SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GIORGIO LETTA

Sur les théorèmes de Hewitt-Savage et de de Finetti

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 531-535
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__531_0>

SUR LES THEOREMES DE HEWITT-SAVAGE ET DE DE FINETTI

Giorgio Letta
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Via Buonarroti 2, I-56100 Pisa

Résumé - Pour une famille infinie de variables aléatoires échangeables (à valeurs dans un espace mesurable quelconque), on démontre un résultat de convergence faible qui contient comme corollaires les théorèmes de Hewitt-Savage et de de Finetti, ainsi qu'une version faible de la loi des grands nombres pour une suite échangeable de variables aléatoires réelles. La démonstration, très simple, ne fait pas appel à la théorie des martingales. Elle n'utilise que des résultats classiques concernant la dualité des espaces L^p (et notamment la compacité faible).

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.

Pour tout élément p de $[1,\infty]$, on considère l'espace $L^p = L^p(\Omega,\mathcal{A},P)$ comme muni de la topologie faible $\sigma(L^p,L^q)$, où q désigne l'exposant conjugué de p.

Si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, on désigne par $\tilde{\mathcal{B}}$ la complétée de $\mathcal{B}$ dans $(\Omega,\mathcal{A},P)$, c'est-à-dire la plus petite sous-tribu de $\mathcal{A}$ qui contient $\mathcal{B}$ et tous les éléments de $\mathcal{A}$ négligeables pour la loi P.

On désigne par $E^{\mathcal{B}}$ l'opérateur d'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{B}$. Cet opérateur applique L^p dans L^p. En outre, dans la dualité entre L^p et L^q, on a

$$\langle E^{\mathcal{B}}[x],y\rangle = \langle x,E^{\mathcal{B}}[y]\rangle$$

pour tout élément x de L^p et tout élément y de L^q. Cette relation montre que l'application $x \longmapsto E^{\mathcal{B}}[x]$ de l'espace L^p dans lui même est faiblement continue (i.e. continue pour la topologie $\sigma(L^p,L^q)$).

Nous désignerons par $L^p(\mathcal{B})$ le noyau de l'application linéaire $x \longmapsto x-E^{\mathcal{B}}[x]$ de L^p dans lui même:

$$L^p(\mathcal{B}) = \{x\in L^p : x = E^{\mathcal{B}}[x]\}.$$

Ce noyau est constitué par les éléments de L^p (classes d'équivalence) dont chaque représentant est mesurable par rapport à la tribu $\tilde{B}$. Par conséquent, si $(B_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de sous-tribus de A, on a

$$\bigcap_{i \in I} L^p(B_i) = L^p(B),$$

où B désigne la tribu $\bigcap_{i \in I} \tilde{B}_i$.

Sur l'espace (Ω, A, P) on suppose donnée une famille infinie $(X_i)_{i \in I}$ de variables aléatoires, à valeurs dans un même espace mesurable (E, E).

Pour toute partie J de I, de complémentaire fini dans I, désignons par Σ_J le groupe des permutations de I qui ne déplacent aucun élément de J.

En outre, désignons par M_J la classe constituée par les variables aléatoires de la forme $f((X_i)_{i \in I})$, où f est une fonction mesurable bornée sur $(E^I, E^{\otimes I})$, telle que l'on ait

$$f((x_i)_{i \in I}) = f((x_{\sigma(i)})_{i \in I})$$

pour tout élément $(x_i)_{i \in I}$ de E^I et toute permutation σ appartenant à Σ_J. Il est clair que M_J est un espace de Riesz contenant les constantes et stable par convergence monotone bornée. Par conséquent, la classe S_J constituée par les parties de Ω dont la fonction indicatrice appartient à M_J est une tribu sur Ω, et les éléments de M_J sont exactement les variables aléatoires bornées mesurables par rapport à S_J.

Nous désignerons par T_J la tribu engendrée par les X_i avec $i \in J$. On a évidemment $T_J \subset S_J$.

L'intersection des tribus $\tilde{T}_J$ (resp. $\tilde{S}_J$) (lorsque J varie dans le filtre des complémentaires des parties finies de I) sera appelée la <u>tribu asymptotique</u> (resp. <u>symétrique</u>) associée à la famille $(X_i)_{i \in I}$ et à la loi P.

Nous désignerons par T, S ces deux tribus, de sorte qu'on pourra écrire:

$$L^p(T) = \bigcap_J L^p(T_J) \quad , \quad L^p(S) = \bigcap_J L^p(S_J). \tag{1}$$

Pour toute partie finie H de I, nous désignerons par F_H l'ensemble des injections de H dans I. Si J est le complémentaire d'une partie finie de I, la partie de F_H constituée par les injections de H dans J sera désignée par $F_{H,J}$. La classe de toutes les parties de ce type est une base de filtre sur F_H: on désignera par $\mathcal{F}_H$ le filtre qu'elle engendre sur F_H.

La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite <u>échangeable</u> si, pour toute permutation σ de I qui ne déplace qu'un nombre fini d'indices, la loi conjointe de la famille $(X_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est identique à celle de $(X_i)_{i\in I}$.

THEOREME. <u>Supposons que la famille</u> $(X_i)_{i\in I}$ <u>soit échangeable</u>.

<u>Etant données une partie finie</u> H <u>de</u> I <u>et une fonction réelle</u> f, <u>mesurable sur</u> $(E^H, \mathcal{E}^{\otimes H})$, <u>telle que la variable aléatorie</u> $f((X_i)_{i\in H})$ <u>appartienne à</u> $\mathcal{L}^p$, <u>désignons par</u> x <u>l'élément correspondant de</u> L^p.

<u>En outre, pour toute application injective</u> α <u>de</u> H <u>dans</u> I, <u>désignons par</u> x_α <u>l'élément de</u> L^p <u>admettant comme représentant</u> $f(X_{\alpha(i)})_{i\in H})$.

<u>On a alors les conclusions suivantes</u>:

(a) $E^{\mathcal{S}}[x] = E^{\mathcal{S}}[x_\alpha]$ <u>pour tout</u> α.

(b) $E^{\mathcal{S}}[x] = E^{\mathcal{T}}[x] = \lim_\alpha x_\alpha$ <u>(au sens de la topologie faible</u> $\sigma(L^p, L^q)$ <u>et suivant le filtre</u> $\mathcal{F}_H$).

<u>Démonstration</u>. L'assertion (a) est une conséquence immédiate de l'hypothèse d'échangeabilité. Cette même hypothèse entraîne aussi l'identité des lois des x_α. Il en résulte que l'ensemble des x_α est faiblement relativement compact dand L^p. (Pour p=1, on peut appliquer le critère de Dunford-Pettis (cf. [1], Chap. II, Th. 25); pour p>1, il suffit de remarquer que les x_α ont même norme dans L^p).

Supposons maintenant qu'un élément y de L^p soit valeur d'adhérence faible de l'application $\alpha \mapsto x_\alpha$ suivant le filtre $\mathcal{F}_H$ (c'est-à-dire qu'il soit <u>limite</u> faible de la même application suivant un filtre <u>plus fin</u>).

Pour toute partie J de I, de complémentaire fini dans I, la relation $x_\alpha \in L^p(\mathcal{T}_J)$ est vraie (par définition de x_α) dès que α appartient à $F_{H,J}$. Il en résulte $y \in L^p(\mathcal{T}_J)$, donc aussi $y \in L^p(\mathcal{T})$ (grâce à (1)), et <u>a fortio-</u>

ri $y \in L^p(\mathcal{S})$.

L'assertion (a) entraîne alors

$$E^{\mathcal{S}}[x] = E^{\mathcal{S}}[y] = y.$$

On a ainsi démontré que $E^{\mathcal{S}}[x]$ est l'unique valeur d'adhérence (c'est-à-dire la limite) de l'application $\alpha \longmapsto x_\alpha$ suivant le filtre $\mathcal{F}_H$.

En même temps, on a démontré que l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{S}}[x]$ appartient à $L^p(\mathcal{T})$, de sorte qu'elle coïncide avec $E^{\mathcal{T}}[x]$.

Le théorème qu'on vient de démontrer admet les trois corollaires suivants:

COROLLAIRE 1. (Hewitt et Savage: cf. [2], Chap. V, Th. 48).

Supposons que la famille $(X_i)_{i\in I}$ soit échangeable.

La tribu symétrique coïncide alors avec la tribu asymptotique.

Démonstration. Il résulte du théorème précédent que les opérateurs $E^{\mathcal{S}}$, $E^{\mathcal{T}}$ coïncident sur tout élément x de L^∞ admettant un représentant de la forme $f((X_i)_{i\in H})$, avec H partie finie de I et f fonction mesurable bornée sur $(E^H, \mathcal{E}^{\otimes H})$.

Par un raisonnement de classes monotones, on voit alors que les deux opérateurs en question coïncident sur $L^\infty(\mathcal{T}_I)$, donc en particulier sur $L^\infty(\mathcal{S})$, d'où le corollaire.

COROLLAIRE 2. (de Finetti: cf. [2], Chap. II, Th. 50). Supposons que la famille $(X_i)_{i\in I}$ soit échangeable.

Les X_i sont alors conditionnellement indépendantes par rapport à la tribu symétrique.

Démonstration. Etant données deux parties H,K de I, finies et disjointes, fixons un élément x de L^1 admettant un représentant de la forme $f((X_i)_{i\in H})$, et un élément y de L^∞ admettant un représentant de la forme $g((X_j)_{j\in K})$.

Avec les notations du théorème, on voit que la relation

$$E^{\mathcal{S}}[xy] = E^{\mathcal{S}}[x_\alpha y]$$

est vraie dès que α appartient à $F_{H,I\setminus K}$. (Il suffit d'appliquer l'assertion (a) du théorème à l'injection de $H\cup K$ dans I qui coïncide avec α sur H et avec l'identité sur K).

L'assertion (b) du théorème entraîne alors

$$E^{S}[xy] = E^{S}[E^{S}[x]y] = E^{S}[x]E^{S}[y] ,$$

et ceci prouve le corollaire.

COROLLAIRE 3. (Loi faible des grands nombres). Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite échangeable de variables aléatoires réelles appartenant à L^p.

La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge alors, au sens de la topologie $\sigma(L^p,L^q)$, vers l'espérance conditionnelle de X_1 par rapport à la tribu symétrique. Il en est donc de même de la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$, où $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

REMARQUE. Il est connu que, si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite échangeable de variables aléatoires réelles intégrables, la suite $(S_n/n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement.

Ce résultat peut être déduit du corollaire précédent à l'aide du théorème de de Finetti (corollaire 2) et de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov (concernant une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi).

Il en résulte que la convergence de $(S_n/n)_{n\geq 1}$ a lieu aussi au sens fort dans L^1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE, P.-A. MEYER, Probabilités et potentiel. Chap. I à IV. Hermann, 1975.

[2] C. DELLACHERIE, P.-A. MEYER, Probabilités et potentiel. Chap. V à VIII. Hermann, 1980.