LAURENT SCHWARTZ

Quelques propriétés de la tribu accessible : les discontinuités d'un processus croissant intégrable et les discontinuités de sa projection prévisible duale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 355-361

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__355_0>

Quelques propriétés de la tribu accessible ;
les discontinuités d'un processus croissant intégrable
et les discontinuités de sa projection prévisible duale.

Laurent Schwartz

1. Rappels[1]

$\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\overline{\mathbf{R}}_+}, \mathbf{P}\right)$ont la signification et les propriétés habituelles ; $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0,+\infty]$, et on ajoutera en général un temps $\overline{+\infty} > +\infty$, isolé, $\mathcal{F}_{\overline{+\infty}} = \mathcal{F}_{+\infty}$; mais le graphe d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$ sera toujours la partie du graphe contenue dans $[0,+\infty] \times \Omega$; l'expression $\mathbf{P}$-ps. ou : aux ensembles $\mathbf{P}$-négligeables près, sera toujours omise. Cl. DELLACHERIE a introduit les trois tribus fondamentales : optionnelle, prévisible, accessible. Les deux premières sont d'un usage courant, la troisième plus étrange, est un peu tombée dans l'oubli ; nous voulons ici montrer que, dans certains problèmes bien naturels, elle est indispensable. Et avant tout dans la décomposition d'un temps d'arrêt T (à valeurs dans $[0,\overline{+\infty}]$) : son graphe $[T]$ est, d'une manière unique, réunion disjointe d'un graphe de temps d'arrêt inaccessible et d'un graphe de temps d'arrêt accessible (en général non prévisible)[2].

Soit alors X un processus réel adapté cadlag sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, donc optionnel. Le processus de ses discontinuités : $t \mapsto \Delta X_t$ est alors optionnel (accessible ou prévisible si X l'est). Il en est donc de même de l'ensemble de ses discontinuités, $\{\Delta X_t \neq 0\}$. Comme il est mince, il est réunion d'un ensemble dénombrable de graphes de temps d'arrêts disjoints[3] ; par la décomposition ci-dessus, il est réunion $(\bigcup_m [T'_m]) \cup (\bigcup_n [T_n])$, T'_m inaccessible, T_n accessible ; la première réunion constitue l'ensemble des discontinuités inaccessibles de X, la deuxième l'ensemble A, accessible, des discontinuités accessibles de X ; ces deux réunions sont disjointes, et en général les T_n et A ne sont pas prévisibles (sauf bien évidemment si X est prévisible, auquel cas les T'_m n'existent pas, et les T_n et A sont prévisibles).
Ces deux réunions sont indépendantes du choix des T'_m, T_n. Comme A est accessible et mince, il admet une enveloppe prévisible $\overline{A}$, le plus petit ensemble prévisible qui le contienne. [En effet, par définition des temps d'arrêt accessibles, chaque $[T_n]$ est contenu dans une réunion disjointe de graphes $[T_{n,k}]$ de temps d'arrêt prévisibles. Si $H \subset \Omega$ est dans $\mathcal{F}_{T_{n,k}-}$, le temps d'arrêt $(T_{n,k})_H$, égal à $T_{n,k}$ sur H et à $\overline{+\infty}$ ailleurs, est prévisible, et on obtient ainsi tous les temps d'arrêt prévisibles de graphe $\subset [T_{n,k}]$ [4]. Il y a donc un plus petit ensemble prévisible $\supset A \cap [T_{n,k}]$, c'est $(T_{n,k})_{H_{n,k}}$, où $H_{n,k}$ est le plus petit ensemble de Ω, de la tribu $\mathcal{F}_{T_{n,k}-}$, tel que $[(T_{n,k})_{H_{n,k}}] \supset A \cap [T_{n,k}]$, et alors $\overline{A} = \bigcup_{n,k} [(T_{n,k})_{H_{n,k}}]$].

Supposons que X soit une semi-martingale spéciale[5] (cadlag), c-à-d. de la forme

$$X = X^\natural + M \tag{1.0}$$

où $X^\natural$ est un processus à variation finie (cadlag) prévisible, M une martingale locale nulle au temps 0 ; cette décomposition est unique ; $X^\natural$ s'appelle la projection prévisible duale de X.

Nous appellerons A l'ensemble des discontinuités accessibles de X, $A^\natural$ l'ensemble prévisible des discontinuités de $X^\natural$, $\overline{A}$ l'enveloppe prévisible de A.

Nous voulons démontrer le théorème suivant :

Théorème (1.1).— *$A^\natural \subset \overline{A}$; si X est un processus croissant, $A^\natural = \overline{A}$.*

2. Démonstration du théorème

Lemme (2.1) (connu).— *Si X est une D-quasi-martingale*[6]*, c-à-d. une semi-martingale spéciale, où X est à variation intégrable, et M martingale, et si T est un temps d'arrêt prévisible,*

$$\Delta X^\natural{}_T = \mathbf{E}(\Delta X_T \mid \mathcal{F}_{T_-})^{(7)} \tag{2.1.1}$$

en prenant $\Delta X^\natural{}_T$ et $\Delta X_T = 0$ sur $\{T = \overline{+\infty}\}$.

Corollaire (2.2).— *Si X est continue, $X^\natural$ aussi, et plus généralement* $\operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta X^\natural(t,\omega)| \leq \operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta X(t,\omega)|$.

Démonstration. Cela résulte de ce que l'ensemble $A^\natural$ des discontinuités de $X^\natural$ est porté par une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles, et de (2.1) (par localisation, on peut se ramener au cas où X est une D-quasi-martingale).

Remarques :

1) On en déduit que $\operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta M(t,\omega)| \leq 2 \operatorname*{Sup}_{t,\omega} |\Delta X(t,\omega)|$.
2) La majoration (2.2) est globale, mais on n'a pas individuellement $|\Delta X^\natural(t,\omega)| \leq |\Delta X(t,\omega)|$. Nous verrons justement des cas où $X^\natural$ est discontinue en certains points où X est continue.

Proposition (2.3).— *$A^\natural \subset \overline{A}$.*

Démonstration. En localisant, on peut supposer X D-quasi-martingale. Soit G l'ensemble $A^\natural \setminus \overline{A}$. Soit T un temps d'arrêt prévisible. $G \cap [T]$ est un graphe de temps d'arrêt prévisible (parce que G et $[T]$ sont prévisibles), donc de la forme $[T_H]$, $H \subset \Omega$, $H \in \mathcal{F}_{T_-}$. Appliquons-lui (2.1) :

$$\Delta X^\natural{}_{T_H} = \mathbf{E}\left(\Delta X_{T_H} \mid \mathcal{F}_{T_H-}\right). \tag{2.4}$$

Mais $[T_H] \subset (\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega) \setminus \overline{A} \subset (\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega) \setminus A$, donc $\Delta X_{T_H} = 0$, donc $\Delta X^\natural{}_{T_H} = 0$. Donc $\Delta X^\natural$ est nul sur $G \cap [T]$, et comme G est dans une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt prévisibles, $\Delta X^\natural = 0$ sur G et puisque $A^\natural$ est l'ensemble des points de discontinuité de $X^\natural$, $A^\natural \subset \overline{A}$.

Proposition (2.5).— *Si X est un processus croissant, $A^\natural = \overline{A}$.*

Démonstration. Nous appelons cette fois G l'ensemble $\overline{A} \setminus A^\natural$ et appliquons encore (2.4). Cette fois c'est $\Delta X^\natural{}_{T_H}$ qui est nul, puisque les discontinuités de $X^\natural$ sont sur $A^\natural$, donc pas dans G, donc pas dans $[T_H]$.

Comme $\Delta X_{T_H} \geq 0$, on en déduit qu'il est p.p. nul, donc X n'a pas de discontinuités sur $\overline{A} \setminus A^\natural$, a fortiori pas sur $A \setminus A^\natural$, et comme A est l'ensemble de ses points de discontinuité, $A \subset A^\natural$, donc $\overline{A} \subset \overline{A^\natural} = A^\natural$, donc d'après (2.3), $A^\natural = \overline{A}$.

3. Des exemples.

Nous allons donner des exemples aboutissant à des résultats tout-à-fait opposés.

(3.1) Dans cet exemple, A n'est pas vide et $A^\natural$ est vide. Prenons pour X une martingale M ayant des discontinuités accessibles (par exemple telle que, pour un temps τ, $M_\tau \neq 0$ partout, et $M_{\tau_-} = 0$). On a $X = 0 + M$, $X^\natural = 0$, $A^\natural = \phi$.

(3.2) Dans ce deuxième exemple au contraire, $A \not\subset A^\natural = \overline{A}$; toutes les discontinuités accessibles de X seront des discontinuités communes de $X^\natural$ et de M, et il y aura des points de continuité de X, formant $A^\natural \setminus A$, qui seront discontinuités de $X^\natural$, donc aussi de M, avec des sauts opposés puisque X est continue.

On prendra, pour τ quelconque > 0, $X = 1_{\Omega_1}$ pour $t \geq \tau$, $\mathbf{P}(\Omega_1) = \alpha$, et 0 pour $t < \tau$; $\mathcal{F}_t = \{\phi, \Omega_1, \Omega \setminus \Omega_1, \Omega\}$ pour $t \geq \tau$, $= \{\phi, \Omega\}$ pour $t < \tau$; $X^\natural = \alpha$ pour $t \geq \tau$ et 0 pour $t < \tau$ est bien prévisible puisque dépendant seulement du temps, et
$X - X^\natural = M = 1_{\Omega_1} - \alpha$ pour $t \geq \tau$ et 0 pour $t < \tau$, est bien une martingale. Les discontinuités de X forment l'ensemble $\{\tau\} \times \Omega_1$, celles de $X^\natural$ et de M l'ensemble $\{\tau\} \times \Omega$. On retrouve bien $\Delta X^\natural{}_\tau = \mathbf{E}(\Delta X_\tau \mid \mathcal{F}_{\tau_-}) = \alpha$.

Corollaire (3.3).— *Si N est localement une martingale de carré intégrable, l'ensemble $B^\natural$ des points de discontinuité de $\langle N, N \rangle$ est l'enveloppe prévisible $\overline{B}$ de l'ensemble B des points de discontinuité de N, $B \subset B^\natural = \overline{B}$.*

Démonstration. Les points de discontinuité de N sont ceux de $X = [N, N]$, processus croissant de projection prévisible duale $X^\natural = \langle N, N \rangle$. (8)

4. Les désintégrations de P pour les 3 tribus.

(4.1) Soit f une fonction réelle, bornée ou ≥ 0, $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{F})$- mesurable sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ ($\mathcal{R}$ est la tribu borélienne de $\overline{\mathbf{R}}_+$). On appelle respectivement projections optionnelle, accessible, prévisible des fonctions f^{opt}, f^{acc}, $f^{\mathrm{pré}}$, respectivement optionnelle, accessible, prévisible, ayant la propriété suivante (9) :

si T est un temps d'arrêt, $f_T^{\mathrm{opt}} = \mathbf{E}(f_T \mid \mathcal{F}_T)$;

si T est un temps d'arrêt accessible, $f_T^{\mathrm{acc}} = \mathbf{E}(f_t \mid \mathcal{F}_T)$;

si T est un temps d'arrêt prévisible, $f^{\mathrm{pré}} = \mathbf{E}(f_T \mid \mathcal{F}_{T_-})$.

Si f est optionnelle, elle coïncide avec f^{acc} sur tout graphe de temps d'arrêt accessible(10).

Si $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tendent vers 0 simplement sur $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$ en restant bornées(11), leurs projections ont la même propriété.

(4.2) Si $(\Omega, \mathbf{P})$ vérifie des conditions très générales, par exemple si Ω est un espace topologique et $\mathbf{P}$ portée par une réunion dénombrable de compacts métrisables, $\mathbf{P}$ possède une désintégration régulière(11), $\mathcal{P} : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)$, unique aux ensembles négligeables près, ayant les propriétés suivantes : les $\mathbf{P}_t(\omega)$ sont des probabilités, $\mathcal{P}$ est adaptée cadlag, donc optionnelle [ceci veut dire : il existe un système de limites à gauche, $\mathcal{P}_- : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_-(\omega)$, et, pour toute fonction réelle φ bornée $\mathcal{F}$-mesurable sur Ω, $\mathcal{P}(\varphi) : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(\varphi)$ est adaptée cadlag, donc optionnelle, et le système des limites à gauche est $\mathcal{P}_-(\varphi) : (t, \omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)\varphi$; $\mathcal{P}$ est adaptée aux $\mathcal{F}_{t_-}$ et caglad, donc prévisible]. En fait, $\mathcal{P}$ est la martingale de mesures, de valeur finale sur la tribu $\mathcal{F} : \delta : \omega \mapsto \delta_\omega$; $\mathcal{P}_t$ (resp. $\mathcal{P}_{t_-}$) est l'espérance conditionnelle de δ pour la tribu $\mathcal{F}_t$ (resp. $\mathcal{F}_{t_-}$) ; $\mathcal{P}$ est aussi la projection optionnelle du processus $\delta : (t, \omega) \mapsto \delta_\omega$, $\mathcal{P}_-$ sa projection prévisible ; tout ceci se voit avec des φ comme précédemment.

En fait on voit que les principales propriétés peuvent être obtenues à partir d'un ensemble dénombrable Φ, dit déterminant, de fonctions φ réelles bornées $\mathcal{F}$-mesurables sur Ω (13).

L'ensemble des discontinuités du système $(\mathcal{P}, \mathcal{P}_-)$ (c'est à dire l'ensemble $\{\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_-\}$ de $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$) est la réunion des ensembles de discontinuités $\{\mathcal{P}(\varphi) \neq \mathcal{P}_-(\varphi)\}$ pour $\varphi \in \Phi$, il est mince donc égal à une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt inaccessibles ou accessibles, d'où l'ensemble des discontinuités inaccessibles, et l'ensemble A accessible des discontinuités accessibles.

Théorème (4.3).—

(4.3.1) *La désintégration optionnelle de* $\mathbf{P}$ *est* $\mathcal{P} : (t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)$, *en ce sens que si, f est une fonction réelle bornée ou* ≥ 0 $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{F})$*-mesurable sur* $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, *sa projection optionnelle est* $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(f_t)$.

(4.3.2) *La désintégration prévisible de* $\mathbf{P}$ *est* $\mathcal{P}_- : (t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)$, *en ce sens que, si f est une fonction réelle bornée ou* ≥ 0 $(\mathcal{R} \otimes \mathcal{F})$*-mesurable sur* $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, *sa projection prévisible est* $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(f_t)$.

(4.3.3) *La désintégration accessible de* $\mathbf{P}$ *est* $\mathcal{Q} : (t,\omega) \mapsto \mathbf{Q}_t(\omega) = \mathbf{P}_t(\omega) = \mathbf{P}_{t_-}(\omega)$ *aux points de continuité de* $\mathcal{P}$, $\mathbf{P}_{t_-}(\omega)$ *aux points de discontinuité inaccessibles,* $\mathbf{P}_t(\omega)$ *aux points de discontinuité accessibles, en ce sens que, si f est une fonction réelle bornée ou* ≥ 0 $(\mathbf{R}\otimes\mathcal{F})$*- mesurable sur* $\overline{\mathbf{R}}_+ \times \Omega$, *sa projection accessible est* $(t,\omega) \mapsto \mathcal{Q}_t(\omega)(f_t)$.

Démonstration.

(4.3.1) On sait que l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_T$ d'une fonction g sur Ω est $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T(\omega)}(\omega)(g)$. Alors $\mathbf{E}(f_T \mid \mathcal{F}_T)$ est $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T(\omega)}(\omega)(f_T)$ (14) ; mais, $\mathbf{P}_T(\omega)$-ps., $T = T(\omega)$, c'est donc aussi $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T(\omega)}(\omega)(f_{T(\omega)})$, c'est-à-dire g_T, où g est la fonction $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(f_t)$. Donc, pour montrer que f^{opt} est $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(f_t)$, il suffit de montrer que cette fonction est optionnelle. Par la continuité pour la convergence simple bornée, il suffit de le voir pour $f(t,\omega) = g(t)h(\omega), g \in \mathcal{R}, h \in \mathcal{F}$, où cela résulte de ce que $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)(h)$ est optionnelle.

(4.3.2) Soit T prévisible ; $\mathbf{E}(f_T|\mathcal{F}_{T_-})$ est $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T_-(\omega)}(\omega)(f_T)$ (15) ; mais $T \in \mathcal{F}_{T_-}$ (16), donc $\mathbf{P}_{T_-(\omega)}(\omega) ps., f_T = f_{T(\omega)}$; c'est donc $\omega \mapsto \mathbf{P}_{T_-(\omega)}(\omega)(f_{T(\omega)})$ ou g_T, où g est la fonction $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(f_t)$. Donc, pour montrer que $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(f_t)$ est la projection prévisible de f, il suffit de montrer que c'est une fonction prévisible, et de le voir pour $f(t,\omega) = g(t)h(\omega)$; or $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(h)$ est prévisible.

(4.3.3) Soit T un temps d'arrêt accessible ; la formule de (4.3.1) montre que $\mathbf{E}(f_T|\mathcal{F}_T)$ est g_T, où g est $(t,\omega) \mapsto \mathbf{Q}_t(\omega)f_t$, car $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ partout sauf aux points de discontinuité inaccessibles, et il n'y en a pas sur le graphe de T. Il reste donc à montrer que cette fonction $(t,\omega) \mapsto \mathcal{Q}_t(\omega)(f_t)$ est accessible. Par $f(t,\omega) = g(t)h(\omega)$, il suffit de voir que $(t,\omega) \mapsto \mathbf{Q}_t(\omega)(h)$ est accessible. Or elle s'écrit $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_{t_-}(\omega)(h)1_{(\overline{\mathbf{R}}_+ \times\Omega)\setminus A}(\omega) + \mathbf{P}_t(\omega)(h)1_A(\omega)$. La première fonction est accessible, parce que $\mathcal{P}_-$ est prévisible et A accessible. Prenons la deuxième fonction. Si $[T]$ est graphe d'un temps d'arrêt accessible, $(t,\omega) \mapsto \mathbf{P}_t(\omega)h$, optionnelle, coïncide sur $[T]$ avec une fonction accessible (sa projection accessible), et A est accessible ; donc cette deuxième fonction est accessible sur $[T]$. Comme A est une réunion dénombrable de graphes de temps d'arrêt accessibles, elle est accessible.

Remarque : $\mathcal{P}, \mathcal{P}_-, \mathcal{Q}$, sont les projections optionnelle, prévisible, accessible, de $\delta : (t,\omega) \mapsto \delta_{(\omega)}$.

Les projections optionnelle et accessible ne diffèrent qu'aux points de discontinuité inaccessibles de $\mathcal{P}$ (elles sont donc égales sur tout graphe de temps d'arrêt accessible), les projections accessible et prévisible aux points de discontinuité accessibles.

NOTES DE BAS DE PAGE

Note (1), page 1

On trouvera toutes ces propriétés dans Cl. DELLACHERIE [1], chapitre III, IV, et Cl. DELLACHERIE P.A. MEYER [1], chapitre IV. Pour des théorèmes précis nous y référerons par Cl. DELLACHERIE et P.A. MEYER.

Note (2), page 1

Cl. DELLACHERIE, chapitre III, T41, page 58, et P.A. MEYER chapitre IV, T(81), page 215.

Note (3), page 1

Cl. DELLACHERIE, chapitre VI, T33, page 138, et P.A. MEYER, appendice au chapitre IV, T117, page 261.

Note (4), page 1

Cl. DELLACHERIE, chapitre III, T49 page 61, et P.A. MEYER chapitre IV T73, page 205.

Note (5), page 1

P.A. MEYER, chapitre VII, définition 23 page 232 et T25 page 235.

Note (6), page 2

P.A. MEYER, chapitre VI, définition 38 page 106 ; chapitre II, remarque 15, page 13 ; chapitre VI, définition 73, page 148.

Note (7), page 2

P.A. MEYER, chapitre VII, T76 page 149.

Note (8), page 3

P.A. MEYER, chapitre VII, remarque 43, page 252.

Note (9), page 4

Cl. DELLACHERIE, chapitre V, T14 page 98, et P.A. MEYER, chapitre VI, T43 page 113.

Note (10), page 4

Cl. DELLACHERIE, chapitre V, T22, page 102.

Note (11), page 4

Cl. DELLACHERIE, chapitre V, démonstration de T14, page 98, et P.A. MEYER, chapitre VI, b) de la démonstration de T43 page 113.

Note (12), page 4

SCHWARTZ [1], théorème (5.1) page 101.

Note (13), page 4

SCHWARTZ [1], définition E, page 14.

Note (14), page 5

SCHWARTZ [1], théorème (7.2) page 140.

Note (15), page 5

Ceci n'a pas été énoncé dans SCHWARTZ [1] ; on le voit en considérant une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ annonçant T.

Note (16), page 5

Cl. DELLACHERIE, chapitre IV, T21 page 78 (avec $X_t = t$).

Index terminologique et Index des notations

Temps d'arrêt	page 1
tribus optionnelle, accessible, et prévisible	page 1
projections	pages 1 et 4
l'ensemble A des discontinuités accessibles	page 1
$X = X^{\natural} + M$, semi-martingale spéciale, projection prévisible duale, $A^{\natural}, \overline{A}$	page 1
D-quasi-martingale	page 2
les désintégrations	page 4
$\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_-$	page 4
$\mathcal{Q}$	page 5

Index Bibliographique

[1] Claude DELLACHERIE, Capacités et processus stochastiques, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, volume 67, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[1] Claude DELLACHERIE et Paul André MEYER, Probabilités et potentiels, Paris Hermann, 1975 et 1980.

[1] L. SCHWARTZ, Surmartingales régulières à valeurs mesures et désintégrations régulières d'une mesure, Journal d'Analyse Mathématique, Jérusalem, 1973.

Table des matières

Introduction		page 1
Paragraphe 1.	Rappels.	page 1
Paragraphe 2.	Démonstration du théorème.	page 2
Paragraphe 3.	Des exemples.	page 3
Paragraphe 4.	Les désintégrations de **P** pour les trois tribus.	page 3
Notes de bas de page		page 5
Index terminologique et index des notations		page 6
Index bibliographique		page 6
Table des matières		page 7

37, Rue Pierre Nicole
75005 PARIS
(France)