ p!}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, P_{2p+1}(x,t) \\[2ex] M[H_{2p}(xX_1,t)] = \dfrac{(2p)!}{2^p\ p!}\, P_{2p}(x,t). \end{cases}$$

On déduit alors de la Proposition 1 le :

<u>Corollaire 1</u> : *On a les formules :*

$$\text{(2.j)}\quad \begin{cases} P_{2p+1}(x,t) = x(x^2-t)^p \\[2ex] P_{2p}(x,t) = (-1)^p\, t^p + 2px^2\displaystyle\int_0^1 dy\left\{x^2(1-y^2)-t\right\}^{p-1}. \end{cases}$$

<u>Démonstration</u> : L'expression donnée en (2.j) de P_{2p+1}, resp : P_{2p} découle

immédiatement de la formule 2), resp : 3) de la proposition 1. □

Remarques : 1) En fait, les polynômes P_{2p} s'expriment très simplement à l'aide des polynômes hypergéométriques $F(-p,1,\frac{1}{2} ; z)$, $z \in \mathbb{R}$.

Ces relations, et d'autres propriétés des polynômes P_{2p} , sont développées en appendice.

2) Bien entendu, la démonstration des deux formules (2.j) ne nécessite pas l'utilisation du mouvement brownien. Il suffit d'utiliser la décomposition d'une variable $N(0,1)$, soit N, en $\mu_1 \cdot m_1$ avec μ_1 et m_1 variables indépendantes, dont les distributions sont spécifiées par :

$$\mu_1 \overset{(d)}{=} \varepsilon \sqrt{g} \; ; \quad m_1 \overset{(d)}{=} \sqrt{2\underline{e}} \text{ , où :}$$

$$P(\varepsilon = \pm 1) = 1/_2 \; ; \quad P(g \in dt) = \frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}} \; ; \; P(\underline{e} \in ds) = e^{-s}ds,$$

ε et g étant indépendantes,

et de calculer, comme on vient de le faire, l'espérance conditionnelle :

$$E\left[\exp\left(\alpha N - \frac{\alpha^2}{2}\right) | \mu_1\right]. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant exprimer, pour tout $t > 0$ fixé, à l'aide des polynômes de Hermite H_k d'une part, et des polynômes P_k d'autre part, les martingales

$$E[B_t^k | \mathcal{F}_s] \quad (s \le t) \quad \text{et} \quad E[\mu_t^k | \mathcal{G}_s] \quad (s \le t).$$

On a la :

Proposition 2 : *Soient* $0 \le s \le t$. *Alors :*

1) pour tout $k \in \mathbb{N}$, $E[B_t^k | \mathcal{F}_s] = H_k(B_s, -(t-s))$

2) pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$E[\mu_t^{2p+1} | \mathcal{G}_s] = P_{2p+1}(\mu_s, -(t-s))$$

$$E[\mu_t^{2p} | \mathcal{G}_s] = \frac{(2p)!}{(2^p(p!))^2} P_{2p}(\mu_s, -(t-s)).$$

Remarque : Une vérification partielle de ces deux formules peut être faite en considérant le cas $t = s$, en remarquant alors que :

$$P_{2p+1}(x,0) = x^{p+1} \quad ; \quad P_{2p}(x,0) = x^{2p}2p\ I_p,$$

où $I_p = \int_0^1 dy\ (1-y^2)^{p-1} = \int_0^{\pi/2} d\theta\ (\sin\theta)^{2p-1}$.

Il s'agit alors de vérifier que : $\dfrac{(2p)!}{(2^p(p!))^2}\ (2p)I_p = 1$, ce qui est un cas particulier des formules de Wallis :

$$I_p = \frac{2^{2(p-1)}((p-1)!)^2}{(2p-1)!}.$$

Démonstration de la proposition 2 :

1) On utilise l'identité :

$$E\left[e^{\alpha B_t}|\mathcal{F}_s\right] = e^{\alpha B_s + \frac{\alpha^2}{2}(t-s)}$$

d'où l'on déduit, par définition des polynômes de Hermite (à 2 variables) H_k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} E[B_t^k|\mathcal{F}_s] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} H_k(B_s,-(t-s))$$

et donc : (2.k) $\quad E[B_t^k|\mathcal{F}_s] = H_k(B_s,-(t-s))$.

2) On déduit de l'identité (2.k) :

$$\begin{aligned} E[B_t^k|\mathcal{G}_s] &= E[H_k(B_s,-(t-s))|\mathcal{G}_s] \\ &= M[H_k(\mu_s(\omega)X_1,-(t-s))] \\ &= c_k\ P_k(\mu_s,-(t-s)), \end{aligned}$$

où c_k désigne la constante qui figure en (2.i) (selon la parité de k).

D'autre part, on a :

$$E[B_t^k|\mathcal{G}_s] = E[\mu_t^k|\mathcal{G}_s]E[m_1^k],$$

et donc : $\quad E[\mu_t^k|\mathcal{G}_s] = \dfrac{c_k}{E[m_1^k]}\ P_k(\mu_s,-(t-s))$.

La proposition 2 découle finalement de ce que, d'après (2.c), on a :

$$E[m_1^{2p+1}] = \frac{(2p+1)!}{2^p(p!)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ ;\ E[m_1^{2p}] = 2^p(p!). \quad \square$$

(2.3) Une formule d'Itô pour la martingale (μ_t).

Les résultats de ce sous-paragraphe découleront de l'application de la formule d'Itô générale pour martingales discontinues, et des deux propriétés particulières présentées dans le

Lemme 3 : *1) Le processus des sauts de* (μ_t) *est* : $\Delta\mu_t = -\mu_{t-}\,1_{(\Delta\mu_t \neq 0)}$.

2) La mesure de Lévy de la martingale (μ_t), *relativement à la filtration* $(\mathcal{G}_t)$, *est :*

$$\frac{dt}{2}\,\frac{\varepsilon_{-\mu_t}(dx)}{\mu_t^2}\ .$$

Démonstration : La première propriété est immédiate ; la seconde signifie que pour tout processus $(\mathcal{G}_t)$ prévisible (Z_t) positif, et toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne, nulle en 0, on a :

$$E\left[\sum_{s\le t} Z_s f(\Delta\mu_s)\right] = \frac{1}{2}\,E\left[\int_0^t \frac{ds}{\mu_s^2}\,Z_s\,f(-\mu_s)\right].$$

Or, compte-tenu de la propriété 1), et du fait que, d'après (1.a), $\sum_{s\le t}(\Delta\mu_s)^2 - \frac{1}{2}\,t$ est une $(\mathcal{G}_t)$ martingale, on peut réécrire le membre de gauche sous la forme :

$$E\left[\sum_{s\le t} \frac{Z_s}{(\mu_{s-})^2}\,f(-\mu_{s-})(\Delta\mu_s)^2\right] = \frac{1}{2}\,E\left[\int_0^t \frac{ds\,Z_s}{\mu_s^2}\,f(-\mu_s)\right]. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant démontrer le

Théorème 1 : *Pour toute fonction* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *de classe* C^2, *on a :*

$$(2.\ell) \qquad g(\mu_t) = g(0) + \int_0^t \frac{g(\mu_{s-})-g(0)}{\mu_{s-}}\,d\mu_s - \frac{1}{2}\int_0^t ds\,\frac{g(\mu_s)-g(0)-g'(\mu_s)\mu_s}{\mu_s^2}\ .$$

Démonstration : La formule d'Itô classique donne :

$$g(\mu_t) = g(0) + \int_0^t g'(\mu_{s-})d\mu_s + \sum_{s\le t}\left(g(\mu_s)-g(\mu_{s-})-g'(\mu_{s-})\Delta\mu_s\right).$$

Or, on a, d'après la propriété 1) du lemme 3 :

$$\sum_{s\le t} (g(\mu_s)-g(\mu_{s-})-g'(\mu_{s-})\Delta\mu_s) = -\sum_{s\le t} (g(\mu_{s-})-g(0)-g'(\mu_{s-})\mu_{s-})1_{(\Delta\mu_s\neq 0)}$$

$$(2.m) \qquad = \sum_{s\le t} \frac{g(\mu_{s-})-g(0)-g'(\mu_{s-})\mu_{s-}}{\mu_{s-}} \Delta\mu_s .$$

D'après la propriété 2) du lemme 3, la projection duale prévisible sur $(\mathcal{G}_t)$ de :

$$\sum_{s\le t} (g(\mu_s)-g(\mu_{s-})-g'(\mu_{s-})\Delta\mu_s)$$

est : $$-\frac{1}{2}\int_0^t ds\, \frac{g(\mu_s)-g(0)-g'(\mu_s)\mu_s}{\mu_s^2} ,$$

et la martingale compensée de : $\sum_{s\le t} (g(\mu_s)-g(\mu_{s-})-g'(\mu_{s-})\Delta\mu_s)$ est, d'après (2.m), égale à :

$$\int_0^t \frac{g(\mu_{s-}) -g(0)-g'(\mu_{s-})\mu_{s-}}{\mu_{s-}} d\mu_s ,$$

par identification des sauts.

La formule (2.ℓ) découle maintenant de la formule d'Itô classique rappelée au début de la démonstration. □

Nous donnons maintenant deux variantes simples de la formule (2.ℓ) sur lesquelles nous reviendrons par la suite.

(i) La formule (2.ℓ) s'étend sans aucune difficulté à toute fonction $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^{2,1}$; on obtient :

$$g(\mu_t,t) = g(0,0) + \int_0^t \frac{g(\mu_{s-},s)-g(0,s)}{\mu_{s-}} d\mu_s$$

$$(2.n) \qquad + \int_0^t ds\left[g'_t(\mu_s,s) - \frac{1}{2}\left\{\frac{g(\mu_s,s)-g(0,s)-g'_x(\mu_s,s)\mu_s}{\mu_s^2}\right\}\right]$$

(ii) La formule (2.ℓ) prend une forme remarquablement simple lorsque l'on considère $g(x) = x\,F(x)$, pour $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, fonction absolument continue.

Corollaire : *Si* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfait* : $F(x) - F(y) = \int_y^x dz\, f(z)$, *avec* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, *on a :*

$$\mu_t F(\mu_t) = \int_0^t F(\mu_{s-})d\mu_s + \frac{1}{2}\int_0^t f(\mu_s)ds. \tag{2.o}$$

Démonstration : 1) Supposons tout d'abord F de classe C^2, et posons : $g(x) = xF(x)$. On a alors : $g'(x) = F(x) + xf(x)$, et donc :

$$g(x) - xg'(x) = -x^2 f(x)$$

On déduit alors la formule (2.o) de (2.ℓ).

2) On déduit ensuite de la formule (2.o), démontrée pour f de classe C^1, l'estimation a priori :

$$E\left[\int_0^t ds\,|f(\mu_s)|\right] \le \sqrt{t}\; 2\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} dx\,|f(x)| \tag{2.p}$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, borélienne.

3) Pour démontrer la formule (2.o) dans le cas général, on peut choisir $F(x) = \int_0^x dy\, f(y)$, puis approximer f dans $L^1([-\sqrt{t},\sqrt{t}])$ par une suite de fonctions de classe C^1, et utiliser l'estimation a priori (2.p) ainsi que :

$$E\left[\left(\int_0^t d\mu_s\, F(\mu_{s-})\right)^2\right] = \frac{1}{2} E\left[\int_0^t ds\, F^2(\mu_s)\right]$$

$$\le \sqrt{t}\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} dx\, F^2(x) \le 2t\left(\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} dy\,|f(y)|\right)^2. \qquad \square$$

(2.4) Application à la propriété de représentation chaotique de (μ_t).

Nous allons maintenant démontrer la propriété de représentation chaotique de (μ_t), dûe à Emery [6], à l'aide de la proposition 2 et de la formule d'Itô (2.n).

Par combinaison linéaire et passage à la limite dans L^2, il suffit, pour montrer que toute variable $X \in L^2(\mathcal{M}_\infty)$ admet une représentation chaotique (1.b) de prouver le résultat pour

$$X = \prod_{j=1}^{N} \mu_{t_j}^{k_j}$$

où $t_1 < t_2 < \ldots < t_N$, et $(k_j, j \le N)$ sont des entiers.

Or, d'après la proposition 2, on a :

$$E\left[\mu_{t_j}^{k_j} | \mathcal{F}_s\right] = c_{k_j} P_{k_j}(\mu_s, -(t_j - s)) \qquad (s < t_j)$$

pour une certaine constante c_{k_j} .

D'après la formule d'Itô (2.n), on a :

$$\mu_{t_j}^{k_j} = c_{k_j} P_{k_j}\left[\mu_{t_{j-1}}, -(t_j - t_{j-1})\right] + c_{k_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} Q_{k_j}(\mu_{s-}, -(t_j - s)) d\mu_s$$

avec $Q_k(x,t) = \dfrac{P_k(x,t) - P_k(0,t)}{x}$.

Le problème de la représentation de X, qui dépend (via μ) de N instants $t_1, t_2, \ldots, t_N$ est donc ramené à celui de :

$$X_1 = \prod_{j=1}^{N-1} \mu_{t_j}^{k_j} P_{k_N}\left[\mu_{t_{N-1}}, -(t_N - t_{N-1})\right]$$

qui ne dépend plus que de (N-1) instants, et de

$$X_2(s) = \prod_{j=1}^{N-1} \mu_{t_j}^{k_j} Q_{k_N}(\mu_s, -(t_N - s))$$

qui dépend de N instants $(t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}, s)$, mais avec un polynôme $Q_{k_N}(x, -(t_N - s))$ de degré $(k_N - 1)$ en x.

On termine la démonstration à l'aide d'un argument de récurrence sur N et sur les exposants $k_1, \ldots, k_N$.

Remarque : La démonstration d'Emery [6] s'appuie également sur la formule (2.ℓ), utilisée par Emery pour représenter l'accroissement du processus $\mu_t^{k_j}$ entre les instants t_{j-1} et t_j comme somme d'une intégrale stochastique et d'une intégrale en ds. Ici, nous utilisons (2.ℓ) pour représenter l'accroissement de la martingale $E\left[\mu_{t_j}^{k_j} | \mathcal{G}_t\right]$ entre les instants t_{j-1} et t_j comme intégrale stochastique.

3. $(\mathcal{G}_t)$ **projections de martingales browniennes.**

(3.1) Rappels de calcul stochastique pour le mouvement brownien.

Comme on le sait, le calcul stochastique est une longue suite d'applications de la formule d'Itô, énoncée sous une forme plus ou moins générale.
A l'heure actuelle, trois formules d'Itô ont été développées, dont le domaine d'application est de plus en plus général ; ce sont :

(α) si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2,

$$(3.a) \qquad f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)ds$$

(β) si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différence de deux fonctions convexes, et si $f''(dx)$ désigne la dérivée seconde de f au sens des distributions,

$$(3.b) \qquad f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'_-(B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(dx)\ell_t^x$$

où $(\ell_t^x \,;\, x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ est la famille bicontinue des temps locaux de B.

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(3.b') \qquad (B_t - x)^+ = (-x)^+ + \int_0^t 1_{(B_s > x)}dB_s + \frac{1}{2}\ell_t^x.$$

(γ) si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ appartient à l'espace H^1_{loc}, et si f' désigne la dérivée généralisée de f, il existe un processus $(A_t^f, t \geq 0)$ continu, $(\mathcal{F}_t)$ adapté, à variation quadratique nulle, tel que :

$$(3.c) \qquad f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)dB_s + \frac{1}{2}A_t^f.$$

Pour tout $t \geq 0$, on peut représenter la variable A_t^f par la formule :

$$(3.c') \qquad A_t^f = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)d_x(\ell_t^x)$$

grâce aux propriétés de semimartingale de $(\ell_t^x \,;\, x \in \mathbb{R})$ démontrées par

Perkins [12] et Jeulin [8]. Pour les formules (3.c) et (3.c'), voir Yamada [18], Bouleau-Yor [4] et Yor [19].
Soulignons que, dans les cas (α) et (β), $f(B_t)$ est une semimartingale, alors que, dans le cas (γ), $f(B_t)$ est un processus de Dirichlet.

(3.2) Sur la projection optionnelle de $X_t = f(B_t)$.

Nous allons étudier, dans les cas (α) et (β), la décomposition canonique de ${}^oX_t$, projection optionnelle sur $(\mathcal{G}_t)$ de la semimartingale $f(B_t)$.

Proposition 4 : *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *fonction de classe* C^2, *à support compact. Alors :*

1) si l'on note $X_t = f(B_t)$, *on a :* ${}^oX_t = g(\mu_t)$, *où* $g(x) = E[f(xm_1)]$

2) si l'on note : $V_t = \frac{1}{2}\int_0^t ds\, f''(B_s)$, *on a :* $V_t^{\neq} = \frac{1}{2}\int_0^t ds\, \theta(\mu_s)$, *où*

$$\theta(x) = E[f''(xm_1)] = -\frac{g(x)-g(0)-g'(x)x}{x^2}$$

3) si l'on note $M_t = \int_0^t f'(B_s)dB_s$, *on a :*

$$\begin{aligned} {}^oM_t &= \int_0^{g_t} f'(B_s)dB_s + 2\mu_t \int_0^\infty d\xi\, e^{-2\xi^2} f'(\mu_t\xi) \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{g_t} f''(B_s)ds + 2\mu_t \int_0^\infty d\xi\, e^{-2\xi^2} f'(\mu_t\xi). \end{aligned}$$

Démonstration : La première assertion et la première partie de la seconde découlent immédiatement du lemme 1. Pour terminer la démonstration de la seconde assertion, il reste à vérifier l'égalité :

$$\text{(3.d)} \qquad E[f''(xm_1)] = -\frac{g(x)-g(0)-g'(x)x}{x^2}\,.$$

(Remarquons que l'écriture ainsi obtenue de $V_t^{\neq}$ en fonction de g est bien en accord avec la formule d'Itô (2.ℓ) pour $g(\mu_t)$).
Nous allons voir comment (3.d) est une conséquence de la formule

(2.b) $$P(m_1 \in d\rho) = \rho e^{-\rho^2/2} d\rho.$$

En effet, quitte à remplacer $f(x\cdot)$ par $f(\cdot)$, (3.d) équivaut à :

(3.d') $$E[f(m_1)] = E[f(0) + f'(m_1)m_1 - f''(m_1)].$$

A l'aide de la formule (2.b) et de la formule d'intégration par parties, on voit que (3.d') équivaut à l'identité suivante :

$$\rho e^{-\rho^2/2} = -(\rho^2 e^{-\rho^2/2})' - (\rho e^{-\rho^2/2})'',$$

que l'on vérifie sans difficulté.

La troisième assertion découle aisément du lemme 1 et de la formule (2.e) du lemme 2. □

Corollaire : *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *borélienne, bornée. Alors :*

1) la $(\mathcal{G}_t)$ *projection duale prévisible de* $\int_0^t ds\, \varphi(B_s)$ *est*

$$\int_0^t ds \int_0^\infty d\xi\, \xi e^{-\frac{\xi^2}{2}} \varphi(\mu_s \xi)$$

2) la $(\mathcal{G}_t)$ *projection duale prévisible de* $\int_0^{g_t} ds\, \varphi(B_s)$ *est :*

$$2\int_0^t ds \int_0^\infty d\xi\, \xi e^{-2\xi^2} \varphi(\mu_s \xi)$$

3) en conséquence, les processus croissants :

$$\int_0^t ds\, \varphi(B_s) \quad et \quad 2\int_0^{g_t} ds\, \varphi(2B_s)$$

ont même projection duale prévisible sur $(\mathcal{G}_t)$.

Nous donnons, dans l'appendice, une autre démonstration de l'égalité de ces deux projections duales prévisibles, en utilisant alors la théorie des excursions browniennes.

Démonstration du Corollaire : 1) découle de la seconde assertion de la Proposition 4, dans laquelle on a remplacé f'' par φ ;

2) découle de la seconde expression de ${}^oM$ donnée dans la Proposition 4 et de la formule d'Itô (2.o) appliquée à $\mu_t f'(\mu_t \xi)$; on remplace ensuite partout dans l'expression de la nouvelle martingale ainsi obtenue :

$$-\frac{1}{2}\int_0^{g_t} f''(B_s)ds + \int_0^\infty d\xi\ \xi e^{-2\xi^2}\int_0^t ds\ f''(\mu_s \xi)$$

la fonction f'' par la fonction φ.

3) découle immédiatement de 1) et 2). □

La démonstration, très semblable aux précédentes, des résultats analogues concernant le cas (β), et présentés dans la Proposition suivante, est laissée au lecteur.

<u>**Proposition 5**</u> : *Pour tout* $a \in \mathbb{R}$, $(\ell_t^a, t \geq 0)$ *désigne le temps local en* a *du mouvement brownien* $(B_t, t \geq 0)$. *Alors :*

1) si l'on note $X_t = |B_t - a|$, *on a :* ${}^oX_t = |\mu_t| u\left(\frac{a}{\mu_t}\right)$,

où :

$$u(b) = \begin{cases} 2\int_b^\infty e^{-\rho^2/2}\,d\rho - \sqrt{\frac{\pi}{2}} + b & (b \geq 0) \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} - b & (b \leq 0) \end{cases}.$$

En particulier, si $a = 0$, ${}^oX_t = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,|\mu_t|$;

2) si, pour $a \neq 0$, *on note* $V_t = \ell_t^a$, *on a :*

$$V_t^{\neq} = \int_0^t \frac{ds}{\mu_s^2}\,|a|\,\exp\left(-\frac{a^2}{2\mu_s^2}\right)1_{(\mu_s a>0)}$$

3) si l'on note $M_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s - a)dB_s$, *on a :*

$${}^oM_t = -\ell_{g_t}^a + 2\mu_t\int_0^\infty d\xi\ e^{-2\xi^2}\operatorname{sgn}(\mu_t\xi - a)$$

4) la projection duale prévisible sur $(\mathcal{G}_t)$ *de* $(\ell_{g_t}^a\ ;\ t \geq 0)$ *est :*

$$2\int_0^t \frac{ds}{\mu_s^2}\ |a|\ \exp\left[-\frac{2a^2}{\mu_s^2}\right] 1_{(\mu_s a>0)}.$$

En conséquence, pour tout $a \in \mathbb{R}$, *les processus* ℓ_t^a *et* $\ell_{g_t}^{a/2}$ *ont même* $(\mathcal{G}_t)$ *projection duale prévisible.*

(3.3) *La projection optionnelle de certaines martingales fonctionnelles multiplicatives.*

Un problème analogue à celui traité dans le sous-paragraphe précédent, mais beaucoup plus complexe, est celui du calcul explicite de la $(\mathcal{G}_t)$ projection optionnelle de :

$$\mathcal{U}_t^f = \exp\left[\int_0^t f(B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(B_s)ds\right].$$

On a alors, en faisant les mêmes transformations que précédemment :

$$^o\mathcal{U}_t^f = \mathcal{U}_{g_t}^f\ \varphi_f(\mu_t),$$

où :

(3.e) $$\varphi_f(x) = E\left[\exp\left(\int_0^1 xf(xm_s)dm_s - \frac{x^2}{2}\int_0^1 f^2(xm_s)ds\right)\right].$$

En remplaçant f par $xf(x\cdot)$, on a :

$$\varphi_f(x) = \psi_{xf(x.)}\ ,$$

où :

(3.f) $$\psi_h = E\left[\exp\left(\int_0^1 h(m_s)dm_s - \frac{1}{2}\int_0^1 h^2(m_s)ds\right)\right]$$

$$= E\left[\exp(H(m_1) - \frac{1}{2}\int_0^1 (h^2+h')(m_s)ds\right]$$

$$= R\left[\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{X_1}\exp H(X_1)\right]\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 ds(h^2+h')(X_s)\right]\right]$$

en notant $H(x) = \int_0^x dy\ h(y)$.

Il est bien connu que le calcul de ψ_h (exprimée sous la dernière forme à l'aide de $BES_0(3)$) peut être fait - de manière théorique ! - au moyen de la formule de Feynman-Kac ; cependant, à notre connaissance, les fonctions h

pour lesquellles il existe une expression explicite de ψ_h sont très rares, l'exemple le mieux connu étant : $h(y) = -\lambda y$ $(\lambda > 0)$.

Notons alors $\psi(\lambda)$ le membre de gauche de (3.f). Il vient :

$$\psi(\lambda) = R\left[\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{X_1}\exp\left(-\lambda\frac{X_1^2}{2}\right)\exp\left(\frac{\lambda}{2}\right)\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 ds\ X_s^2\right)\right]$$

$$= \exp\left(\frac{\lambda}{2}\right)\int_0^\infty d\rho\ \rho\ e^{-\frac{\rho^2}{2}(1+\lambda)}\ R\left(\exp -\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 ds\ X_s^2 | X_1 = \rho\right).$$

Or, d'après Pitman-Yor ([14], p. 427), on a :

$$R\left(\exp -\frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 ds\ X_s^2 | X_1 = \rho\right) = \left(\frac{\lambda}{\text{sh}\ \lambda}\right)^{3/2}\exp -\frac{\rho^2}{2}(1-\lambda\coth\lambda).$$

Ainsi, si l'on pose : $\mu = 2 + \lambda(1-\coth\lambda)$, il vient :

$$\psi(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\text{sh}\ \lambda}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{\lambda}{2}\right)\int_0^\infty d\rho\ \rho\ e^{-\frac{\rho^2}{2}\mu}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\text{sh}\ \lambda}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{\lambda}{2}\right)\cdot\frac{1}{\mu}.$$

En récapitulant tous les calculs précédents, on obtient la

<u>Proposition 6</u> : *La* $(\mathcal{G}_t)$ *projection optionnelle de la martingale :*

$$\exp\left(-\frac{\lambda}{2}(B_t^2-t) - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t ds\ B_s^2\right)$$

est :

$$\exp\left(\frac{\lambda t}{2} - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^{g_t} ds\ B_s^2\right)\theta(\lambda(t-g_t)),$$

où :
$$\theta(\xi) = \left(\frac{\xi}{\text{sh}\ \xi}\right)^{3/2}\frac{1}{[2+\xi(1-\coth\xi)]}$$

(3.4) <u>Existence de certaines valeurs principales associées à</u> (μ_t).

Nous allons maintenant définir, à l'aide d'une extension de la formule (2.o), certaines valeurs principales relatives au processus (μ_t).

Dans la suite, $F :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction satisfaisant :

(3.g) $$F(1) - F(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} f(y) \quad (x > 0), \text{ avec } f \in L^2_{loc}([0,\infty[).$$

Rappelons que, d'après Hardy, on a alors :

(3.h) $$\sqrt{x}\, F(x) \xrightarrow[(x\to 0)]{} 0 \ ; \quad F \in L^2_{loc}([0,\infty[).$$

On peut maintenant énoncer le

<u>Théorème 2</u> : *Soit* $f \in L^2_{loc}([0,\infty[)$.

1) La famille des processus $\left(\int_0^t \frac{ds}{\mu_s} f(|\mu_s|)1_{(|\mu_s|\ge\varepsilon)}, t \ge 0\right)$ *converge, lorsque* $\varepsilon \to 0$, *dans* L^2, *uniformément sur tout intervalle compact de* $\mathbb{R}_+$. *On notera simplement* $\left(\int_0^t \frac{ds}{\mu_s} f(|\mu_s|), t \ge 0\right)$ *une version continue du processus limite.*

2) F *désignant une fonction liée à* f *au moyen de la formule* (3.g), *on a l'égalité suivante entre processus continus à droite :*

$$\mu_t F(|\mu_t|) = \int_0^t F(|\mu_{s-}|)d\mu_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{\mu_s} f(|\mu_s|)$$

(*la fonction* $(xF(|x|)\ ;\ x \ne 0)$ *est prolongée continument en* 0 *par la valeur* 0).

<u>Démonstration</u> : D'après la formule (2.o), on a , pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mu_t F(|\mu_t| \vee \varepsilon) = \int_0^t F(|\mu_{s-}| \vee \varepsilon)d\mu_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{\mu_s} f(|\mu_s|)1_{(|\mu_s|\ge\varepsilon)}.$$

Pour démontrer les points 1) et 2) du théorème, il suffit maintenant de montrer que, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, les processus $(\mu_t F(|\mu_t| \vee \varepsilon)\ ;\ t \ge 0)$ d'une part, et $\left(\int_0^t F(|\mu_{s-}| \vee \varepsilon)d\mu_s\ ;\ t \ge 0\right)$ d'autre part, convergent dans L^2, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, uniformément sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}_+$ vers :

$\mu_t F(|\mu_t|)$ et $\int_0^t F(|\mu_{s-}|)d\mu_s$, respectivement.

Or, on a :

$$\sup_{s\le t} |\mu_s\{F(|\mu_s| \vee \varepsilon) - F(|\mu_s|)\}|$$

$$\le \sup_{s\le t} \{|\mu_s|\ |F(\varepsilon) - F(|\mu_s|)|1_{(|\mu_s|\le\varepsilon)}\}$$

$$\le \varepsilon|F(\varepsilon)| + \sup_{0\le y\le\varepsilon} |yF(y)|,$$ expression qui, d'après (3.h), tend vers 0.

D'autre part, on a :

$$E\left[\sup_{s\le t}\left(\int_0^s d\mu_u(F(|\mu_{u-}| \vee \varepsilon) - F(|\mu_{u-}|))\right)^2\right]$$

$$\le 4E\left[\left(\int_0^t d\mu_u(F(|\mu_{u-}| \vee \varepsilon) - F(|\mu_{u-}|))\right)^2\right] \qquad \text{(Doob)}$$

$$\le 2E\left[\int_0^t du\ 1_{(|\mu_u|\le\varepsilon)}(F(\varepsilon) - F(|\mu_u|))^2\right] \qquad \left(\text{car : } \langle\mu\rangle_u = \frac{u}{2}\right)$$

$$\le 8\sqrt{t}\int_0^\varepsilon dx\ (F(\varepsilon) - F(x))^2 \qquad \text{(d'après (2.p))}$$

$$\le 16\sqrt{t}\left\{\varepsilon F^2(\varepsilon) + \int_0^\varepsilon dx\ F^2(x)\right\} \xrightarrow[(\varepsilon\to 0)]{} 0, \text{ d'après (3.h).} \qquad \square$$

Le théorème 2 permet en particulier de définir, pour tout $\beta < 1/_2$, les valeurs principales : $\left(\int_0^t \frac{ds}{\mu_s|\mu_s|^\beta}\ ,\ t \ge 0\right)$,

pour lesquelles nous développons, au paragraphe 4, des calculs explicites de lois.

Par analogie avec la discussion menée dans le sous-paragraphe (3.2) pour les cas (α) et (β) correspondant respectivement aux formules d'Itô (3.a) et (3.b), nous faisons les remarques suivantes à propos du cas (γ) qui correspond à la formule (3.c) :

on utilise la notation (dangereuse !) x^α pour $\text{sgn}(x)|x|^\alpha$; alors, pour tout $k < \frac{1}{2}$, $(B_t^{1-k}, t \ge 0)$ est un $(\mathcal{F}_t)$ processus de Dirichlet dont la décomposition canonique est :

$$B_t^{1-k} = (1-k)\int_0^t \frac{dB_s}{|B_s|^k} - \frac{(1-k)k}{2}\int_0^t \frac{ds}{B_s^{k+1}} .$$

A une constante multiplicative près, μ_t^{1-k} est la projection $(\mathcal{G}_t)$ optionnelle de B_t^{1-k} ; $(\mu_t^{1-k}, t \geq 0)$ est un $(\mathcal{G}_t)$ processus de Dirichlet dont la décomposition canonique est :

$$\mu_t^{1-k} = \int_0^t \frac{d\mu_s}{|\mu_{s-}|^k} - \frac{k}{2}\int_0^t \frac{ds}{\mu_s^{k+1}} .$$

Remarquons également que, lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, la $(\mathcal{G}_t)$ projection duale prévisible de $\displaystyle\int_0^t \frac{ds}{B_s^{k+1}} 1_{(|B_s|\geq\varepsilon)}$ converge dans L^1, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}_+$ vers un multiple de $\displaystyle\int_0^t \frac{ds}{\mu_s^{1+k}}$.

Ajoutons encore aux couples de processus de Dirichlet : B_t^{1-k} et μ_t^{1-k} considérés ci-dessus le couple suivant :

$$B_t \log|B_t| = \int_0^t (\log|B_s|)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{B_s}$$

et

$$\mu_t \log|\mu_t| = \int_0^t (\log|\mu_{s-}|)d\mu_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{\mu_s} .$$

4. Distributions de certaines valeurs principales relatives à (μ_t).

(4.1) Existence des densités d'occupation de $(\mu_t, t \geq 0)$.

Nous remarquons tout d'abord que l'on peut parvenir à montrer l'existence des valeurs principales : $\displaystyle\int_0^t \frac{ds}{\mu_s^{1+\beta}}$ $(\beta < \frac{1}{2})$

sans avoir recours au Théorème 2 ci-dessus, mais en s'aidant plutôt des considérations suivantes sur les densités d'occupation du processus $(\mu_t, t \geq 0)$.

Théorème 3 : *Il existe une application mesurable* $\lambda : \begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,t,\omega) \longrightarrow \lambda_t^x(\omega) \end{array}$

telle que :

a) pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *, borélienne, et tout* $t \geq 0$,

$$\int_0^t ds\, f(\mu_s) = \int dx\, \lambda_t^x\, f(x)$$

b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\lambda_t^x, t \geq 0)$ *peut être défini explicitement par les formules suivantes :*

(i) *si* $x \neq 0$, $\lambda_t^x = 2|x| \sum_{\substack{u \in G \\ u \leq t}} 1_{\{\varepsilon_u = \mathrm{sgn}(x)\ ;\ (d_u \wedge t) - u \geq x^2\}}$

où ε_u *désigne le signe de l'excursion entre* u *et* d_u.

(ii) *si* $x = 0$, $\lambda_t^0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \ell_t^0$, où (ℓ_t^0) *désigne le temps local en* 0 *du mouvement brownien.*

c) pour tout $x \in \mathbb{R}$, *et tout* $t \geq 0$, λ_t^x *vérifie la formule de Tanaka :*

$$\mu_t\, 1_{(\mu_t > x)} = \int_0^t 1_{(\mu_{s-} > x)} d\mu_s + \frac{1}{2} \lambda_t^x \tag{4.a}$$

d) pour tous $t \geq 0$, *et* $x \in \mathbb{R}$, $E\left[(\lambda_t^x)^2\right] \leq 8t\, 1_{(|x| \leq \sqrt{t})}$.

Démonstration : 1) Pour simplifier, considérons seulement f fonction borélienne, positive, à support compact dans $]0,\infty[$. L'identité a), avec λ_t^x défini au moyen de b), (i), découle immédiatement d'un changement de variables élémentaire. En effet, on a :

$$\int_0^t ds\, f(\mu_s) = \sum_{\substack{u \in G \\ u \leq t}} \int_u^{(d_u \wedge t)} ds\, f(\sqrt{s-u}) = \sum_{\substack{u \in G \\ u \leq t}} \int_0^{((d_u \wedge t)-u)^{1/2}} 2v\, dv\, \varphi(v)$$

$$= \int_0^\infty dv\, \varphi(v)\, \lambda_t^v .$$

2) Remarquons maintenant que la définition prise en (b), (ii), de λ_t^0 , assure la continuité de l'application : $x \longrightarrow \lambda_t^x$, dans L^2, sur tout $\mathbb{R}$; la seule difficulté est en $x = 0$; or, la convergence dans L^2, et même p.s., de λ_t^x $(x \neq 0)$ vers λ_t^0 , définis au moyen de b), est un résultat classique d'approximation du temps local du mouvement brownien en 0, dû à Paul Lévy ;

il est souvent énoncé sous la forme symétrique :

$$\text{(4.b)} \qquad \eta \sum_{\substack{u \in G \\ u \le t}} 1_{(d_u - u \ge \eta^2)} \xrightarrow[(\eta \to 0)]{} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \ell_t^0 \qquad \text{(au sens } L^2\text{, ou p.s.)}$$

[le membre de gauche est égal, à une erreur de $O(\eta)$ près, à $\frac{\lambda_t^{\eta}+\lambda_t^{-\eta}}{2}$]

3) En conséquence de la remarque précédente, il nous suffit pour prouver la formule (4.a), de montrer que, pour t fixé :

$$(*) \qquad P(d\omega)dx \ \text{ p.s. }, \quad \nu_t^x = 0,$$

où l'on a posé :

$$\nu_t^x = \mu_t 1_{(\mu_t > x)} - \int_0^t 1_{(\mu_{s-} > x)} d\mu_s - \frac{1}{2}\lambda_t^x .$$

En effet, chacun des trois termes qui figurent dans la définition de ν_t^x est continu en x pour la convergence dans L^2 (pour les deux premiers termes, on utilise essentiellement le fait que la loi de μ en un temps fixe est diffuse). Or, si f satisfait toujours les hypothèses demandées en 1), et si l'on note $F(x) = \int_0^x dy\, f(y)$, on a la formule :

$$\text{(2.o)} \qquad \mu_t F(\mu_t) = \int_0^t F(\mu_{s-}) d\mu_s + \frac{1}{2}\int_0^t ds\, f(\mu_s),$$

dont on déduit, à l'aide du théorème de Fubini stochastique (voir [17]) que :

$$\int dx\, f(x)\, \nu_t^x = 0 \quad \text{p.s.},$$

ce qui implique (*).

4) D'après b), (i), il est immédiat que $\lambda_t^x = 0$, si $|x| > \sqrt{t}$.
D'autre part, on a, d'après (4.a) :

$$E\left[(\lambda_t^x)^2\right] \le 8\, E\left[\mu_t^2 + \left(\int_0^t d\mu_s\, 1_{(\mu_{s-} > x)}\right)^2\right] \le 8t.$$

Le théorème est entièrement démontré. □

<u>Remarques</u> : 1) L'estimation :

$$\text{(2.p)} \qquad E\left[\int_0^t ds\, |f(\mu_s)|\right] \le 2\sqrt{t} \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} dx\, |f(x)|$$

apparaît maintenant comme une conséquence immédiate de :

$$E(\lambda_t^x) \leq 2\sqrt{t}\ ,$$

elle même conséquence directe de (4.a).

2) La formule (4.a) permet également de retrouver le résultat d'approximation (4.b), et de préciser la continuité dans L^2 de λ_t^x, en $x = 0$.

En effet, on a, à l'aide de (4.a) :

$$E\left[\sup_{s\leq t} (\lambda_s^z-\lambda_s^0)^2\right] \leq C\left\{E\left[\int_0^t ds\ 1_{(|\mu_s|\leq|z|)}\right] + z^2\right\},$$

d'où, d'après (2.p) :

$$\text{(4.c)} \qquad E\left[\sup_{s\leq t} (\lambda_s^z-\lambda_s^0)^2\right] \leq C(1+\sqrt{t})|z| \quad (\text{pour } |z| \leq 1)$$

3) L'inégalité (4.c) permet également de montrer simplement que, pour tout t,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^t \frac{ds}{\mu_s} f(|\mu_s|)1_{(|\mu_s|\geq\varepsilon)}$$

existe dans L^1, uniformément en $t \leq A$, dès que : $\displaystyle\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{x}} |f(x)| < \infty$.

En effet, on a :

$$\int_0^t \frac{ds}{\mu_s} f(|\mu_s|)1_{(|\mu_s|\geq\varepsilon)} = \int_\varepsilon^\infty \frac{dx}{x} f(x)\ (\lambda_t^x-\lambda_t^{-x})$$

et le résultat découle alors aisément de (4.c).

(Cet argument est suffisant pour le cas important où $f(x) = \frac{1}{x^\beta}$, $\beta < \frac{1}{2}$).

<u>Note</u> : Les formules (4.a) et (2.o) sont une conséquence simple de la décomposition (144) de [1]. (L'extension au cas des fermés marqués par + ou - ne pose pas de problèmes ; elle a été traitée par Hamza dans sa thèse de 3ème cycle).

(4.2) <u>Quelques calculs de lois.</u>

Nous considérons tout d'abord, de façon générale, le processus continu

$$h_t^f = \int_0^t \frac{ds}{\mu_s} f(|\mu_s|)$$

défini, pour $f \in L^2_{loc}([0,\infty[)$, grâce au théorème 2.

Les développements qui constituent ce sous-paragraphe sont calqués sur ceux faits par Biane-Yor [3], relativement aux valeurs principales browniennes $\left(\int_0^t \frac{ds}{B_s} f(|B_s|), t \geq 0\right)$, pour lesquels nous renvoyons le lecteur à [3].

Soit $\tau_t = \inf\{u : \ell_u^0 > t\}$ $(t \geq 0)$.

Le point de départ des calculs ci-dessous est le fait que le processus $\left(h^f_{\tau_t} ; t \geq 0\right)$ est à accroissements indépendants, homogènes, symétriques.

En outre, pour $f_\beta(x) = \frac{1}{x^\beta}$ $(\beta < \frac{1}{2})$, on remarque, grâce aux propriétés de scaling du mouvement brownien, que :

(4.d) $(h_\beta(\tau_t), t \geq 0)$ est un processus stable, symétrique, d'indice $\nu = \frac{1}{1-\beta}$.

Lorsque β varie dans l'intervalle $]-\infty,\frac{1}{2}[$, ν varie dans l'intervalle $]0,2[$. On obtient donc de cette façon tous les processus stables symétriques (sauf le mouvement brownien...). Pour comparer cette construction à celles de Spitzer [16] pour le processus de Cauchy et de Molchanov-Ostrovski [11] pour tous les processus stables symétriques, nous sommes amenés à étudier, de façon générale, la loi de (h_{τ_t}, τ_t) qui est décrite dans la

Proposition 7 : *1) Soit* $f \in L^2_{loc}([0,\infty))$. *On a, pour tout* $\theta > 0$, *en posant* $F(u) = \int_0^u dv\, f(v)$, *et en désignant par* N *une variable gaussienne, centrée, réduite :*

$$E\left[\exp\left(ih^f_{\tau_t} - \frac{\theta^2}{2}\tau_t\right)\right] = \exp - t\theta\left\{1 + E\left[\frac{1-\cos 2F(\frac{|N|}{\theta})}{N^2}\right]\right\}.$$

2) En particulier, pour $f(x) = \frac{\lambda}{x^\beta}$ $(\beta < \frac{1}{2})$, *on obtient, en posant* $\xi = \frac{2\lambda}{(1-\beta)\theta^{1-\beta}}$:

$$E\left[\exp\left(i\lambda h_\beta(\tau_t) - \frac{\theta^2}{2}\tau_t\right)\right] = \exp - t\theta\left\{1 + E\left[\frac{1-\cos(\xi|N|^{1-\beta})}{N^2}\right]\right\}.$$

Démonstration : Si $n(dw)$ désigne la mesure d'Itô des excursions hors de 0 du mouvement brownien, w l'excursion générique, et $V = \inf\{u > 0 : w(u)=0\}$, on a :

$$E\left[\exp\left(ih^f_{\tau_t} - \frac{\theta^2}{2}\tau_t\right)\right]$$

$$= \exp - t\int n(dw)\left[1 - \exp\left(i\int_0^V \frac{du\ \mathrm{sgn}(w(u))}{\sqrt{u}} f(\sqrt{u})\right)\exp\left(-\frac{\theta^2}{2}V\right)\right]$$

$$= \exp - t\int n(dw)\left[1 - \cos(2F(\sqrt{V}))\exp - \frac{\theta^2}{2}V\right]$$

$$= \exp - t\left\{\theta + \int_0^\infty \frac{dv}{\sqrt{2\pi v^3}}\exp\left(-\frac{\theta^2 v}{2}\right)\left[1 - \cos(2F(\sqrt{v}))\right]\right\}$$

d'où le résultat cherché en faisant le changement de variables $v = u^2$. □

Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement au cas $\beta = 0$, et nous notons alors simplement $h_t = \int_0^t \frac{ds}{\mu_s}$. On a alors la

Proposition 8 : *Pour tous* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\theta > 0$*, on a :*

$$E\left[\exp\left(i\lambda h_{\tau_t} - \frac{\theta^2}{2}\tau_t\right)\right] = \exp - t\theta\ \varphi\left(\frac{2\lambda}{\theta}\right),$$

où $\varphi(\xi) = e^{-\xi^2/2} + \xi\int_0^\xi dx\ e^{-x^2/2}$.

En particulier, $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} h_{\tau_t}\ ;\ t \geq 0\right)$ *est un processus de Cauchy standard.*

Démonstration : A l'aide de la dernière formule de la proposition précédente, il nous suffit d'expliciter :

$$\varphi(\xi) - 1 \overset{\mathrm{def}}{=} f(\xi) = E\left[\frac{1 - \cos(\xi N)}{N^2}\right].$$

Or, on a : $f''(\xi) = E[\cos(\xi N)] = e^{-\xi^2/2}$ et l'on déduit des conditions frontière : $f(0) = f'(0) = 0$ que :

$$f(\xi) = \int_0^\xi dx \int_0^x dy\, e^{-y^2/2} = \int_0^\xi dy\, e^{-y^2/2}(\xi-y)$$

$$= \xi \int_0^\xi dy\, e^{-y^2/2} - (1-e^{-\xi^2/2}),$$ d'où le résultat annoncé. □

Toujours à l'aide de la théorie des excursions, on déduit de la Proposition 8 le

Théorème 4 : *Soit* S_θ *variable exponentielle de paramètre* $\frac{\theta^2}{2}$, *indépendante de* B. *Alors :*

1) Les variables $h_{g_{S_\theta}}$ *et* $h_{S_\theta} - h_{g_{S_\theta}}$ *sont indépendantes ;*

2) $h_{S_1} - h_{g_{S_1}} \stackrel{(d)}{=} 2N$, *avec* N *variable gaussienne centrée réduite ;*

3) $E\left[\exp\left(i\lambda h_{g_{S_\theta}}\right)\right] = \frac{1}{\varphi(\frac{2\lambda}{\theta})}$; $E\left[\exp\left(i\lambda h_{S_\theta}\right)\right] = \frac{1}{\psi(\frac{2\lambda}{\theta})}$ *où :*

$$\varphi(\mu) = e^{-\mu^2/2} + \mu \int_0^\mu dx\, e^{-x^2/2} \; ; \quad \psi(\mu) = 1 + \mu^2 \int_0^1 dx\, e^{\frac{\mu^2}{2}(1-x^2)} .$$

4) Si p *désigne le pont brownien sur l'intervalle* (0,1), *et*

$$h_p = \int_0^1 du \frac{\operatorname{sgn}(p_u)}{\sqrt{u-\gamma_u}}, \text{ avec } \gamma_u = \sup\{s \le u : p_s = 0\},$$

alors : $E\left[\exp - \frac{\lambda^2}{2} h_p^2\right] = \frac{1}{\varphi(2\lambda)}$.

Démonstration : Pour démontrer 3) par exemple, on utilise le fait que :

$$E\left[\exp\left(i\lambda h_{g_{S_\theta}}\right) \,|\, \ell^0_{S_\theta} = s\right] = E\left[\exp\left(i\lambda h_{\tau_s} - \frac{\theta^2}{2}\tau_s\right)\right] e^{\theta s}$$

et, d'autre part : $P\left(\ell^0_{S_\theta} \in ds\right) = \theta e^{-\theta s} ds.$ □

(On pourra se reporter à Biane-Yor [3] pour les arguments de théorie des excursions).

(4.3) Interprétation des résultats du théorème 4.

Comme nous l'avons déjà signalé en (4.2), l'étude que nous menons ici du processus $(h_t, t \geq 0)$ est calquée sur celle faite par Biane-Yor [3] du processus $H_t = \int_0^t \frac{ds}{B_s}$, $t \geq 0$.

Il est remarquable que les résultats concernant la distribution de H, obtenus en [3], et que nous rappelons dans l'énoncé suivant (Proposition 9) soient encore vrais (à de simples modifications près) lorsque l'on remplace le mouvement brownien par le processus (μ_t) (voir la Proposition 10).
Pour simplifier l'écriture, introduisons les notations :

$$H_t^- = H_{g_t} \quad \text{et} \quad h_t^- = h_{g_t} .$$

Remarquons en outre la relation :

$$h_t = h_t^- + 2\mu_t. \tag{4.e}$$

<u>**Proposition 9 (Biane-Yor [3])**</u> : *Soit* S_θ *variable exponentielle de paramètre* $\frac{\theta^2}{2}$, *indépendante de* B. *Alors :*

1) les variables $H_{S_\theta}^-$ *et* $H_{S_\theta} - H_{S_\theta}^-$ *sont indépendantes ;*

2) on a : $E\left[\exp\left(i\lambda H_{S_\theta}^-\right)\right] = \dfrac{\operatorname{th}(\pi\lambda/_\theta)}{\pi\lambda/_\theta}$; $E\left[\exp\left(i\lambda H_{S_\theta}\right)\right] = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(\pi\lambda/_\theta)}$

3) en conséquence, si B *et* γ *désignent deux mouvements browniens indépendants issus de* 0, *on a :*

$$\left(H_{S_\theta}^-, H_{S_\theta}\right) \overset{(d)}{=} \left(\gamma(g_{U_\theta}), \gamma(U_\theta)\right), \tag{4.f}$$

où $U_\theta = \inf\left\{t : |B_t| = \frac{\pi}{\theta}\right\}$, *et* $g_{U_\theta} = \sup\{t < U_\theta : B_t = 0\}$.

<u>**Proposition 10**</u> : *Soit* S_θ *variable exponentielle de paramètre* $\frac{\theta^2}{2}$, *indépendante de* B ; *soit, de plus,* γ *mouvement brownien réel, issu de* 0, *indépendant de* B. *On a alors :*

$$\left(h_{S_\theta}^-, h_{S_\theta}\right) \overset{(d)}{=} \left(\gamma(g_{V_\theta}), \gamma(V_\theta)\right) \tag{4.g}$$

où $V_\theta = \inf\left\{t : |\mu_t| = \frac{2}{\theta}\right\}$, *et* $g_{V_\theta} = \sup\{t < V_\theta : B_t = 0\}$.

Démonstration : 1) D'après le théorème 4, les variables $h^-_{S_\theta}$ et $h_{S_\theta} - h^-_{S_\theta}$ sont indépendantes ; on a, de plus, en posant $a = \frac{2}{\theta}$:

$$E\left[\exp i\lambda\left(h_{S_\theta} - h^-_{S_\theta}\right)\right] = \exp\left(-\frac{\lambda^2 a^2}{2}\right)$$

2) En conséquence, pour démontrer l'identité en loi (4.g), il nous suffit de montrer l'indépendance des variables $\gamma(g_{V_\theta})$ et $\gamma(V_\theta) - \gamma(g_{V_\theta})$ d'une part, et d'autre part, d'établir la formule :

$$\text{(4.h)} \qquad E\left[\exp i\lambda\gamma(V_\theta)\right] = \frac{1}{\psi(\lambda a)} .$$

La propriété d'indépendance cherchée découle de ce que : $V_\theta - g_{V_\theta} = a^2$, et du fait que γ est un mouvement brownien indépendant de B.
Démontrons maintenant la formule (4.h) :

tout d'abord, on a : $E\left[\exp(i\lambda\gamma(V_\theta))\right] = E\left[\exp - \frac{\lambda^2}{2} V_\theta\right]$; ensuite, d'après la partie 3) de la proposition 1, le processus :

$$\psi(\lambda\mu_t)\exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)$$

est une martingale. On obtient alors la formule (4.h) en appliquant le théorème d'arrêt en V_θ. □

A l'aide des propriétés de scaling du mouvement brownien (pour les détails, voir Biane-Yor [3], p. 69), on déduit de (4.f) les identités en loi :

$$\text{(4.f')} \qquad H_p^2 \overset{(d)}{=} g_{U_\pi} \quad \text{et} \quad H_1^2 \overset{(d)}{=} g'_{U_\pi} ,$$

où l'on a noté : $H_p = \text{v.p.} \int_0^1 \frac{ds}{p(s)}$, où p est un pont brownien standard,

$U_\pi = \inf\{t : |B_t| = \pi\}$ et $g_t^{(')} = \sup\{s \le t : B_s^{(')} = 0\}$,

B et B' désignant deux mouvements browniens réels indépendants, issus de 0.

De la même façon, on déduit de (4.g) les identités en loi :

$$\text{(4.g')} \qquad h_p^2 \overset{(d)}{=} g_{V_2} \quad \text{et} \quad h_1^2 \overset{(d)}{=} g'_{V_2} ,$$

avec la même notation que dans le théorème 4 pour h_p et $V_2 = \inf\{t : |\mu_t| = 2\}$.
En fait, on peut décrire plus généralement les lois des couples

$$(H_p, \tilde{\ell}_1) \quad \text{et} \quad (h_p, \tilde{\ell}_1)$$

où $\tilde{\ell}_1$ désigne le temps local en 0 du pont brownien standard. On a la :

Proposition 11 : *Soit* $(\gamma_t, t \geq 0)$ *mouvement brownien réel indépendant de* $(B_t, t \geq 0)$. *On note* $(\ell_t, t \geq 0)$ *le temps local en* 0 *de* B.
D'autre part, soit p *pont brownien standard, et* N *une variable gaussienne centrée réduite, indépendante de* p. *On a :*

1) $$|N| \left[\frac{1}{\pi} H_p, \tilde{\ell}_1\right] \overset{(d)}{=} \left[\gamma(g_{U_1}), \ell_{U_1}\right] \quad \text{où} \quad U_1 = \inf\{t : |B_t| = 1\}$$

2) $$|N| \left[\frac{1}{2} h_p, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \tilde{\ell}_1\right] \overset{(d)}{=} \left[\gamma(g_{V_1}), \ell_{V_1}\right] \quad \text{où} \quad V_1 = \inf\{t : |\mu_t| = 1\}.$$

Démonstration : 1) Il suffit de montrer que, si (A,B) désigne l'un quelconque des couples figurant en 1), resp : (C,D) l'un quelconque des couples figurant en 2), alors :

$$E\left[\exp\{i\lambda A - \xi B\}\right] = (\xi + \lambda \coth \lambda)^{-1}$$

resp :
$$E\left[\exp\{i\lambda C - \xi D\}\right] = \left[\xi \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \varphi(\lambda)\right]^{-1}.$$

2) Nous ne ferons la démonstration que pour 2), les calculs correspondant à 1) étant plus classiques.

On montre tout d'abord, par scaling et à l'aide de la théorie des excursions (de même que pour démontrer le théorème 4), la formule :

$$E\left[\exp|N|\{i\lambda h_p - \xi\tilde{\ell}_1\}\right] = \left[\xi + \varphi(2\lambda)\right]^{-1}.$$

D'autre part, la projection sur $(\mathcal{G}_t)$ de la martingale :

$$\left[\mathrm{ch}(\lambda B_t) + \frac{\xi}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda|B_t|)\right]\exp - \left[\xi\ell_t + \frac{\lambda^2}{2} t\right]$$

est :

$$\left[\psi(\lambda\mu_t) + \xi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, |\mu_t| \exp(\frac{\lambda^2}{2} \mu_t^2)\right]\exp - \left[\xi\ell_t + \frac{\lambda^2}{2} t\right]$$

et l'on obtient, par application du théorème d'arrêt en V_a :

$$E\left[\exp - \left[\xi \ell_{V_a} + \frac{\lambda^2}{2} V_a\right]\right] = \left[\psi(\lambda a) + \xi \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a \exp \frac{\lambda^2 a^2}{2}\right]^{-1}.$$

On déduit de cette formule les égalités suivantes :

$$E\left[\exp\left\{i\lambda\gamma(g_{V_a}) - \xi \ell_{V_a}\right\}\right]$$

$$= E\left[\exp\left[-\frac{\lambda^2}{2} g_{V_a} - \xi \ell_{V_a}\right]\right] = \left[\varphi(\lambda a) + \xi \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a\right]^{-1},$$

ce qui donne le résultat recherché.

(4.4) Une perte d'information.

a) L'article de Ruiz de Chavez [15] sur l'extension du théorème de Paul Lévy aux mesures signées a été à l'origine de l'étude du processus H menée en [3]. En fait, une partie de l'appendice de [3] est consacrée à l'étude de la mesure signée :

(4.i) $$Q = B_1 \cdot W$$

où W désigne la mesure de Wiener sur $C[0,1]$, et $B_t(\omega) = \omega(t)$ $(t \leq 1)$.

Formellement, le transformé de Girsanov du mouvement brownien $(B_t, t \leq 1)$ pour le couple de mesures (W,Q) est :

$$\hat{B}_t = B_t - \int_0^t \frac{ds}{B_s} \qquad (t \leq 1)$$

et on peut penser, a priori, que $(\hat{B}_t, t \leq 1)$ doit être un mouvement brownien relativement à Q ; il n'en est rien et on montre en fait que :

$$Q|_{\sigma\{\hat{B}_u\ ;\ u \leq 1\}} = 0$$

ce qui équivaut à :

(4.i') $$W(B_1 | \sigma\{\hat{B}_u, u \leq 1\}) = 0$$

En particulier, la filtration naturelle de $\hat{B}$ est strictement contenue dans celle de B.

b) Nous étudions maintenant les mêmes questions lorsqu'on remplace en (4.i) la variable B_1 par μ_1.

Définissons donc :

(4.j) $$q = \mu_1 \cdot W \quad \text{sur } C[0,1].$$

Formellement, la transformée de Girsanov de la martingale $(\mu_t, t \le 1)$ pour le couple de mesures (W, q) est :

$$\hat{\mu}_t = \mu_t - \int_0^t \frac{d\langle\mu\rangle_s}{\mu_s} \equiv \mu_t - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{ds}{\mu_s}.$$

Notre étude est maintenant facilitée par la remarque suivante, que nous avons déjà faite en (4.e) :

$$\hat{\mu}_t = -\frac{1}{2} h_{g_t} = -\frac{1}{2} h_t^- .$$

En conséquence, la filtration naturelle de $\hat{\mu}$ est contenue dans $(\mathcal{F}_{g_t} ; t \ge 0)$; en particulier, $\sigma\{\hat{\mu}_t, t \le 1\} \subset \mathcal{F}_{g_1}$.

Or, on a :

(4.j') $\quad q|_{\mathcal{F}_{g_1}} = 0$, ce qui équivaut à : $W(\mu_1 | \mathcal{F}_{g_1}) = 0$,

et, a fortiori :

(4.j") $\quad q|_{\sigma\{\hat{\mu}_t, t \le 1\}} = 0.$

Pour démontrer (4.j'), il suffit de remarquer que la projection sur $(\mathcal{G}_t)$ de la martingale : $Z_{g_t} B_t$, où Z est un processus prévisible borné, est : $Z_{g_t} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mu_t$. En conséquence, on a donc :

$$q(Z_{g_1}) = W(Z_{g_1} \mu_1) = 0.$$

Dans le cadre brownien, il est remarquable que la filtration du processus $(\hat{B}_t, t \le 1)$ soit strictement contenue dans celle de B car, d'après un théorème de Zvonkin, pour tout $\varepsilon > 0$, la filtration du processus :

$$\hat{B}_t^{(\varepsilon)} \equiv B_t - \int_0^t \frac{ds}{B_s} 1_{(|B_s| \ge \varepsilon)}$$

est identique à celle du mouvement brownien.

c) Nous terminons ce paragraphe par un résultat particulièrement simple de projection sur $(\mathcal{G}_t)$.

D'après Biane-Yor [3], le processus $(B_t \hat{\mathcal{E}}_t^f)$

où : $\hat{\mathcal{E}}_t^f = \exp\left[\int_0^t f(u) d\hat{B}_u - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(u) du\right]$, et $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction simple $\left[: f(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{]t_i, t_{i+1}]}(u)\right]$ est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale.

On montre aisément, à l'aide de la formule (2.a), que la projection de $(B_t \hat{\mathcal{E}}^f_t)$ sur $(\mathcal{G}_t)$ est : $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \mu_t\, \hat{\mathcal{E}}^f_{g_t}$.

Appendice.

Il est constitué de 2 paragraphes dans lesquels, respectivement :

- nous identifions les polynômes P_{2p} définis à la suite de la Proposition 1 (voir la formule (2.j)),

- nous donnons une seconde démonstration de l'identité entre projections duales prévisibles obtenue dans le Corollaire de la Proposition 4, démonstration qui s'appuie maintenant sur la théorie des excursions browniennes.

1. Identification des polynômes P_{2p}.

Soit $k > 0$; définissons la transformation : $F \longrightarrow F_k$ par :

(a.1) $$F_k(y) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty da\, a^{k-1}\, e^{-a}\, F(ay)$$

pour tout polynôme F sur $\mathbb{R}$, et remarquons que, si $F(y) = \sum_{p=0}^{N} f_p y^p$, alors :

$$F_k(y) = \sum_{p=0}^{N} (k)_p\, f_p y^p, \text{ où } (k)_p = \frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)} .$$

On déduit de la définition (voir [9], chapitre 9) des fonctions hypergéométriques :

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p\, (\beta)_p}{(\gamma)_p} \frac{z^p}{p!}$$

et des fonctions hypergéométriques confluentes :

$$\Phi(\alpha,\gamma;z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_p}{(\gamma)_p} \frac{z^p}{p!}$$

que, pour k, k' donnés, la transformée F_k du polynôme

$$F(y) = \Phi(-n,k';y) \quad \text{est :} \quad F_k(y) = F(-n,k,k';y).$$

On a donc, d'après (a.1) :

(a.2) $$F(-n,k,k';y) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty da\, a^{k-1}\, e^{-a}\, \Phi(-n,k';ay).$$

Les polynômes $F(-n,k,k';y)$ sont appelés polynômes hypergéométriques, alors que les polynômes de Laguerre : $L_n^{\alpha}(y)$ satisfont ([9], p. 273)

$$L_n^{k'-1}(z) = \frac{(k')_n}{n!} \Phi(-n,k';z).$$

Dans le cas particulier $k' = 1/2$, on a, d'après [9], p. 273 :

(a.3) $$\tilde{H}_{2p}(z) = (-1)^p \frac{(2p)!}{p!} \Phi(-p,\tfrac{1}{2};z^2),$$

les polynômes d'Hermite $\tilde{H}_n$ étant définis dans [9], p. 60, au moyen de la fonction génératrice : $\exp(2xt-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tilde{H}_n(x)}{n!} t^n$, ce qui, compte-tenu de la proposition 1, nous donne :

$$H_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}} \tilde{H}_n(x/\sqrt{2}).$$

Nous allons maintenant obtenir la relation :

(a.4) $$P_{2p}(x,t) = (-1)^p F\left[-p,1,\tfrac{1}{2};\frac{x^2}{t}\right] t^p$$

qui exprime ainsi les polynômes P_{2p} en fonction des polynômes hypergéométriques d'indices $k=1$ et $k' = 1/2$.

<u>Démonstration de (a.4)</u> : D'après notre définition de P_{2p} (avant l'énoncé du Corollaire 1), on a :

$$\frac{(2p)!}{2^p\, p!} P_{2p}(x,t) = \int_0^\infty da\, e^{-a} \frac{1}{2^p} \tilde{H}_{2p}(x\sqrt{a};t)$$

$$= \frac{(-1)^p(2p)!}{2^p\, p!} \int_0^\infty da\, e^{-a}\, \Phi\left[-p,\tfrac{1}{2};\frac{x^2 a}{t}\right] t^p, \text{ d'après (a.3).}$$

On en déduit :

$$P_{2p}(x;t) = (-1)^p \int_0^\infty da\, e^{-a}\, \Phi\left[-p,\tfrac{1}{2};\frac{x^2 a}{t}\right] t^p$$

$$= (-1)^p F\left[-p,1,\tfrac{1}{2};\frac{x^2}{t}\right] t^p, \text{ d'après (a.2).}$$

On a donc prouvé (a.4). □

<u>Remarque</u> : L'étude des entrelacements des processus de Bessel faite par le

second auteur en [20] fait intervenir toute la famille des polynômes hypergéométriques pour $0 < k' < k$, et $k \geq 1$, et donne une interprétation probabiliste de (a.2). □

Nous revenons maintenant à la définition (2.j) des polynômes P_{2p} ; on a :

(2.j') $$P_{2p}(x,-t) = t^p + 2p\, x^2\, t^{p-1}\, \xi_{p-1}\left(\frac{x^2}{t}\right)$$

où l'on a posé :

$$\xi_p(x) = \int_0^1 dy \left[x(1-y^2) + 1\right]^p.$$

Les polynômes ξ_p satisfont une relation de récurrence remarquable :

(*) $$(1+2p)\ \xi_p(x) = 1 + 2p(x+1)\xi_{p-1}(x).$$

Démonstration : En faisant le changement de variables $u^2 = 1-y^2$, il vient :

(+) $$\xi_p(x) = \int_0^u du \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} (xu^2+1)^p,$$

ce qui donne, par intégration par parties avec les fonctions

$$U(u) = -\sqrt{1-u^2} \quad \text{et} \quad V(u) = (xu^2+1)^p :$$

$$\begin{aligned}
\xi_p(x) &= 1 + 2px \int_0^1 u\, du\, (xu^2+1)^{p-1} \sqrt{1-u^2} \\
&= 1 + 2p \int_0^1 \frac{u\, du}{\sqrt{1-u^2}} (xu^2+1)^{p-1} (1-u^2)x \\
&= 1 + 2px\ \xi_{p-1}(x) - 2p \int_0^1 \frac{u\, du}{\sqrt{1-u^2}} (xu^2+1)^{p-1} \left[(xu^2+1)-1\right] \\
&= 1 + 2px\ \xi_{p-1}(x) - 2p\ \xi_p(x) + 2p\ \xi_{p-1}(x),
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit (*)

Remarque : On peut considérer (*) comme une extension des formules de Wallis qui explicitent $I_\alpha \equiv \int_0^{\pi/2} d\theta(\sin\theta)^\alpha$.

En effet, d'après (+), le coefficient de x^p dans $\xi_p(x)$ est I_{2p+1} et on a donc, d'après (*)

$$(2p+1)I_{2p+1} = 2p\ I_{2p-1}\ ,$$

formule de récurrence dont découle immédiatement la valeur explicite de I_{2p+1}.

2. Deux autres démonstrations de l'identité

(a.5) $$\left(\int_0^{\cdot} ds\, f(B_s)\right)^{\neq} = \left(2\int_0^{g_\cdot} ds\, f(2B_s)\right)^{\neq}$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne (voir le corollaire de la Proposition 4).

Nous montrons simplement que les projections duales prévisibles des deux processus $\int_0^t ds\, f(B_s)$ et $2\int_0^{g_t} ds\, f(2B_s)$ sur la filtration $(\mathcal{F}_{g_t})$ sont égales, et nous laissons au lecteur la démonstration de la réduction à ce résultat que nous désignerons par (a.5').

Remarquons tout d'abord que l'identité (a.5') équivaut à :

(a.6) $$\int n(de)\int_0^V ds\, \varphi(s)f(e_s) = \int n(de)\ \varphi(V)\int_0^V 2\, ds\, f(2e_s)$$

pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne, et toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ borélienne. Ici, $n(de)$ désigne la mesure d'Itô des excursions browniennes hors de 0, et V la durée de vie de l'excursion générique $e \equiv (e_s, s \geq 0)$.

Démonstration de l'équivalence de (a.5') et (a.6) :

Une classe de processus prévisibles par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_{g_t})$, stable par produit, et qui engendrent la tribu $(\mathcal{F}_{g_t})$ prévisible est :

$$Z_{(g_{t-})}\ \varphi(t-g_{t-}) \quad (t > 0)$$

où $(Z_u, u > 0)$ est un processus $(\mathcal{F}_u)$ prévisible, et $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne, bornée.

L'identité (a.5') équivaut donc à :

$$E\left[\int_0^\infty ds\ Z_{g_s}\ \varphi(s-g_s)f(B_s)\right] = E\left[\sum_{u\in D} Z_{g_u}\ \varphi(u-g_u)\int_{g_u}^u ds\ 2\ f(2B_s)\right]$$

où D désigne l'ensemble des extrémités droites des intervalles contigus à l'ensemble des zéros du mouvement brownien, et Z et φ décrivent les ensembles (de processus, resp : de fonctions) indiqués ci-dessus.

Or, on a :

$$\sum_{u\in D} Z_{g_u}\ \varphi(u-g_u)\int_{g_u}^{u} ds\ 2f(2B_s) = \int_0^\infty ds\ Z_{g_s}\ \varphi(d_s-g_s)\ 2f(2B_s).$$

L'identité (a.5') équivaut donc à :

$$\text{(a.5")}\qquad E\left[\int_0^\infty ds\ Z_{g_s}\ \varphi(s-g_s)f(B_s)\right] = E\left[\int_0^\infty ds\ Z_{g_s}\ \varphi(d_s-g_s)2f(2B_s)\right]$$

A l'aide de la théorie des excursions, le membre de gauche de (a.5") est égal à :

$$E\left[\int_0^\infty d\ell_u Z_u\right]\int n(de)\int_0^V ds\ \varphi(s)f(e_s)$$

tandis que celui de droite est égal à :

$$E\left[\int_0^\infty d\ell_u Z_u\right]\int n(de)\varphi(V)\int_0^V 2ds\ f(2e_s).$$

Finalement, l'identité (a.5"), et donc (a.5'), équivaut à (a.6). □

<u>Une première démonstration de (a.6)</u> :

Par symétrie, nous pouvons remplacer n par n_+, mesure d'Itô des excursions positives, et supposer f définie simplement sur $\mathbb{R}_+$.

D'après Biane-Yor [3], on a : $\displaystyle\int_0^\infty ds\ n_+(\cdot\,;s<V) = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{2\pi s}} M^s$, où M^s désigne la loi du méandre brownien défini sur $[0,s]$.

Le membre de gauche de (a.6) est donc égal à :

$$\int_0^\infty \frac{ds\ \varphi(s)}{\sqrt{2\pi s}} M^s[f(m_s)] = \int_0^\infty \frac{ds\ \varphi(s)}{\sqrt{2\pi s}}\int_0^\infty \frac{dy\ y\ e^{-y^2/2s}}{s} f(y)$$

$$\text{(a.7)}\qquad = \int_0^\infty dy\ f(y)\ E[\varphi(T_y)]$$

où $T_y = \inf\{t : B_t = y\}$.

En ce qui concerne le membre de droite de (a.6), on utilise la description d'Itô de n_+, selon laquelle :

$$\text{(i)}\qquad n_+(e_s \in dy) = \frac{1}{(2\pi s^3)^{1/2}}\ y\ e^{-y^2/2s}\ dy\ ;$$

(ii) $n_+(V \in dt \mid e_s=y) = P(s + T_y \in dt)$.

On obtient ainsi :

$$\int n_+(de)\, \varphi(V)\, 2 \int_0^V ds\, f(2e_s) = 2 \int_0^\infty ds \int n_+(de)\, f(2e_s)\, \varphi(V)\, 1_{(V>s)}$$

$$= 2 \int_0^\infty \frac{ds}{(2\pi s^3)^{1/2}} \int dy\, f(2y)\, e^{-y^2/2s}\, E[\varphi(s+T_y)]$$

(a.8) $$= 2 \int dy\, f(2y)\, E[\varphi(\tilde{T}_y + T_y)],$$

où $\tilde{T}_y$ désigne une copie indépendante de T_y.

Or, on a : $\tilde{T}_y + T_y \overset{(\text{loi})}{=} T_{2y}$ et l'expression figurant en (a.8) est donc

égale à :

$2\int dy\, f(2y)\, E[\varphi(T_{2y})] = \int dz\, f(z)\, E[\varphi(T_z)]$, c'est-à-dire (a.7).

L'identité (a.6) est ainsi démontrée. □

<u>Une seconde démonstration de (a.6)</u> :

Elle s'appuie sur les relations entre mesure de Palm et théorie des excursions, que l'on trouvera exposées par exemple dans Pitman [13], dont nous conservons les notations.

Soit $\bar{P}$ la loi (σ-finie) stationnaire du mouvement brownien indexé par $\mathbb{R}$ (on a donc : $\bar{P}(B_o \in dy) = \bar{P}(B_t \in dy) = dy$, pour tout t).

D'après Pitman ([13], p. 291, formule en bas de page), on a :

(a.9) $$\bar{E}[h(\theta_G, -G)] = \int n(de) \int_0^V h(e,s)ds,$$

pour toute fonction mesurable $h : \Omega \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $(-G)$ désignant l'âge en 0 de l'excursion enjambant l'instant 0.

En particulier, on a, pour toute variable z positive :

(a.10) $$\bar{E}(z) = \int n(de) \int_0^V ds(z \circ \theta_s).$$

Remarquons maintenant que le membre de gauche de (a.6) s'écrit, grâce à l'invariance de n par retournement du temps en V :

$$\int n(de)\int_0^V ds\ \varphi(V-s)f(e_s) = \int n(de)\int_0^V ds\ \varphi(V)o\theta_s\ f(e_o)o\theta_s$$

$$= \bar{E}[\varphi(V)f(e_o)],\ \text{d'après (a.10)}$$

$$= \int_0^\infty dx\ f(x)\ E_x[\varphi(T_o)].$$

D'autre part, en appliquant (a.9) à $h(e,s) = 2\varphi(V(e))f(2e_s)$, le membre de droite de (a.9) s'écrit :

$$2\int n(de)\int_0^V ds\ \varphi(V)f(2e_s) = 2\bar{E}[\varphi(V)o\theta_G\ f(2e_o)]$$

$$= 2\int_0^\infty dx\ E_o[\varphi(T_{2x})]f(2x)$$

$$= \int_0^\infty dx\ E_o[\varphi(T_x)]f(x),$$

et (a.6) est donc démontrée. □

REFERENCES

[1] J. Azéma : Sur les fermés aléatoires.
Sém. Probas XIX. Lect. Notes in Maths. 1123. Springer (1985).

[2] Ph. Biane, M. Yor : Quelques précisions sur le méandre brownien.
Bull. Sciences Maths, 2ème série, 112, p. 101-109 (1988).

[3] Ph. Biane, M. Yor : Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. Bull. Sciences Maths., 2ème série, 111, p. 23-101 (1987).

[4] N. Bouleau, M. Yor : Sur la variation quadratique des temps locaux de certaines semi-martingales.
C.R. Acad. Sci. Paris, t. 292 (2 Mars 1981), p. 491-494.

[5] K.L. Chung : Excursions in Brownian motion.
Ark. för Math., vol. 14, p. 155-177 (1976).

[6] M. Emery : On Azéma's martingales. Dans ce volume.

[7] J.P. Imhof : Density factorizations for Brownian motion, meander and the three-dimensional Bessel process, and applications.
J. App. Proba. t. 21, p. 500-510 (1984).

[8] Th. Jeulin : Application de la théorie du grossissement à l'étude des temps locaux browniens.
In : "Grossissements de filtrations : exemples et applications"
Lect. Notes in Maths. 1118. Springer (1985).

[9] N.N. Lebedev : Special functions and their applications.
Dover Publications, Inc., New-York (1972).

[10] P.A. Meyer : A new example of chaotic representation.
A paraître dans les Proceedings du :
IXth International Congress on Mathematical Physics, Swansea (July 1988).

[11] S.A. Molchanov, E. Ostrovski : Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes.
Theory of Prob. and its Appl. vol. XIV, n° 1, p. 128-131 (1969).

[12] E. Perkins : Local time is a semi-martingale.
Zeitschrift für Wahr., 60, p. 79-118 (1982).

[13] J.W. Pitman : Stationary excursions.
Sém. Probas. XXI. Lect. Notes in Maths. 1247. Springer (1987).

[14] J.W. Pitman, M. Yor : A decomposition of Bessel bridges.
Zeitschrift für Wahr, 59, p. 425-457 (1982).

[15] J. Ruiz de Chavez : Le théorème de Paul Lévy pour des mesures signées.
Sém. Probas XVIII. Lect. Notes in Maths 1059, p. 245-255. Springer (1984).

[16] F. Spitzer : Some theorems on two-dimensional Brownian motion.
Trans. Amer. Math. Soc. vol. 87, p. 187-197 (1958).

[17] C. Stricker, M. Yor : Calcul stochastique dépendant d'un paramètre.
Zeitschrift für Wahr., 45, p. 109-133 (1978).

[18] T. Yamada : On some representations concerning stochastic integrals.
Prob. Math. Stat, vol. 4, fasc. 2, p. 153-166 (1984).

[19] M. Yor : Sur la transformée de Hilbert des temps locaux browniens et une extension de la formule d'Itô.
Sém. Probas. XVI, Lect. Notes in Maths. 920, p. 238-247, Springer (1982).

[20] M. Yor : Intertwinings of Bessel processes.
Technical Report. University of California, Berkeley (1988).