Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Rémi Léandre

Volume de boules sous-riemanniennes et explosion du noyau de la chaleur au sens de Stein

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 426-447

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__426_0>

VOLUME DE BOULES SOUS-RIEMANNIENNES ET EXPLOSION

DU NOYAU DE LA CHALEUR AU SENS DE STEIN

Rémi LEANDRE
Faculté des Sciences de Franche-Comté
25030 Besançon Cedex - France

Introduction :

Considérons m+1 champs de vecteurs X_i, $i=0,\dots,m$, sur $\mathbb{R}^d$ de dérivées de tout ordre bornées et introduisons l'opérateur $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{m} X_i^2+X_o$ sur $\mathbb{R}^d$. Lorsqu'en tout x, l'algèbre de Lie engendrée par les $X_i, i\neq 0$, est égale à $\mathbb{R}^d$ (hypothèse forte de Hörmander), le semi-groupe associé à $\mathcal{L}$ possède une densité $C^\infty p_t(x,y)$.

Dans le cas où il existe des fonctions C^∞ $\lambda_i(x)$, $\lambda_{i,j}(x)$ telles que :

$$X_o(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x)X_i(x) + \sum_{i,j\neq 0} \lambda_{i,j}(x)\ [X_i, X_j](x) \tag{0.1}$$

le comportement en temps petit de la densité de ce semi-groupe est lié à un certain nombre de quantités géométriques que nous allons rappeler brièvement ([J-S]). Introduisons l'espace de Cameron-Martin H^1 des fonctions $t\to(h_t^i)$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^m$ d'énergie $\|h\|^2=\int_o^1 \sum_{i=1}^{m} |\overset{o}{h}{}_t^i|^2 dt$ finie. La courbe horizontale issue de x asociée à h est la solution de l'équation :

$$\begin{aligned} dy_s(dh) &= \sum_{i=1}^{m} X_i(y_s(dh))\ \overset{o}{h}{}_s^i\ ds \\ y_o(dh) &= x \end{aligned} \tag{0.2}$$

Posons $\Phi_x(dh) = y_1(dh)$. La distance semi-riemannienne $d(x,y)$ vérifie par hypothèse $d^2(x,y) = \inf_{h\in\Phi_x^{-1}(dh)} \|h\|^2$, et la boule hypoelliptique $B(x,r)$ de centre x et de rayon r est égale à l'image par Φ_x de la boule de rayon r et de centre 0 dans l'espace de Cameron-Martin. Dans le cas où (0.1) est vérifiée, D. Jerison et A. Sanchez ([J-S]) ont montré qu'il existe des constantes c, c', c_1, $c_1' > 0$ telles que :

$$\frac{c'}{\mathrm{vol}\ B(x,\sqrt{t})}\ \exp\left[-\frac{d^2(x,y)}{c_1 t}\right] \leq p_t(x,y) \leq \frac{c}{\mathrm{vol}\ B(x,\sqrt{t})}\ \exp\left[-\frac{d^2(x,y)}{c_1' t}\right] \tag{0.3}$$

suivant une direction donnée au départ par Stein.

En particulier toute famille de point $S_t\subset B(x,\sqrt{t})$ possède la propriété suivante :

Il existe deux constantes c_2 et $c'_2 > 0$ telles que pour tout y de S_t, on ait :

$$\frac{c_2}{\mathrm{vol}\ (B(x,\sqrt{t}))} \leqq p_t(x,y) \leqq \frac{c'_2}{\mathrm{vol}\ B(x,\sqrt{t})} \tag{0.4}$$

Nous dirons dans ce cas que la famille de parties S_t est une famille explosive de E.M. Stein (explosif, car vol $(B(x,\sqrt{t})) \to 0$).

L'objet de cet article part de la constatation suivante : si X_o ne satisfait pas à (0.1), il est possible ([BA-L1], [BA-L2]) que $p_t(x,x) \to 0$ quand $t \to 0$ et donc que $S_t = \{x\}$ ne soit pas une famille de points explosive de E.M. Stein. Toutefois, avant de définir la notion de famille de parties explosive de E.M. Stein, nous devons effectuer quelques modifications, du fait de l'adjonction du drift X_o. Posons $\varepsilon = \sqrt{t}$. Au lieu de considérer (0.2), nous allons travailler sur l'équation (0.2.ε) :

$$\begin{aligned} dy_{\varepsilon,s}(dh) &= \varepsilon^2 X_o(y_{\varepsilon,s}(dh))ds + \sum_{i=1}^m X_i(y_{\varepsilon,s}(dh))\,\mathring{h}^i_s ds \\ y_{\varepsilon,o}(dh) &= x \end{aligned} \tag{0.2.ε}$$

Nous poserons $\Phi_{\varepsilon,x}(dh) = y_{\varepsilon,1}(dh)$. Notre énergie minimale $d^2(x,y)$ mise pour aller de x à y deviendra $d^2_\varepsilon(x,y)$ égale à $\displaystyle\inf_{h\in\Phi^{-1}_{\varepsilon,x}(dh)} \|h\|^2$ (et dans ce cas, nous n'avons plus une distance, car $d_\varepsilon(x,x)$ n'est pas forcément égale à 0). La boule hypoelliptique $B(x,r)$ deviendra la boule $B_\varepsilon(x,r)$ image de la boule de centre 0 et de rayon r dans H^1 par $\Phi_{\varepsilon,x}$. Soit c un réel > 0.

Nous dirons qu'une famille de parties S_ε de $B_\varepsilon(x,c\varepsilon)$ est explosive au sens de E.M. Stein s'il existe deux constantes c_2, $c'_2 > 0$ telles que pour tout y de S_ε, tout $\varepsilon \leqq 1$, on ait :

$$\frac{c_2}{\mathrm{vol}\ B_\varepsilon(x,c\varepsilon)} \leqq p_{\varepsilon^2}(x,y) \leqq \frac{c'_2}{\mathrm{vol}\ B_\varepsilon(x,c\varepsilon)} \tag{0.4.ε}$$

Le fait que les points sont explosifs provient du fait que le volume de $B_\varepsilon(x,c\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Dans la partie I, nous montrerons que ce volume est compris entre $c_1\ \varepsilon^{-N(x)}$ et $c_2\ \varepsilon^{-N(x)}$ ($c_1 > 0$ et $c_2 > 0$) pour un certain entier théorique lié à la structure de l'algèbre de Lie engendrée par les X_i, $i=0,\dots,m$ en x (nos calculs sont fortement inspirés de ceux de [N-S-W] lorsqu'il n'y a pas de X_o). Lorsque $X_o(x)$ appartient en x à l'espace engendré par les crochets d'ordre $\leqq 2$ construits à partir des X_i ($i \neq 0$), cet entier est le même que celui qui intervient dans le développement asymptotique formel de $p_{\varepsilon^2}(x,x)$ ([L3], th. II.2)

$$p_{\varepsilon^2}(x,x) = \varepsilon^{-N(x)} \left(\sum_{j=0}^{N} c_j(x)\varepsilon^j + 0(\varepsilon^N)\right) \tag{0.5}$$

Mais il se trouve que dans (0.5), tous les $c_j(x)$ peuvent être nuls ([BA-L2]) si bien que $S_\varepsilon = \{x\}$ peut ne pas être une famille de points explosive de E.M. Stein. C'est ce qui nous a incité à donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $(S_\varepsilon)_{\varepsilon\in[0,1]}$ soit une famille explosive de E.M. Stein. Elle fait intervenir la relation existant entre les notions heuristiques de submersion au sens faible et au sens fort ([L1]) et montre l'importance jouée par la matrice déterministe de Malliavin introduite par J.M. Bismut dans [B].

On voit aussi réapparaître alors les deux raisons différentes pour lesquelles $p_t(x,x) \to 0$ dans [BA-L1] et dans [BA-L2] : dans [BA-L1], $x \notin B_\varepsilon(x,c\varepsilon)$ et dans [BA-L2], x ne vérifie pas notre condition bien que $x \in B_\varepsilon(x,c\varepsilon)$! Cet article est aussi une tentative de présenter de façon unifiée les estimations de [N-S-W] sur le volume des boules (partie I : niveau des fonctionnelles déterministes) dans le cas le plus simple donné initialement par Sanchez et celles de [BA2] et [L2] sur l'estimée de p_t (niveau des fonctionnelles browniennes). Toutefois nous n'arrivons pas à obtenir d'uniformité en x.

Nous remercions G. Ben Arous dont les commentaires nous ont été précieux, spécialement en ce qui concerne les exemples de la partie II, C. Stricker pour d'utiles suggestions concernant l'appendice, et D. Jerison.

I - Estimation du volume des boules :

Nous allons commencer par faire quelques rappels qui résultent de la formule de Campbell-Hausdorff ([BA1], [Str]).

Soit Y un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^d$ de dérivées de tout ordre bornées. Notons exp[Y] (x) la valeur au temps 1 de la solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} dy_t &= Y(y_t)dt \\ y_o &= x \end{aligned} \tag{1.1}$$

Soit (α) un multi-indice sur $\{0,\dots,m\}$, $(\alpha)=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$. Sa longueur $|(\alpha)|$ est p et sa longueur inhomogène $\|(\alpha)\|$ est égale à la somme de $|(\alpha)|$ et du nombre de zéros figurant dans (α). $X_{(\alpha)}(x)$ désigne le crochet de Lie $[X_{\alpha_1}, [X_{\alpha_2} \dots [X_{\alpha_{p-1}}, X_{\alpha_p}]]]\,(x)$.

Pour tout entier n, il existe des fonctionnelles universelles $F_{(\alpha)}(dh, dt)$ telles que :

$$y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dh) = \exp[\sum_{\|(\alpha)\|\leq n} \varepsilon^{\|(\alpha)\|} X_{(\alpha)} F_{(\alpha)}(dh, dt)](x)+o(\varepsilon^n) \tag{1.2}$$

De plus, on peut majorer le reste $o(\varepsilon^n)$ par $c\,\varepsilon^{n+1}$, c ne dépendant pas de h lorsque h décrit une boule bornée de H^1. Enfin, chaque $F_{(\alpha)}(dh, dt)$ est une combinaison linéaire universelle d'intégrales itérées

$$\iiint_{t_1<\dots<t_p<1} dh_{t_1}^{i_1} \dots dh_{t_p}^{i_p} \quad (dh_t^o = dt)$$

possèdant pour tout $j\in\{0,\dots,m\}$ autant de $i_k=j$ que (α) possède de $\alpha_k=j$.

Or il y a trop de $X_{(\alpha)}$ dans (1.2) car des crochets de Lie vérifient toujours les relations :

$$\begin{aligned} &[X,Y] + [Y,X] = 0 \\ &[[X,Y], Z] + [[Y,Z], X] + [[Z,X], Y] = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Si nous tenons compte de ces relations, on peut extraire un sous-ensemble <u>minimal</u> et <u>universel</u> $\mathcal{G}_n$ de multi-indices de longueur $\leq n$ tel que :

* $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \dots \subset \mathcal{G}_n \dots \subset \mathcal{G}_\infty$

** Pour tout (α'), il existe des <u>constantes</u> $c_{(\alpha)}$ telles que :

$$X_{(\alpha')} = \sum_{(\alpha)\in\mathcal{G}_{|(\alpha')|}\ |(\alpha)|=|(\alpha')|} c_{(\alpha)} X_{(\alpha)} \tag{1.4}$$

De plus, on ne garde dans la somme précédente que les (α) contenant pour tout j le même nombre de j que (α') en contient.

En particulier $\mathfrak{A}_1=\{0,1,\ldots,m\}$. (1.4) implique que l'on peut réécrire (1.2) de la façon suivante :

$$y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dh) = \exp\Big[\sum_{(\alpha)\in\mathfrak{A}_n\ \|(\alpha)\|\leq n} \varepsilon^{\|(\alpha)\|} X_{(\alpha)}\ \tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)\Big](x)+0(\varepsilon^n) \qquad (1.5)$$

pour des expressions <u>universelles</u> $\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ convenablement choisies. Chaque $\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ est une combinaison linéaire d'intégrales itérées

$\iiint_{t_1<t_2\ldots<t_{|(\alpha)|}<1} dh_{t_1}^{i_1}\ \ldots\ dh_{t_{|(\alpha)|}}^{i_{|(\alpha)|}}$; de plus, chacune de ces intégrales contient autant de termes en dh^j que (α) contient de j.

Le fait que notre $\mathfrak{A}_n$ soit minimal nous permet de caractériser ces expressions universelles de la façon suivante : on peut en effet trouver une réalisation du groupe simplement connexe $N_{m+1,n}$ à m+1 générateurs nilpotent libre à l'ordre n et des champs $\tilde{X}_i$, i=0...m, invariants à gauche engendrant son algèbre de Lie tels que :

$$\tilde{F}_{(.)}\ (dh,\ dt) = \tilde{y}_1(dh,\ dt) \qquad (1.6)$$

où :

$$d\tilde{y}_s(dh,\ dt) = \tilde{X}_o\ (\tilde{y}_s(dh,\ dt))ds+\sum_{i=1}^{m}\tilde{X}_i(\tilde{y}_s(dh,\ dt))\ \mathring{h}_s^i\ ds$$

$$\tilde{y}_o(dh,\ dt) = e \qquad (1.7)$$

Soit $\mathcal{C}_k(x)$ l'espace engendré par les $X_{(\alpha)}(x)$ <u>($\|(\alpha)\|\leq k$)</u>, X_o étant exclu. Soit $\pi_k(x)$ la projection orthogonale sur un supplémentaire orthogonal de $\mathcal{C}_{k-1}(x)$ dans $\mathcal{C}_k(x)$. Conformément à l'esprit des notations de [BA-L1] et de [BA-L2], notons r(x) le plus petit entier tel que $\mathcal{C}_k(x) = \mathbb{R}^d$ (il est fini puisque l'algèbre de Lie engendrée par les X_i, $i\neq 0$, est égale à $\mathbb{R}^d$).

<u>Définition I.1</u> : <u>Nous dirons que</u> h <u>est un élément régulier de l'espace de Cameron-Martin si l'application</u>

$$h' \to \sum_{(\alpha)\neq 0\ (\alpha)\in\mathfrak{A}_{r(x)}} \pi_{|(\alpha)|}(x)\ X_{(\alpha)}(x)\ \tilde{F}_{(\alpha)}(dh',dt) \qquad (1.8)$$

<u>est une submersion en</u> h.

Si l'on introduit sa matrice de Gram K_h (ou matrice déterministe de Malliavin, suivant [B]), cela revient à dire que det $K_h>0$ ([L1]).

On a la proposition suivante, fondamentale pour la suite :

<u>Proposition I.2</u> : <u>Soit</u> c>0. <u>Il existe un élément régulier d'énergie inférieure à</u> c.

<u>Preuve</u> : Elle est identique à celle du théorème I.1 de [L2]. La seule différence est ici la suivante : alors qu'il était possible de revenir au point de départ dans [L2] (principe de la petite boucle), cela devient tout à fait impossible dans (1.8), du

fait de la présence de $\tilde{X}_o$ dans (1.7). C'est cette remarque fondamentale qui nous montrera que le problème de l'estimation du volume des boules est différent de celui de l'estimation des densités. ∎

Avant d'arriver à l'objectif principal de cette partie, introduisons l'entier $N(x) = \sum_k k(\dim \mathcal{C}_k(x) - \dim \mathcal{C}_{k-1}(x))$. On a alors le :

<u>Théorème I.3</u> : <u>Soit</u> $c>0$. <u>Il existe deux constantes</u> $c_1>0$ <u>et</u> $c_2>0$ <u>dépendant de</u> c <u>et de</u> x <u>telles que pour</u> $0<\varepsilon<\varepsilon(x)<1$

$$c_2\ \varepsilon^{N(x)} \geqq \text{val } B_\varepsilon(x,c\varepsilon) \geqq c_1\ \varepsilon^{N(x)} > 0 \tag{1.9}$$

<u>Preuve</u> : Bien que le c ne soit pas du tout superflu dans l'énoncé, contrairement au cas où $X_o=0$, nous ne ferons la preuve que dans le cas $c=1$. Cette preuve est fortement inspirée de [BA2] et de [N-S-W]. $B_\varepsilon(x,\varepsilon)$ est égal à l'ensemble décrit par $y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dh)$ ((0.2.ε)) lorsque $\|h\|\leqq 1$.

Soit $B_{r(x)}$ une partie de $\mathcal{G}_{r(x)}$ telle que :

*) $0 \notin B_r(x)$

**) l'ensemble des $X_{(\beta)}(x)$ $((\beta)\in B_{r(x)})$ de longueur inhomogène $\leqq k$ constitue une base de $\mathcal{C}_k(x)$ pour tout $k\leqq r(x)$.

Introduisons l'application $\psi_{\lambda_{(.)}}(u(.))$

$$u(.)\to \exp\Big[\sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} u_{(\beta)}X_{(\beta)} + \sum_{(\alpha)\in \mathcal{G}_{r(x)}-B_{r(x)}} \lambda_{(\alpha)}X_{(\alpha)}\Big](x) \tag{1.10}$$

Comme il est remarqué dans [N-S-W], il existe deux constantes λ_∞ et $c_\infty>0$ ayant la propriété suivante : si les $|\lambda_{(\alpha)}|$ sont inférieures à λ_∞ (assez petit), $\psi_{\lambda_{(.)}}$ est un difféomorphisme en les $u_{(\alpha)}$ d'un voisinage $v_{\lambda_{(.)}}$ contenant un voisinage fixe de 0 sur un voisinage $w_{\lambda_{(.)}}$ de x contenant un voisinage fixe de x. De plus

$$\sup_{u_{(.)}\in V_{\lambda_{(.)}},\ |\lambda_{(.)}|\leqq\lambda_\infty} (|J\psi_{\lambda_{(.)}}(u_{(.)})|, |J^{-1}\psi_{\lambda_{(.)}}(u_{(.)})|)\leqq c_\infty$$ ($J\psi_{\lambda_{(.)}}(u_{(.)})$ désignant le Jacobien de l'application $u_{(.)}\to\psi_{\lambda_{(.)}}(u_{(.)})$ en $u_{(.)}$). Soit $\lambda^\varepsilon_{(.)}$ le $\tilde{p}$-upple tel que $\lambda^\varepsilon_{(\circ)}=\varepsilon^2$ et tel que $\lambda^\varepsilon_{(\alpha)}=0$ sinon. On a donc $\psi_{\lambda^\varepsilon_{(.)}}(u_{(.)})=\exp[\varepsilon^2 X_o + \sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} u_{(\beta)}X_{(\beta)}](x)$.

Si h est d'énergie inférieure à 1, il existe des réels $u_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ $((\beta)\in B_{r(x)})$ tel que pour $0\leqq\varepsilon<\varepsilon_o$ ($\varepsilon_o>0$ choisi indépendamment de h d'énergie inférieure à 1), on ait :

$$y_{\varepsilon,1}(\varepsilon dh) = \psi_{\lambda^{\varepsilon}_{(.)}}(u_{(.)}(\varepsilon,dh,dt))$$
$$= \exp[\varepsilon^2 X_o + \sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} u_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)\, X_{(\beta)}]\,(x) \tag{1.11}$$

Le problème est maintenant d'étudier le comportement des $u_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ quand $\varepsilon\to 0$. La formule (1.5) (appliquée pour $n=r(x)$) nous montre qu'il existe des $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ tels que :

* Il existe $c>0$ et $\varepsilon_o>0$ tel que pour tout h d'énergie inférieure à 1, on ait :

$$|\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)-u_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)| \leq c\,\varepsilon^{r(x)+1} \tag{1.12}$$

pour $\varepsilon<\varepsilon_o$.

** Pour $\varepsilon<\varepsilon_o$, $\|h\|<1$,

$$\exp[\varepsilon^2 X_o + \sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} \tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)\, X_{(\beta)}](x) =$$
$$\exp[\varepsilon^2 X_o + \sum_{(\alpha)\in \mathcal{C}_{r(x)}\ |(\alpha)|\neq 0\ \|\alpha\|\leq r(x)} \varepsilon^{\|\alpha\|}$$
$$\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)\, X_{(\alpha)}](x) \tag{1.13}$$

Dans (1.13), utilisons la formule de Campbell-Hausdorff, en suivant une idée de [N-S-W]. Soit Γ l'ensemble des crochets de Lie construits à partir des $X_{(\alpha_1)},\dots, X_{(\alpha_p)}$. X_Γ désigne le crochet associé. La longueur partielle de X_Γ est le nombre de (α_i) y appartenant. On la note $|\Gamma|_p$. La longueur inhomogène totale de X_Γ (notée aussi $\|\Gamma\|_{tot}$) est égale à $\sum_{i=1}^{m} \|(\alpha)_i\|$. La formule de Campbell-Hausdorff nous montre qu'il existe des polynômes universels $P_{(\Gamma)}$ indexés par l'ensemble des X_Γ de longueur partielle $|\Gamma|_p\leq r(x)$ ayant les deux propriétés suivantes :

* $P_{(\Gamma)}$ est un polynôme homogène en les $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ et $\varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ de degré $|\Gamma|_p$. Si $(\beta)\in B_{r(x)}$, le nombre total de $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ et de $\varepsilon^{\|(\beta)\|}\tilde{F}_{(\beta)}(dh,dt)$ figurant dans chaque monôme de $P_{(\Gamma)}$ est égal au nombre de (β) figurant dans (Γ). Si $(\alpha)\notin B_{r(x)}$, le nombre de $\varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ figurant dans chaque monôme de $P_{(\Gamma)}$ est égal au nombre de (Γ) figurant dans (Γ). De plus, chaque monôme de $P_{(\Gamma)}$ contient au moins un $\varepsilon^{\|\alpha\|}\,\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ et un $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$.

** Il existe un $\varepsilon_o>0$ indépendant de h d'énergie inférieure à 1 tel que pour tout h d'énergie inférieure à 1, tout $\varepsilon<\varepsilon_o$:

$$\exp\Big[\sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} (\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)+o(\varepsilon^{r(x)}))\, X_{(\beta)}$$

$$-\sum_{(\alpha)\neq 0 (\alpha)\in \mathcal{A}_{r(x)}} \varepsilon^{\|\alpha\|}\, \tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)\, X_{(\alpha)}+\sum_{2\leq|\Gamma|_p\leq r(x)} P_{(\Gamma)} X_{(\Gamma)}\Big](x)=x \tag{1.14}$$

De plus, on peut majorer le terme $o(\varepsilon^{r(x)})$ par $c\,\varepsilon^{r(x)+1}$, c ne dépendant pas de h d'énergie inférieure à 1.

Comme dans (1.14) nous avons une exponentielle, nous en déduisons que pour $\varepsilon<\varepsilon_0$ indépendant de h d'énergie inférieure à 1, on a :

$$\sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} (\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)+o(\varepsilon^{r(x)}))X_{(\beta)}(x)-\sum_{(\alpha)\in \mathcal{A}_{r(x)},|(\alpha)|\neq 0} \varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)X_{(\alpha)}(x)$$

$$+\sum_{2\leq|\Gamma|_p\leq r(x)} P_{(\Gamma)}\, X_{(\Gamma)}(x) = 0 \tag{1.15}$$

La formule (1.15) est l'ingrédient principal qui va nous permettre de montrer la propriété suivante, importante pour la suite :

* Pour tout entier $k<\|\beta\|\leq r(x)$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)}{\varepsilon^k} = 0 \tag{1.16}$$

uniformément en h d'énergie inférieure à 1. De plus, pour tout $k\leq r(x)$, il existe des polynômes $\tilde{P}_{(\alpha)}((\alpha)\in \mathcal{A}_{r(x)},\ \|\alpha\|=k)$ en les $\tilde{F}_{(\alpha')}(dh,dt)$ (avec $\|(\alpha')\| < k$) tels qu'uniformément en h d'énergie inférieure à 1, on ait :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\|(\beta)\|=k} \pi_k(x)X_{(\beta)}(x)\, \frac{1}{\varepsilon^k}\, \tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)=\sum_{\|(\alpha)\|=k} \pi_k(x)\, X_{(\alpha)}(x)(\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)+\tilde{P}_{(\alpha)}) \tag{1.17}$$

* se prouve par récurrence sur k.

Elle est clairement vraie pour k=1. Supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre $k<r(x)$. Montrons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre k+1. En effet, considérons un entier $k'>k$, et appliquons à (1.15) le projecteur $\pi_{k'}(x)$. Nous obtenons :

$$\sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} \pi_{k'}(x)(\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)+o(\varepsilon^{r(x)}))X_{(\beta)}(x)-\sum_{(\alpha)\in \mathcal{A}_{r(x)}(\alpha)\neq 0} \varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$$

$$\pi_{k'}(x)X_{(\alpha)}(x)+\sum_{2\leq|\Gamma|_p\leq r(x)} P_{(\Gamma)}\, \pi_{k'}(x)\, X_{(\Gamma)}(x)=A_1(k')+A_2(k')+A_3(k')=0 \tag{1.18}$$

Dans cette formule, seuls subsistent les $X_{(\beta)}(x)$ avec $\|\beta\|\geq k'$, les $X_{(\alpha)}(x)$, $\|\alpha\|\geq k'$ et les $X_{(\Gamma)}(x)$ avec $|\Gamma|_{tot}\geq k$

Or $P_{(\Gamma)}$ est un polynôme de valuation ≥2 en les $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ et les $\varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$, contenant au moins une variable de chaque type. De plus, chaque monôme de $P_{(\Gamma)}$ vérifie :

$$|\Gamma|_{tot} = \Sigma\,\|(\beta)\| + \Sigma\|(\alpha)\| \tag{1.19}$$

la somme étant prise sur les (β) et les (α) tels que $\tilde{u}_{(\beta)}(\alpha,dh,dt)$ et $\varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ appartiennent à ce monôme. Dans $A_3(k')$ on voit apparaître deux types d'expressions : ou bien on considère un monôme de $P_{(\Gamma)}$ qui ne comporte que des $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ avec $\|(\beta)\|\leq k$. Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence et (1.19) nous montrent que le terme correspondant est inférieur à $c\varepsilon^{k'}\leq c\varepsilon^{k+1}$ (c indépendant de h d'énergie inférieure à 1) ; ou bien on considère un monôme d'un $P_{(\Gamma)}$ comportant un $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ de longueur $\|\beta\|>k$. Dans ce cas, l'hypothèse de récurrence nous montre que ce $|\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)|\leq c\varepsilon^{k}$ (c indépendant de h, $\|h\|^2\leq 1$) ; comme le monôme considéré comporte au moins un $\varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$, avec $\|(\alpha)\|\neq 0$, on obtient encore une quantité inférieure à $c\varepsilon^{k+1}$. Ceci nous prouve que $|A_3(k')|\leq c\varepsilon^{k+1}$ (c indépendant de h d'énergie ≤1). Par suite, tous nos $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ ($\|\beta\|>k$) sont en module inférieur à $c\varepsilon^{k+1}$.

Supposons maintenant que k'=k+1. Considérons un $P_{(\Gamma)}$ dans $A_3(k+1)$ avec $|\Gamma|_{tot}>k+1$ et un monôme ne contenant que des $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ de longueur inhomogène $\|\beta\|\leq k$. Ce monôme d'après (1.19) et par hypothèse de récurrence est en ε^{k+2}, et par suite négligeable devant ε^{k+1} uniformément en h d'énergie ≤1. Maintenant, si ce monôme contient un $\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$ avec $\|(\beta)\|>k$, cet $|\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)|$ est inférieur en module inférieur à $c\varepsilon^{k+1}$ (c indépendant de h d'énergie ≤1). Or ce monôme contient aussi un $\varepsilon^{\|\alpha\|}\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ ($\|\alpha\|\neq 0$). Par suite, il est inférieur à $c\varepsilon^{k+2}$. Ceci nous prouve que dans $A_3(k+1)$, les seuls termes en ε^{k+1} proviennent des $P_{(\Gamma)}$ avec $|\Gamma|_{tot}=k+1$.

Il ne reste plus dans (1.18) qu'à prendre k'=k+1, et à le diviser par ε^{k+1} pour obtenir (1.17) pour k+1.

Pour k'>k+1, on montre de la même façon que les seuls termes d'ordre k+1 dans $A_3(k')$ ne peuvent provenir que de ceux où $|\Gamma|_{tot}=k+1$, ce qui est impossible car nécessairement $|\Gamma|_{tot}\geq k'$. De la même façon, dans $A_2(k')$, tous les termes sont d'ordre supérieur ou égal à $\varepsilon^{k'}$. Ceci nous prouve (1.16) pour k+1.

<u>Preuve de la majoration</u> : ⋆ nous prouve que pour $\|h\|\leq 1$, il existe une constante $c_{(\beta)}$ indépendante de h telle que dans (1.11), on ait, pour $\varepsilon<\varepsilon_o$:

$$|\tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,\ dh,dt)|\leq c_{(\beta)}\,\varepsilon^{\|(\beta)\|} \tag{1.20}$$

Par suite, notre boule $B_\varepsilon(x,\varepsilon)$ est contenue dans l'image par le difféomorphisme local $\psi_{\lambda^\varepsilon_{(.)}}$ de la boîte de $\mathbb{R}^d$ constituée des $u=(u_{(\beta)},(\beta)\in B_{r(x)})$ tels que :

$$|u_{(\beta)}| \leq c_{(\beta)}\, \varepsilon^{\|(\beta)\|} \tag{1.21}$$

Le volume de cette boîte est inférieur à $c_2 \varepsilon^{N(x)}$. La majoration dans (1.9) découle des propriétés données après (1.10) vérifiées par le difféomorphisme local $\psi_{\lambda^{\varepsilon}_{(.)}}$.

Preuve de la minoration : Appliquons la proposition I.2. On peut donc trouver un point h' régulier d'énergie inférieure à $\frac{1}{2}$. Comme dans (1.17), les $\tilde{P}_{(\alpha)}$ ne dépendent que des $\tilde{F}_{(\alpha')}(dh,dt)$ avec $\|(\alpha')\| < \|(\beta)\|$, il est possible de trouver des $a_{(\beta)} < b_{(\beta)}$ possédant la propriété suivante : soit Ψ_o l'application de l'espace de Cameron-Martin qui à h associe la famille des limites quand $\varepsilon \to 0$ de $\frac{1}{\varepsilon^{\|(\beta)\|}}\, \tilde{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh,dt)$. L'image par Ψ d'un petit voisinage de h' dans l'espace de Cameron-Martin contient la boîte Q constituée des $u = (u_{(\beta)}\ ;\ (\beta) \in B_{r(x)})$ tels que $a_{(\beta)} < u_{(\beta)} < b_{(\beta)}$. Par suite, il existe des réels $a'_{(\beta)} < b'_{(\beta)}$ tels que l'ensemble décrit par les $u_{(o)}(\varepsilon,dh,dt)$ pour $\|h\| \leq 1$, $\varepsilon < \varepsilon_o$ contiennent la petite boîte $Q_\varepsilon = \{u/u_{(\beta)} \in]a'_{(\beta)}\varepsilon^{\|\beta\|},\ b'_{(\beta)}\varepsilon^{\|\beta\|}[\}$ dont le volume est supérieur à $c'_1\, \varepsilon^{N(x)}$ $(c'_1 > 0)$. Donc $B_\varepsilon(x,\varepsilon)$ contient l'image par le difféomorphisme local $\psi_{\lambda^{\varepsilon}_{(.)}}$ de cette petite boîte. La minoration dans (1.9) de $\psi_{\lambda^{\varepsilon}_{(.)}}$ découle des propriétés enregistrées après (1.10).

Remarque : Le point crucial est qu'il n'est pas forcément possible de trouver un élément régulier de l'espace de Cameron-Martin tel que pour tout entier k, on ait :

$$\sum_{\|(\alpha)\|=k} \pi_k(x)\, X_{(\alpha)}(x)\, (\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt) + \tilde{P}_{(\alpha)}) = 0 \tag{1.22}$$

alors que ceci était possible lorsqu'il n'y avait pas de dt et de X_o !
En particulier, $a'_{(\beta)}$ n'est pas forcément du signe opposé à $b'_{(\beta)}$, comme c'était le cas dans [N-S-W] !!!

II - Systèmes explosifs de E.M. Stein :

Soit h un élément de l'espace de Cameron-Martin. Rappelons que K_h est la matrice de Gram (ou matrice de Malliavin déterministe, conformément à la terminologie de [B]) associée en h à l'application :

$$h \xrightarrow{\psi_1} \sum_{(\alpha)\neq 0 \ (\alpha)\in \mathcal{A}_{r(x)}} \pi_{\|(\alpha)\|}(x)\, X_{(\alpha)}(x)\, \tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt) \qquad (2.1)$$

Soir c>0 un réel fixé. L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème II.1 : La famille de parties $S_\varepsilon \subset B_\varepsilon(x,c\varepsilon)$ est une famille de points explosifs au sens de E.M. Stein si et seulement si il existe une constante c_1 telle que :

$$\inf_{y\in S_\varepsilon} \quad \sup_{\varepsilon h\in \Phi^{-1}_{\varepsilon,x}(y)\ \|h\|^2\leq c_1\ ;\ \varepsilon\leq\varepsilon_o} \det K_h(x) > 0 \qquad (2.2)$$

pour un $\varepsilon_o>0$ bien choisi.

Preuve : Nous supposerons pour simplifier que c=1. Commençons par quelques calculs préliminaires. Soit $(w^1,\dots,w^m)$ un mouvement brownien m dimensionnel. $p_{\varepsilon^2}(x,y)$ est la densité en y de la loi de la variable aléatoire $y_1(\varepsilon\, dw)$ associée à la solution de l'équation différentielle de Stratonovitch :

$$dy_{\varepsilon,t}(\varepsilon\, dw) = \varepsilon^2 X_o(y_{\varepsilon,t}(\varepsilon\, dw))dt+\varepsilon \sum_{i=1}^m X_i(y_{\varepsilon,t}(\varepsilon dw))\, dw^i_t \qquad (2.3)$$

Soit h un élément de l'espace de Cameron-Martin d'énergie ≤ 1. Introduisons la solution de l'équation différentielle de Stratonovitch :

$$dy_{\varepsilon,t}(\varepsilon dw+\varepsilon dh) = \varepsilon^2 X_o(y_{\varepsilon,t}(\varepsilon dw+\varepsilon dh))dt + \varepsilon \sum_{i=1}^m X_i(y_{\varepsilon,t}(\varepsilon dw+\varepsilon dh))(dw^i_t+\dot{h}^i_t dt)$$

$$y_{\varepsilon,o}(\varepsilon\, dw+\varepsilon dh) = x \qquad (2.4)$$

Cette notation, légèrement abusive, est destinée à rendre plus clair les calculs algébriques que nous mènerons par la suite et ne doit pas laisser penser que dw^i_t représente un véritable élément différentiel.

De la même façon, dans chaque intégrale itérée $\iiint_{t_1<t_2<t_p<1} dh^{i_1}_{t_1}\dots dh^{i_p}_{t_p}$ qui compose un $\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ dans (1.5), remplaçons formellement $dh^{i_j}_{t_j}$ par $dw^{i_j}_{t_j}+dh^{i_j}_{t_j}$ au sens de Stratonovitch ($dw^o_t = dt$) . On obtient une expression que nous noterons de façon

<u>suggestive</u> (<u>mais aussi abusive</u>) $\tilde{F}_{(\alpha)}(dh+dw,dt)$. Dans ce cas on a, lorsque ε est assez petit :

$$y_{\varepsilon,1}(\varepsilon dw+\varepsilon dh) = \exp[\varepsilon^2 X_o + \sum_{(\beta)\in B_{r(x)}} u_{(\beta)}(\varepsilon,dw+dh)X_{(\beta)}](x) \tag{2.5}$$

La différence essentielle entre cette formule et la formule (1.11) correspondante est la suivante : on peut s'arranger pour que (1.11) soit valide pour $\varepsilon<\varepsilon_o$ choisi indépendamment de h d'énergie ≤ 1 alors que cette condition n'est plus vraie pour (2.5). Pour ce faire, on va procéder de la façon suivante, en se souvenant que $\psi_{\lambda^\varepsilon_{(.)}}$ est un difféomorphisme local d'un voisinage de 0 sur un voisinage de x, dont le comportement en ε a été contrôlé dans les remarques qui suivent (1.10). Par suite, il existe une constante $c>0$ ne dépendant pas de h de norme 1 et de $\varepsilon<\varepsilon_o$ telle que (2.5) soit valide dès que $|y_{\varepsilon,1}(\varepsilon dw+\varepsilon dh)-x|<c$. Introduisons une fonction de classe $C^\infty g$ de $\mathbb{R}^d$ dans $[0,1]$ égale à 1 si $|z-x|<\frac{c}{2}$ et nulle si $|z-x|\geq c$, de façon à rendre régulière la troncature précédente : si $g(y_{\varepsilon,1}(\varepsilon dw+\varepsilon dh))\neq 0$, (2.5) est valide.

L'intérêt d'obtenir une troncature régulière apparaît dans ce qui suit. Soit F une fonctionnelle brownienne. Soit p,ℓ deux entiers. On dit que F appartient à l'espace de Sobolev $\mathcal{D}_{\ell,p}$ si F est dans le domaine de $(I+N)^{\frac{\ell}{2}}$ et si $(I+N)^{\frac{\ell}{2}}$ F est dans L^p (N désigne l'opérateur d'Ornstein-Ühlenbeck). On pose de façon usuelle ([Kr],[W])

$$\|F\|_{\ell,p} = \|(I+N)^{\frac{\ell}{2}} F\|_{L^p}$$

Dans ce cas il existe des fonctionnelles browniennes $\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dw,dh)$ possèdant les propriétés suivantes :

* Pour tous entiers p,ℓ

$$\sup_{\|h\|\leq 1,\varepsilon\leq 1} \|\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dw,dh)\|_{\ell,p} < \infty \tag{2.6}$$

** Si $g(y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dw+\varepsilon\, dh)) \neq 0$, on a

$$\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dw,dh) = u_{(\beta)}(\varepsilon,dw,dh) \tag{2.7}$$

En particulier (2.5) est vérifiée pour $\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dw,dh)$.

*** Pour tout triplet (k,ℓ,p) d'entiers, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{\|h\|=1} \|\{\sum_{\|(\beta)\|=k,(\beta)\in B_{r(x)}} \pi_k(x)X_{(\beta)}(x)\,\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dw,dh)/_{\varepsilon^k}\} \\ -\{\sum_{\|\alpha\|=k,(\alpha)\in \mathcal{A}_{r(x)}} \pi_k(x)\,X_{(\alpha)}(x)\,(\tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh,dt)+\tilde{P}_{(\alpha)})\}\|_{\ell,p} = 0 \tag{2.8}$$

Dans l'appendice nous montrerons que si h_n est une suite <u>d'énergie bornée</u> tendant faiblement vers h (pour toute fonction continue g de [0,1] dans $\mathbb{R}$, tout j, $\int_0^1 g_t \overset{\circ}{h}{}^j_{n,t}\, dt \to \int_0^1 g_t \overset{\circ}{h}{}^j_t\, dt$), alors $h_n \to h$ uniformément sur [0,1] et $\tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh_n,dt) \to \tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh,dt)$ dans tous les $\mathcal{D}_{\ell,p}$. Ceci et (2.8) nous prouvent que pour tout k, on a, lorsque $n\to\infty$

$$\sum_{\|(\beta)\|=k,(\beta)\in B_{r(x)}} \pi_k(x)\, X_{(\beta)}(x)\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon_n, dw, dh_n)/\varepsilon_n^k \to \tag{2.9}$$

$$\sum_{\|(\alpha)\|=k(\alpha)\in \mathcal{A}_{r(x)}} \pi_k(x)\, X_{(\alpha)}(x)\; (\tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh,dt) + \tilde{P}_{(\alpha)})$$

dans tous les espaces de Sobolev $\mathcal{D}_{\ell,p}$.

Ces préliminaires vont nous permettre d'effectuer un certain nombre de réductions du théorème.

<u>Première réduction</u> :

Comme la boule unité de l'espace de Cameron-Martin est faiblement compacte, le fait que la famille S_ε de parties est une famille explosive de E.M. Stein équivaut au fait suivant :

Pour toute suite $\varepsilon_n \to 0$, toute suite h_n d'énergie ≤ 1 tendant faiblement vers h, telle que $y_{\varepsilon_n,1}(\varepsilon dh_n) = y_n \in S_{\varepsilon_n}$, il existe deux constantes $c_1>0$ et $c_2>0$ telles que :

$$c_1\, \varepsilon_n^{-N(x)} \leq p_{\varepsilon_n^2}(x,y_n) \leq c_2\, \varepsilon_n^{-N(x)} \tag{2.10}$$

<u>Deuxième réduction</u> :

Notons $J_h(\delta w)$ la quantité $\exp[-\int_0^1 \sum_{i=1}^m h^i_s \delta w^i_s]$ (δw désignant l'intégrale d'Itô).

Soit $\tilde{p}_{\varepsilon,dh}(z)$ la densité de la mesure sur $\mathbb{R}^d$

$$f \to E[f(y_{\varepsilon,1}(\varepsilon dw+\varepsilon dh) - y_{\varepsilon,1}(\varepsilon dh))\; J_h(\delta w)] \tag{2.11}$$

Une transformation de Girsanov nous montre qu'il faut et il suffit de prouver (2.10) en ayant remplacer $p_{\varepsilon_n^2}(x,y_n)$ par $\tilde{p}_{\varepsilon_n^2,dh_n}(0)$ dans (2.10).

<u>Troisième réduction</u> :

Introduisons la mesure $\mu_{\varepsilon,dh}$ sur $\mathbb{R}^d$

$$f \to E[g(y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dw+\varepsilon\, dh))\; f(y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dw+\varepsilon\, dh) - y_{\varepsilon,1}(\varepsilon dh))J_h(\delta w)] \tag{2.12}$$

Elle possède une densité $q_{\varepsilon,dh}(z)$. La théorie des grandes déviations ([Az]) et [BA2] nous montre que pour $\varepsilon<1$, pour tout entier N, on a :

$$\sup_{\|h\|\leq 1} |q_{\varepsilon,dh}(0) - \tilde{p}_{\varepsilon,dh}(0)| \leq c\,\varepsilon^N \qquad (2.13)$$

Il faut et il suffit donc de remplacer dans (2.10) $p_{\varepsilon_n^2}(x,y_n)$ par $q_{\varepsilon_n,dh_n}(0)$.

Quatrième réduction :
Introduisons la mesure $\tilde{\mu}_{\varepsilon,dh}$ qui a toute fonction f associe la quantité :

$$E[g(y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\,dw+\varepsilon\,dh))\; f(\{\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dw+dh) - u_{(\beta)}(\varepsilon,dh)\}\,|\,(\beta)\in B_{r(x)})\, J_h(\delta w)] \qquad (2.14)$$

Les propriétés de la famille de difféomorphismes données après (1.10) nous montrent qu'il faut et qu'il suffit dans (2.10) de remplacer $p_{\varepsilon_n^2}(x,y_n)$ par $\tilde{q}_{\varepsilon_n,dh_n}(0)$.

Cinquième réduction : (application de la méthode de la division [L1]). Soit $\bar{\mu}_{\varepsilon,dh}$ la mesure qui a toute fonction f associe la quantité :

$$E[g(y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\,dw+\varepsilon\,dh))\, f(\{\varepsilon^{-\|(\beta)\|}(\bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dw+dh) - \bar{u}_{(\beta)}(\varepsilon,dh)\}\,|\,(\beta)\in B_{r(x)})\, J_h(\delta w)] \qquad (2.15)$$

et notons $\bar{q}_{\varepsilon,dh}$ sa densité. Il faut et il suffit de remplacer (2.10) par :

$$0 < c_1' < \bar{q}_{\varepsilon_n,dh_n}(0) \leq c_2' \qquad (2.16)$$

Soit $\bar{\mu}_{o,dh}$ la mesure sur $\mathbb{R}^d$ définie

$$f \to E[f(\sum_{k=1}^{r(x)} (\sum_{\|(\alpha)\|=k(\alpha)\in \mathcal{a}_{r(x)}} \pi_k(x)\, X_{(\alpha)}(x)$$
$$(\{\tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh,dt) - \tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)\} + \{\tilde{P}_{(\alpha)}(dw+dh) - \tilde{P}_{(\alpha)}(dh)\}))] \qquad (2.17)$$

le terme en $J_H(\delta w)$ pouvant cette fois être supprimé.

Comme $\tilde{P}_{(\alpha)}(dw+dh)$ ne dépend que des $\tilde{F}_{(\alpha')}(dw+dh,dt)$ avec $\|(\alpha')\|<\|(\alpha)\|$ et comme la matrice de Malliavin associée aux $\tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh)$ $(\alpha)=0\in \mathcal{a}_{r(x)}$ est inversible et que son inverse est dans tous les L^p, on en déduit que $\bar{\mu}_{o,dh}$ possède une densité C^∞ $\bar{q}_{o,dh}(z)$ sur $\mathbb{R}^d$. De plus, le calcul des variations stochastiques dépendant d'un paramètre ([W]) et (2.9) nous montrent qu'il faut et il suffit que $\bar{q}_{o,dh}(0)>0$ pour toute limite faible des h_n.

Preuve de la condition nécessaire :
Soit ψ_1' l'application :

$$h \xrightarrow{\psi_1'} \sum_{\substack{(\alpha)\neq 0\\ (\alpha)\in \mathcal{a}_{r(x)}}} \pi_{\|(\alpha)\|}(x)\, X_{(\alpha)}(x)(\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)+\tilde{P}_{(\alpha)}) \qquad (2.18)$$

Si l'on considère une famille S_ε explosive au sens de E.M. Stein, on en déduit que pour toute limite faible h de h_ε telle que $(\varepsilon h_\varepsilon) \in \Phi_{\varepsilon,x}^{-1}(S_\varepsilon)$, $\|h_\varepsilon\|^2 < 1$, on a $\bar{q}_{o,dh}(0) > 0$.

Par application du théorème II.1 de [BA-L2], on en déduit que pour toute limite faible h, il existe un élément h' de l'espace de Cameron-Martin tel que :

* $\psi_1'(h') = \psi_1'(h)$

** ψ_1' est une submersion en h', ce qui signifie que le déterminant det $K_{h'}$ de sa matrice de Gram (ou matrice de Malliavin déterministe suivant la terminologie de [B]) est >0.

Comme ceci est vrai pour toute limite faible, que les applications $h \to \psi_1'(h)$ et $h \to \det K_h'$ sont continues pour la topologie faible sur h ([B1], th. I.1) et que la boule unité de l'espace de Cameron-Martin est faiblement compacte, on en déduit que dans * on peut majorer l'énergie de h' par une constante indépendante de h et minorer det $K_{h'}$ par une constante >0 indépendante de h.

Soit h une limite faible de h_n, $\varepsilon_n \to 0$ et soit h' choisi comme dans * et **. Comme h' est d'énergie majorée par une constante indépendante de h et comme $\det K_{k'}' > c > 0$ (c indépendant de la suite h_n considérée), on en déduit qu'il existe un h_n' de l'espace de Cameron-Martin tel que $y_{\varepsilon_n,1}(\varepsilon_n dh_n') = y_{\varepsilon_n,1}(\varepsilon_n dh_n)$ pour $\varepsilon_n < \varepsilon_o$ ($\varepsilon_o > 0$ choisie indépendamment de la suite h_n) et d'énergie bornée par c_1 (c_1 indépendant de la suite h_n). De plus, h_n' converge fortement dans l'espace de Cameron-Martin vers h', ces propriétés résultant de (1.17) et du théorème des fonctions implicites appliquées à ψ_1' en h'. Ceci nous montre qu'il existe un $\varepsilon_o > 0$ et un $c_1 > 0$ tel que :

$$\inf_{y \in S_\varepsilon} \quad \sup_{(\varepsilon h) \in \Phi_{\varepsilon,x}^{-1}(y)\ ;\ \|h\|^2 < c_1\ ;\ \varepsilon < \varepsilon_o} \det K_h' > 0 \tag{2.19}$$

Toutefois, on voit apparaître une difficulté : au lieu d'obtenir K_h on obtient K_h'. Pour la contourner, on raisonne de la façon suivante : soit la collection des $\tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh,dt)\,(\alpha) \neq 0 \in \mathcal{Q}_{r(x)}$. On obtient une famille de variables aléatoires notée $\tilde{F}_{(dh)}(dw)$ sur $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$, dont la loi possède une densité $\tilde{q}_{(dh)}(\tilde{z})$. De plus, soit c_1 une constante >0 et N>0, il existe un réel c_N tel que pour tout h d'énergie $\|h\| < c_1$ et telle que pour $|\tilde{z}_N| > c_N$, on ait $\tilde{q}_{(dh)}(\tilde{z}) \leq |\tilde{z}|^{-N}$. De plus

$$\sup_{\|h\| \leq c_1 \ \tilde{z} \in \mathbb{R}^d} \tilde{q}_{(dh)}(\tilde{z}) < \infty \tag{2.20}$$

La mesure image $\bar{\mu}_{o,dh}$ est la mesure image de la loi de l'ensemble des $\tilde{F}_{(\alpha)}(dw+dh,dt) - \tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ par la <u>submersion</u> T' de $\mathbb{R}^{\tilde{d}}$ dans $\mathbb{R}^d$: $u_{(\alpha)} \to \sum_{(\alpha) \neq 0} \pi_{\|(\alpha)\|}(x) X_{(\alpha)}(x)$

$(u_{(\alpha)}+\tilde{P}_{(\alpha)})$ (T' est une submersion car nos polynômes $\tilde{P}_{(\alpha)}$ ne dépendent que des $u_{(\alpha')}$ avec $\|(\alpha')\|<\|(\alpha)\|$).

Ceci nous montre qu'il existe une constante $c>0$ telle que pour toute limite faible h, on ait $\tilde{q}_{(d\hat{h})}(\tilde{z})>0$ pour un certain $\tilde{z}$ de norme inférieure à c appartenant à $T'^{-1}\psi_1'(h)$ (au lieu d'obtenir simplement $q_{o,dh}(0)>0$), cette condition impliquant que $q_{o,dh}(0)>0$.

Soit $\tilde{\psi}$ l'application qui à un élément h de l'espace de Cameron-Martin associe l'ensemble des $\tilde{F}_{(\alpha)}(dh,dt)$ $((\alpha)\in \mathcal{C}_{r(x)}$, $(\alpha)\in 0)$. Notons sa matrice de Gram $\tilde{K}_h$. Ceci nous montre que l'on peut remplacer (2.19) par

$$\sup_{(\varepsilon h)\in\Phi^{-1}_{\varepsilon,x}(y),\ \|h\|^2<c_1',\ T'(\tilde{\psi}(h))=\psi_1'(h)} \det \tilde{K}_h > 0 \tag{2.19'}$$

pour une constante c_1' bien choisie. Comme l'application $u_{(\alpha)} \xrightarrow{T} \Sigma\, \pi_{\|(\alpha)\|}(x) X_{(\alpha)}(x)\, u_{(\alpha)}$ est une submersion, (2.19)' implique que :

$$\inf_{y\in S_\varepsilon} \ \sup_{(\varepsilon h)\in\Phi^{-1}_{\varepsilon,x}(y)\ \|h^2\|<c_1'} \det K_h > 0 \tag{2.19''}$$

Ceci nous prouve la condition nécessaire.

<u>Preuve de la condition suffisante</u> :
Nous supposons cette fois que (2.2) est vérifiée ou, ce qui revient au même, que (2.19)" l'est. Par le même raisonnement que précédemment, on en déduit que (2.19)' est encore valide, $T'(\tilde{\psi}(h))$ étant remplacée par $T(\tilde{\psi}(h))$ et $\psi_1'(h)$ par $\psi_1(h)$. Par suite, (2.19) est encore valide. Une généralisation immédiate du théorème II.3 de [BA-L2] montre que

$$\inf_{(\varepsilon h)\in\Phi^{-1}_{\varepsilon,x}(S_\varepsilon),\ \|h\|^2<c_1,\ \varepsilon<\varepsilon_o} \bar{q}_{o,dh}(0) > 0 \tag{2.21}$$

<u>Remarque</u> : On pourrait éviter de passer par $\tilde{K}_h$ si l'on pouvait montrer que $\tilde{P}_{(\alpha)}$ est égale à 0, ce que l'on pourrait conjecturer.

<u>Remarque</u> : Nous avons choisi d'utiliser la méthode de [BA2] plutôt que celle de [L3], afin de mieux faire apparaître les différences et les similitudes qui apparaissent sur l'estimation du volume des boules et celles sur la densité.

Nous terminons par l'étude de quelques exemples, en remerciant G. Ben Arous pour ses conseils. Nous allons commencer par un exemple lié au fait que x n'appartient pas à $B_\varepsilon(x,c\varepsilon)$, en reprenant celui de [BA-L1]. Nous sommes dans $\mathbb{R}^2$. Le point générique est noté $\binom{x_1}{x_2}$. $L = \frac{1}{2}\,(\partial^2_{x_1}+x_1^{2n}\partial^2_{x_2})+\partial x_2$. Cela signifie que :

$$X_1 = \partial_{x_1} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$X_2 = x_1^n \partial_{x_2} = \begin{pmatrix}0\\x_1^n\end{pmatrix} \qquad (3.1)$$
$$X_o = \partial_{x_2} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Nous considérons la diffusion associée issue de $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Nous avons :

$$y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dw) = \begin{pmatrix}\varepsilon\, w_1^1 \\ \varepsilon^{n+1} \int_o^1 (w_t^1)^n\, dw_t^2 + \varepsilon^2 t\end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Conditionnellement à $w^1_{\cdot}$, la deuxième composante de $y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dw)$ est une gaussienne de moyenne $m(\varepsilon)$ et de variance $\sigma^2(\varepsilon)$ donnée par :

$$m(\varepsilon) = \varepsilon^2$$
$$\sigma^2(\varepsilon) = \varepsilon^{2n+2} \int_o^1 (w_t^1)^{2n}\, dt \qquad (3.3)$$

On a donc :

$$p_{\varepsilon^2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2\pi\,\varepsilon^{n+2}}\, E\left[\left(\int_o^1 (w_t^1)^{2n}\, dt\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y_2-\varepsilon^2)^2}{\varepsilon^{2n+2}\int_o^1 (w_t^1)^{2n}\, dt}\right] \middle|\, w_1^1=0\right] \qquad (3.4)$$

Notre entier $N\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ est ici égal à n+2. Du lemme I.4 de [BA-L1], on déduit que si $y_1=0$, si $y_2\in[\varepsilon^2+c\,\varepsilon^{n+1},\ \varepsilon^2+c'\,\varepsilon^{n+1}]$ pour deux constantes c et c'>0, il existe deux constantes $c_1>0$ et $c_2>0$ indépendantes de $\varepsilon<1$ et de y_2 telles que :

$$c_2\,\varepsilon^{-(n+2)} > p_{\varepsilon^2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}\right) > c_1\,\varepsilon^{-(n+2)} \qquad (3.5)$$

Par suite, la famille de points S_ε constituée des $\begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}$ avec $y_2\in[\varepsilon^2+c\varepsilon^{n+1}, \varepsilon^2+c'\varepsilon^{n+1}]$ est une famille explosive de E.M. Stein (nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $S_\varepsilon \subset B_\varepsilon(x,c_\varepsilon)$ pour une constante bien choisie).

Nous allons maintenant étudier un exemple faisant intervenir plus explicitement la condition de J.M. Bismut ([B], [BA-L2]). Au lieu de prendre $X_o = \partial_{x_2}$, nous prenons $X_o = x_1^p\,\partial_{x_2}$ avec p+1<n et p pair. $y_{\varepsilon,1}(\varepsilon\, dw)$ est cette fois égale à

$$\begin{pmatrix}\varepsilon w_1^1 \\ \varepsilon^{n+1}\int_o^1 (w_t^1)^n\, dw_t^2 + \varepsilon^{p+2}\int_o^1 (w_t^1)^p\, dt\end{pmatrix} \qquad (3.6)$$

Soit $\underline{\underline{c>0}}$, $c_1>c>0$. Et soit S_ε la famille de points $\begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}$ avec $y_2\in[c\varepsilon^{p+2}, c_1\varepsilon^{p+2}]$. Pour vérifier que S_ε est une famille de points explosive de E.M. Stein, il suffit de montrer que, si $c_1'>c'>0$ et si $\psi(h_o^1) = \begin{pmatrix}h_1^1\\ \int_o^1(h_t^1)^p dt\end{pmatrix}$, alors ψ est une submersion si $h^1\in\Phi^{-1}\begin{pmatrix}0\\ [c',c_1']\end{pmatrix}$, et d'appliquer ensuite la méthode de la division ([L1]) (la vérification par une méthode directe semble difficile).

Par contre, si $c<c_1<0$, S_ε n'est pas une famille explosive de E.M. Stein.
On peut le voir par les calculs directs de [BA-L2], première partie. On a en effet, si $\begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}\in S_\varepsilon$:

$$p_{\varepsilon^2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\y_2\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2\pi\varepsilon^{n+2}} E[(\int_o^1(w_t^1)^{2n}dt)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{(y_2-\varepsilon^{p+2}\int_o^1(w_t^1)^p dt)^2}{\varepsilon^{2n+2}\int_o^1(w_t^1)^{2n}\,dt}]\,|w_t^1=0] \quad (3.7)$$

Or $y_2<0$ et $-\varepsilon^{p+2}\int_o^1(w_t^1)^p dt<0$. Donc le terme de droite dans (3.7) est inférieur à

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon^{n+2}} E[(\int_o^1(w_t^1)^{2n}dt)^{-\frac{1}{2}} \exp[-\frac{(\varepsilon^{p+2}\int_o^1(w_t^1)^p dt)^2}{\varepsilon^{2n+2}\int_o^1(w_t^1)^{2n}dt}]\,|w_1^1=0] = p_{\varepsilon^2}\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \quad (3.8)$$

qui décroît exponentiellement d'après la première partie de [BA-L2].

Appendice

Soit $G_{n,t}(dh,dw)$ un chaos de Stratonovitch $\int\int\int\int_{t_1<t_2\ldots<t_n<t} \dot h_{t_1}^{i_1} dt_1\, dw_{t_2}^{i_2} \ldots\ldots$ contenant des termes en $dh=\dot h\,dt$ et des termes en dw. On a le théorème suivant, λ désignant un paramètre $\in[0,1]$ et N l'opérateur de nombre (ou d'Ornstein-Uhlenbeck).

Théorème A.1 :
Supposons que $h_\lambda \to h$ *faiblement et soit d'énergie bornée. Alors* $G_{n,1}(dh_\lambda,dw) \to G_{n,1}(dh,dw)$ *dans tous les espaces de Sobolev* $\| \ \|_{\ell,p}$.

Preuve : En fait, tout chaos de Stratonovitch est une somme de chaos d'Itô de longueur $\leq n$, des termes dt supplémentaires intervenant. Il suffit donc de prouver que pour tout chaos d'Itô :

$$\tilde G_{n,t}(dh,\delta w) = \int\int\int_{t_1<t_2\ldots<t}\int \dot h_{t_1}^{i_1}\, dt\, \delta w_{t_2}^{i_2} \ldots \delta w_{t_k}^{i_k} \tag{A.1}$$

on a encore $\tilde G_{n,t}(dh_\lambda,\delta w) \to \tilde G_{n,t}(dh,\delta w)$ dans tous les espaces de Sobolev. Montrons à cette fin, par récurrence sur n, que pour tout entier k, tout entier ℓ :

$$E[\sup_{t\leq 1} |N^k\{\tilde G_{n,t}(dh_\lambda,\delta w)-\tilde G_{n,t}(dh,\delta w)\}|^\ell] \to 0 \tag{A.2}$$

La propriété est immédiate pour $n=1$. Supposons-la vraie jusqu'à l'ordre $n-1$. Montrons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre n.

Premier cas : Le chaos $\tilde G_{n,t}(dh_\lambda,\delta w)$ se termine par un terme en $(\dot h_t^i)_\lambda dt$. Dans ce cas,

$$\tilde G_{n,t}(dh_\lambda,\delta w) = \int_o^t \tilde G_{n-1,s}(dh_\lambda,\delta w)(\dot h_s^i)_\lambda\, ds \tag{A.3}$$

Et

$$N^k\tilde G_{n,t}(dh_\lambda,\delta w) = \int_o^t N^k(\tilde G_{n-1,s}(dh_\lambda,\delta w))(\dot h_s^i)_\lambda ds$$

$$=\int_o^t N^k(\tilde G_{n-1,s}(dh,\delta w))(\dot h_s^i)_\lambda ds+\int_o^t N^k\{\tilde G_{n-1,s}(dh_\lambda,\delta w)-\tilde G_{n-1,s}(dh,\delta w)\}(\dot h_s^i)_\lambda ds \tag{A.4}$$

$$= A_{1,t}(\lambda) + A_{2,t}(\lambda)$$

Or $s\to N^k\, \tilde G_{n-1,s}(dh,\delta w)$ est continue.
Donc par hypothèse de récurrence $t\to\int_o^t N^k\tilde G_{n-1,s}(dh,\delta w)(\dot h_s^i)_\lambda ds$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $t\to\int_o^t N^k\tilde G_{n-1,s}(dh,\delta w)\dot h_s^i\, ds$.

Or :

$$\sup_{t\leq 1} \left|\int_o^t N^k \tilde{G}_{n-1,s}(dh,\delta w)((\dot{h}_s^i)_\lambda - \dot{h}_s^i)ds\right| \leq c\left(\int_o^1 (N^k \tilde{G}_{n-1,s}(dh,\delta w)^2\, ds\right)^{\frac{1}{2}} \tag{A.5}$$

qui est dans tous les $L^p(dw)$. Le théorème de convergence dominée nous montre que :

$$\lim_{\lambda\to 0} E[|\sup_{t\leq 1} (A_{1,t}(\lambda) - A_{1,t}(0))|^p] = 0 \tag{A.6}$$

De plus, par hypothèse de récurrence,

$$E[|\sup_{t\leq 1} A_{2,t}(\lambda)|^p] \to 0 \tag{A.7}$$

<u>Deuxième cas</u> : Le chaos se termine par une intégrale stochastique δw_s^i. Dans ce cas :

$$N^k \tilde{G}_{n,t}(dh_\lambda) = N^k \int_o^t \tilde{G}_{n-1,s}(dh_\lambda)\,\delta w_s^i \tag{A.8}$$

D'après la formule 36 de [M1], il existe des constantes c_j telles que :

$$N^k \tilde{G}_{n,t}(dh_\lambda,\delta w) = \sum_{j=0}^{k} \int_o^t c_j N^j \tilde{G}_{n-1,s}(dh_\lambda,\delta w)\delta w_s^i \tag{A.9}$$

Comme les processus $s\to N^j \tilde{G}_{n-1,s}$ sont adaptés, on conclut sans difficulté par hypothèse de récurrence sur n-1 en appliquant la formule de Burkholder.

Bibliographie

[Az] AZENCOTT R. :
Grandes déviations et applications. Cours de probabilités de St-Flour. Lecture Notes in Math. n°774. Berlin. Springer.

[BA1] BEN-AROUS G :
Flots et séries de Taylor stochastiques. A paraître dans Theory of Prob. and related fields.

[BA2] BEN-AROUS G :
Développement asymptotique du noyau de la chaleur sur la diagonale. A paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[BA3] BEN-AROUS G :
Noyau de la chaleur hypoelliptique et géométrie sous-riemannienne. In Stochastic Analysis. p. 1-16. Edito M. Metivier, S. Watanabe. Lecture Notes 1322. Springer (1987).

[BA-L1] BEN-AROUS G., LEANDRE R. :
Influence du drift sur le comportement au point de départ du noyau de la chaleur hypoelliptique (I), Preprint.

[BA-L2] BEN-AROUS G., LEANDRE R. :
Influence du drift sur le comportement au point de départ d'un noyau de la chaleur hypoelliptique (II), Preprint.

[B] BISMUT J.-M. :
Large deviations and Malliavin calculus. Progress in Math. n°45. Birkhaüser Basel (1984).

[J-S] JERISON D., SANCHEZ A. :
Subelliptic second order differential operator in complex analysis III, p. 46-78. E. Berenstein Ed. Lect. Notes 1277. Springer (1987).

[Kr] KREE P :
La théorie des distributions en dimension quelconque et l'intégration stochastiques. Actes du colloque d'Analyse stochastique de Silini (1986). A paraître aux Lect. Notes in Math.

[L1] LEANDRE R. :
Applications quantitatives et géométriques du calcul de Malliavin.
Version française : In Stochastic Analysis. p. 109-133. Edi. M. Metivier, S. Watanabe. Lecture Notes 1322. Springer (1987).
Version anglaise : à paraître aux Proceedings du colloque Geometry of Random notion.

[L2] LEANDRE R. :
Minoration en temps petit de la densité d'une diffusion dégénérée. J.F.A. 74, n°2 (1987), p. 399-415.

[L3] LEANDRE R. :
Développement asymptotique de la densité d'une diffusion dégénérée. A paraître au J.F.A.

[M] MEYER P.-A. :
Le calcul de Malliavin et un peu de pédagogie. RCP n°25, vol. 34. Université de Strasbourg (1984).

[M1] MEYER P.-A. :
Note sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Séminaire de Proba. n°XVI, 1980/81. Lecture Notes in Math. n°920. Springer.

[N-S-W] NAGEL A., STEIN E., WAINGER S. :
Balls and metrics defined by vector fields I. Basic properties. Acta Math. 155 (1985), p. 103-147.

[Str] STRICHARTZ R. :
The Campbell-Baker-Hausdorff-Dynkin formula and solutions of differential equations. J.F.A. n°72 (1987), p. 320-346.

[W] WATANABE S. :
Analysis of Wiener functional and its applications to heat kernels. Ann. of Proba. 15, n°1 (1987), p. 1-39.