SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

C. DONATI-MARTIN
MARC YOR

Mouvement brownien et inégalité de Hardy dans L^2

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 315-323
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__315_0>

MOUVEMENT BROWNIEN ET INEGALITE DE HARDY DANS L^2.

C. DONATI-MARTIN et M. YOR

Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie
Tour 56 - 3ème Etage - Couloir 56-66 - 75252 PARIS CEDEX 05

1. *Introduction.*

(1.1) Dans cette Note, on présente de manière unifiée diverses questions sur le mouvement brownien où intervient de façon essentielle l'inégalité de Hardy dans L^2, que l'on commence par rappeler :
à toute fonction $f \in L^2([0,1])$, on associe la fonction : $Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x dy\ f(y)$;
alors :

$$\text{(a)} \qquad \int_0^1 dx\ (Hf)^2(x) \leq 4 \int_0^1 dx\ f^2(x).$$

Ainsi, H est un opérateur linéaire continu de $L^2([0,1])$ dans lui-même ; l'opérateur adjoint $\tilde{H}$ vérifie : $\tilde{H}f(x) = \int_x^1 \frac{dy}{y} f(y)$ ainsi que :

$$(\tilde{a}) \qquad \int_0^1 dx\ (\tilde{H}f)^2(x) \leq 4 \int_0^1 dx\ f^2(x).$$

(1.2) L'inégalité (a) peut être démontrée de façon élémentaire en développant soigneusement le membre de gauche. Toutefois, il semble plus judicieux, dans le contexte de ce travail, de présenter l'inégalité de Hardy (a) comme conséquence de l'inégalité de Doob dans L^2 :
en effet, si $(\Omega,\mathcal{F},P) \equiv ([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]},\lambda)$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, et si $\mathcal{F}_x = \sigma\{[0,t]\ ;\ t \leq x\}$ $(x \leq 1)$, alors pour toute $f \in L^2([0,1],\lambda)$, on a, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\lambda(dy) \text{ p.s.,} \quad E[f|\mathcal{F}_x](y) = (f_x(y) \overset{\text{def}}{=}) f(y)\ 1_{(y<x)} + \hat{H}f(x)\ 1_{(x\leq y<1)}$$

où $$\hat{H}f(x) = \frac{1}{1-x}\int_x^1 dt\ f(t).$$

Ainsi, $(f_x(\cdot), x < 1)$ est une martingale continue à droite.

De plus, si f est positive, on a : $f^*(y) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_x f_x(y) \geq \hat{H}f(y)$

En conséquence, on a, d'après l'inégalité de Doob :

$$\int_0^1 dy\ (\hat{H}f)^2(y) \leq \int_0^1 dy\ (f^*(y))^2 \leq 4 \int_0^1 dy\ f^2(y), \text{ d'où (a).}$$

(1.3) Le rôle de l'inégalité de Hardy dans L^2 dans les études browniennes que l'on présente ci-dessous devrait maintenant sembler moins mystérieux lorsque l'on aura rappelé que M. Sharpe et E. Lenglart construisent l'intégrale stochastique par rapport à une martingale continue en s'appuyant de façon essentielle sur l'inégalité de Doob dans L^2 (voir, par exemple, [3]).

(1.4) Dans toute la Note, $(B_t, t \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, issu de 0, et $(\mathcal{B}_t, t \geq 0)$ sa filtration naturelle.

2. *Grossissement de* $(\mathcal{B}_t)$ *avec la variable* B_1.

Les résultats présentés dans ce paragraphe se trouvent presque tous dans Jeulin-Yor [2]. Toutefois, on y montre de plus comment l'inégalité de Hardy dans L^2, (a) ou ($\hat{\text{a}}$), peut être obtenue via le grossissement de $(\mathcal{B}_t)$ avec la variable B_1.

(2.1) Notons $(\mathcal{B}_t^{(1)})$ la filtration engendrée par $(\mathcal{B}_t)$ et $\sigma(B_1)$.

$(B_t, t \geq 0)$ est une semi-martingale dans la filtration $(\mathcal{B}_t^{(1)}, t \geq 0)$, qui admet pour décomposition canonique :

$$\text{(b)} \qquad B_t = \tilde{B}_t + \int_0^{t\wedge 1} du\ \frac{B_1 - B_u}{1-u}$$

$(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ est un $(\mathcal{B}_t^{(1)})$ mouvement brownien ; en particulier, il est indépendant de la variable B_1.

(2.2) Pour toute fonction $f \in L^2([0,1])$, on a, d'après la formule (b) : pour tout $t < 1$,

$$\text{(c)} \qquad \int_0^t f(u) dB_u = \int_0^t f(u) d\tilde{B}_u + \int_0^t du\ f(u)\ \frac{B_1 - B_u}{1-u}.$$

La représentation de l'intégrale en du ci-dessus comme intégrale de Wiener par rapport à dB_u est :

$$\int_0^t du\, f(u)\, \frac{B_1 - B_u}{1-u} = \int_0^1 dB_u\, F(u \wedge t), \text{ où } F(u) = \int_0^t ds\, \frac{f(s)}{1-s}.$$

On peut donc réécrire l'égalité (c) sous la forme :

$$\text{(d)} \qquad \int_0^1 dB_u\, F(u \wedge t) = \int_0^t f(u) dB_u - \int_0^t f(u) d\tilde{B}_u \qquad (t < 1)$$

d'où l'on déduit, en prenant les moments d'ordre 2 :

$$\int_0^1 du\, F^2(u \wedge t) \leq 4 \int_0^t f^2(u) du$$

puis, en faisant tendre t vers 1 :

$$\int_0^1 du\, F^2(u) \leq 4 \int_0^1 f^2(u) du.$$

Lorsque l'on éffectue le changement de variables : $u = 1-v$, cette dernière inégalité n'est autre que $(\tilde{a})$, équivalente à (a).

(2.3) Retournons à l'identité (c), dont on déduit que, pour toute fonction $f \in L^2[0,1]$, $\int_0^t du\, f(u)\, \frac{B_1 - B_u}{1-u}$ converge p.s. lorsque $t \uparrow 1$.

Par retournement du temps en $u = 1$, ce résultat équivaut à :

(e) <u>pour toute</u> $f \in L^2([0,1])$, $\int_t^1 du\, \frac{f(u)}{u} B_u$ <u>converge p.s. lorsque</u> $t \to 0$.

3. *Extension du résultat de convergence p.s.*.

(3.1) On considère maintenant $\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que :

$$\text{(f)} \qquad \text{pour tout } \varepsilon \in]0,1[, \quad \int_\varepsilon^1 du\, |\varphi(u)| < \infty.$$

Il est intéressant de comparer le résultat (e) avec :

$$\text{(g)} \qquad \int_0^1 du\, |\varphi(u) B_u| < \infty \quad P\text{-p.s. ssi : } \int_0^1 du\, |\varphi(u)| \sqrt{u} < \infty,$$

ce qui, dans le cas où $\varphi(u) = \frac{f(u)}{u}$, avec $f \in L^2([0,1])$ donne :

$$(\tilde{g}) \qquad \int_0^1 du\, \frac{|f(u)|}{u} |B_u| < \infty \quad \text{ssi : } \int_0^1 du\, \frac{|f(u|}{\sqrt{u}} < \infty.$$

(pour une démonstration de (g), voir par exemple [2], Proposition 10)

(3.2) Nous nous posons maintenant la question de savoir si, sous la seule hypothèse (f),

$$\int_\varepsilon^1 du\ \varphi(u)B_u \quad \text{converge en probabilité, ou p.s., lorsque } \varepsilon \to 0.$$

On a la :

Proposition : Soit φ satisfaisant l'hypothèse (f). Posons $\Phi(u) = \int_u^1 ds\ \varphi(s)$.

Alors, $\int_\varepsilon^1 ds\ \varphi(s)B_s$ converge en probabilité lorsque $\varepsilon \to 0$ si, et seulement si :

$$(h) \qquad \int_0^1 du\ \Phi^2(u) < \infty \quad et \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \sqrt{\varepsilon}\ \Phi(\varepsilon) = 0.$$

Démonstration : En écrivant $B_s = (B_s - B_\varepsilon) + B_\varepsilon$, on obtient :

$$\text{(i)} \qquad \int_\varepsilon^1 ds\ \varphi(s)B_s = B_\varepsilon\ \Phi(\varepsilon) + \int_\varepsilon^1 dB_u\ \Phi(u).$$

Le membre de gauche converge en probabilité ssi il converge dans L^2, et on a :

$$E\left[\left(\int_\varepsilon^1 ds\ \varphi(s)B_s\right)^2\right] = \varepsilon\Phi^2(\varepsilon) + \int_\varepsilon^1 du\ \Phi^2(u).$$

Le membre de gauche converge ssi : $\int_0^1 du\ \Phi^2(u) < \infty$ et $\varepsilon\Phi^2(\varepsilon)$ converge.

Maintenant, $\varepsilon\Phi^2(\varepsilon)$ converge nécessairement vers 0, sinon l'intégrale $\int_0^1 du\ \Phi^2(u)$ serait infinie.

Inversement, si l'hypothèse (h) est satisfaite, l'identité (i) assure que $\int_\varepsilon^1 ds\ \varphi(s)B_s$ converge dans L^2, et on a de plus :

$$\int_0^1 ds\ \varphi(s)B_s = \int_0^1 dB_u\ \Phi(u). \qquad \square$$

Remarquons que, dans le cas où $\varphi(u) = \frac{f(u)}{u}$ avec $f \in L^2([0,1])$, on a : $\Phi(u) = \tilde{H}f(u)$, et il est bien connu que l'hypothèse (h) est satisfaite.

Inversement, remarquons que, si $\Phi(u) = \int_u^1 \frac{ds}{s} f(s)$, avec f décroissante positive, alors : $\int_0^1 du\ \Phi^2(u) \geq \int_0^1 du\ f^2(u)$ et donc, dans ce cas : $\Phi \in L^2([0,1])$ implique : $f \in L^2([0,1])$.

4. Processus d'Ornstein-Uhlenbeck et convergence p.s..

(4.1) Considérons l'équation de Langevin :

$$X_t = x + B_t - \lambda \int_0^t X_s ds$$

qui définit le processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $\lambda > 0$, issu de x. L'expression de (X_t) comme intégrale de Wiener est :

$$X_t = e^{-\lambda t}\left(x + \int_0^t e^{\lambda s}\, dB_s\right) \qquad (t \geq 0)$$

A partir de cette représentation, on voit aisément que le processus de Markov (X_t) admet pour mesure invariante une loi gaussienne centrée de variance β, que nous calculons maintenant en fonction de λ. En effet, si X_o est une telle variable, indépendante de B, le processus :

$$Y_t = e^{-\lambda t}\left(X_o + \int_0^t e^{\lambda s}\, dB_s\right)$$

admet pour loi au temps t la loi gaussienne centrée, de variance :

$$E[Y_t^2] = e^{-2\lambda t}\,\beta + e^{-2\lambda t}\left(\frac{e^{2\lambda t}-1}{2\lambda}\right) = e^{-2\lambda t}\left(\beta - \frac{1}{2\lambda}\right) + \frac{1}{2\lambda}\,.$$

En conséquence, si $\beta = \frac{1}{2\lambda}$, on a : $E[Y_t^2] = \frac{1}{2\lambda}$, pour tout t.

De plus, on peut alors représenter le processus (Y_t) sous la forme :

$$\text{(j)} \qquad Y_t = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\, e^{-\lambda t}\, \tilde{B}_{e^{2\lambda t}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\, e^{\lambda t}\, \gamma_{e^{-2\lambda t}}$$

où $(\tilde{B}_u, u \geq 0)$ et $(\gamma_u, u \geq 0)$ sont deux mouvements browniens réels, liés par la relation : $\tilde{B}_u = u\, \gamma_{1/u}$ $(u > 0)$.

(4.2) On se pose maintenant le problème de la convergence p.s. ou en probabilité de :

$$\left(\int_0^t ds\; g(s) Y_s,\quad t \to \infty\right)$$

pour une fonction g telle que : $\int_0^t ds\, |g(s)| < \infty$ pour tout t.

A l'aide de la représentation (j), on a :

$$\int_0^t ds\, g(s) Y_s = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^t ds\, g(s) e^{\lambda s}\, \gamma_{e^{-2\lambda s}} = \int_{e^{-2\lambda t}}^1 \frac{du}{u} \frac{\gamma_u}{\sqrt{2\lambda u}}\, g\left(\frac{1}{2\lambda} \log \frac{1}{u}\right)$$

après avoir effectué le changement de variables $u = e^{-2\lambda s}$.

Or, l'application :

$$g \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\lambda u}}\, g\left(\frac{1}{2\lambda} \log \frac{1}{u}\right)$$

$$L^2([0,\infty[) \longrightarrow L^2([0,1])$$

est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. D'après (e), on sait donc que :

(k) <u>pour toute fonction</u> $g \in L^2([0,\infty[)$, $\int_0^t ds\, g(s) Y_s$ <u>converge p.s. et dans</u> L^2.

Considérons à nouveau la représentation :

$$Y_t = e^{-\lambda t}\left(X_0 + \int_0^t e^{\lambda s}\, dB_s\right)$$

du processus Y en fonction de X_0 et de B.

L'écriture de $\int_0^\infty ds\, g(s) Y_s$ comme intégrale stochastique est :

$$(\ell) \qquad \int_0^\infty ds\, g(s) Y_s = \left(\int_0^\infty ds\, g(s) e^{-\lambda s}\right) X_0 + \int_0^\infty dB_s\, G_\lambda(s),$$

$$\text{où} \quad G_\lambda(s) = \int_s^\infty du\, g(u) e^{-\lambda(u-s)}.$$

Il découle immédiatement de cette représentation que $\int_0^\infty ds\, g(s) Y_s$ est la variable terminale d'une martingale de BMO, dans la filtration naturelle de Y.

5. *Transformation de Fourier et mouvement brownien.*

Soit $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$.

On se pose maintenant le problème de la convergence p.s. ou en probabilité de : $\int_0^t ds\, g(s) e^{i\mu B_s}$, $t \to \infty$, pour une fonction g telle que $\int_0^t ds\, |g(s)| < \infty$, pour tout t.

Remarquons que :

$$E\left[\left|\int_0^t ds\ g(s)e^{i\mu B_s}\right|^2\right] = \int_0^t ds\ g(s) \int_0^t du\ g(u)\ E\left[e^{i\mu(B_s-B_u)}\right]$$
$$= \int_0^t ds\ g(s) \int_0^t du\ g(u)e^{-\frac{\mu^2}{2}|u-s|}.$$

D'autre part, si Y est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck défini par (j), on a :

$$E\left[\left(\int_0^t ds\ g(s)Y_s\right)^2\right] = \int_0^t ds \int_0^t du\ g(s)\ g(u)\ E[Y_s\ Y_u]$$
$$= \frac{1}{2\lambda}\int_0^t ds \int_0^t du\ g(s)g(u)e^{-\lambda|u-s|}.$$

En conséquence, si $\lambda = \frac{\mu^2}{2}$, on a, pour toute fonction g, et tout $t > 0$:

(m) $$E\left[\left|\int_0^t ds\ g(s)e^{i\mu B_s}\right|^2\right] = \frac{1}{\mu^2}\ E\left(\left(\int_0^t ds\ g(s)Y_s\right)^2\right)$$

$\left(\int_0^t g(s)e^{i\mu B_s}\ ;\ t \to \infty\right)$ converge donc dans L^2 ssi $\left(\int_0^t ds\ g(s)Y_s,\ t \to \infty\right)$ converge dans L^2. En fait, on a :

(n) <u>pour tout</u> $\mu \neq 0$, <u>pour toute fonction</u> $g \in L^2([0,\infty[)$,

$\int_0^t ds\ g(s)e^{i\mu B_s}$ <u>converge p.s. et dans</u> L^2 <u>lorsque</u> $t \to \infty$.

La convergence dans L^2 découle immédiatement de l'égalité (m) et de (k).
En ce qui concerne la convergence p.s, calculons :

$$E\left[\int_0^\infty ds\ g(s)e^{i\mu B_s}/\mathcal{F}_t\right]$$

$$= \int_0^t ds\ g(s)e^{i\mu B_s} + e^{i\mu B_t}\int_t^\infty ds\ g(s)e^{-\lambda(s-t)}.$$

Or, d'après le théorème de convergence des martingales, le membre de gauche converge p.s. lorsque $t \to \infty$; il en est donc de même de $\int_0^t ds\ g(s)e^{i\mu B_s}$, car :

$$\left|e^{i\mu B_t}\int_t^\infty ds\ g(s)e^{-\lambda(s-t)}\right| \leq \left(\int_t^\infty ds\ g^2(s)\right)^{1/2}\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.$$

L'assertion (n) est donc complètement démontrée.

Remarquons enfin que la variable $\Gamma(\mu) \equiv \int_0^\infty ds\, g(s) e^{i\mu B_s}$ admet la représentation suivante comme intégrale stochastique :

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty ds\, g(s) \exp(-\lambda s) + i\mu \int_0^\infty dB_s \exp(i\mu B_s)\, G_\lambda(s)$$

En consequence, $\Gamma(\mu)$ est la variable terminale d'une martingale de H^∞, l'espace des martingales (dans la filtration brownienne) dont le crochet est borné. Il découle alors de l'inégalité exponentielle de Bernstein que l'on a :

$$E\left[\exp \alpha|\Gamma(\mu)|^2\right] < \infty, \quad \text{pour} \quad \alpha < \alpha_0 = \frac{1}{8\lambda\|G_\lambda\|^2_{L^2}}$$

De nombreuses autres propriétés des variables $\Gamma(\mu)$ sont étudiées par le premier auteur en [1].

6. *Extension à certains processus à accroissements indépendants.*

Considérons maintenant $(X_t, t \geq 0)$ processus à accroissements indépendants, homogènes, symétriques, caractérisé par :

$$E\left[\exp(i\mu X_t)\right] = \exp(-t\psi(\mu)), \quad \text{où} \quad \psi(\mu) > 0.$$

On a alors :

(o) pour tout $\mu \neq 0$, pour toute fonction $g \in L^2([0,\infty))$, $\int_0^t ds\, g(s) e^{i\mu X_s}$ converge p.s. et dans L^2, lorsque $t \to \infty$.

La démonstration de (o) est identique à celle de (n), quitte à changer $\lambda = \frac{\mu^2}{2}$ en $\lambda = \psi(\mu)$.

Enfin, $\Gamma(\mu) \equiv \int_0^\infty ds\, g(s) e^{i\mu X_s}$ appartient à BMO, ce qui découle de l'inégalité :

$$E\left[\left|\int_t^\infty ds\, g(s) e^{i\mu X_s}\right|^2 \Big| \mathcal{F}_t\right] \leq \frac{2}{\psi(\mu)} \int_0^\infty du\, g^2(u),$$

toujours obtenue à l'aide de l'inégalité de Hardy.

REFERENCES :

[1] C. DONATI-MARTIN : Transformation de Fourier et temps d'occupation browniens. (Soumis à Proba. Theory and rel. Fields ; Décembre 1988).

[2] T. JEULIN et M. YOR : Inégalité de Hardy, semimartingales et faux-amis. Sém. Probabilités XIII. Lect. Notes in Maths. 721. Springer (1979).

[3] M. YOR : Introduction au calcul stochastique. Séminaire Bourbaki, exposé n° 590, Astérisque 92-93 p. 275-292 (1982).