SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARTIN T. BARLOW
JIM PITMAN
MARC YOR

Une extension multidimensionnelle de la loi de l'arc sinus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 294-314
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__294_0>

UNE EXTENSION MULTIDIMENSIONNELLE DE LA LOI DE L'ARC SINUS *

Martin BARLOW
Trinity College
Cambridge CB2 1TQ
England

Jim PITMAN
Department of Statistics
University of California
Berkeley, California 94720
United States

Marc YOR
Laboratoire de Probabilités
Université P. et M. Curie
4, place Jussieu - Tour 56
75252 Paris Cedex 05, France

1. Introduction.

(1.1) Soit $(B_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel issu de 0. On note :

$$g_t = \sup\{s \leq t : B_s = 0\} \quad \text{et} \quad A_t = \int_0^t ds\, 1_{(B_s>0)}.$$

Remarquons que, pour $t > 0$ donné, on a :

$$g_t \overset{(\text{loi})}{=} t\, g_1 \quad \text{et} \quad A_t \overset{(\text{loi})}{=} t\, A_1.$$

P. Lévy ([11a], [11b]) a montré que les variables g_1 et A_1 suivent la loi de l'arc sinus, c'est-à-dire :

$$\text{(1.a)} \qquad P(g_1 \in dt) = P(A_1 \in dt) = \frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}} \qquad (0 < t < 1)$$

De nombreuses démonstrations de ces résultats ont maintenant été données (voir, par exemple, Kac [13], Williams [12], Pitman-Yor [7], Karatzas-Shreve [5], Rogers-Williams [8] section 53) ; P. Lévy [11a] et Pitman-Yor [7] utilisent le fait que les variables suivantes :

$$\text{(1.b)} \qquad \frac{\sigma}{\sigma+\tilde{\sigma}} \overset{(\text{loi})}{=} \frac{N^2}{N^2+\tilde{N}^2} \overset{(\text{loi})}{=} \cos^2\theta$$

suivent la loi de l'arc sinus, lorsque σ et $\tilde{\sigma}$ désignent deux copies indépendantes du premier temps d'atteinte de 1 par $(B_t, t \geq 0)$, N et $\tilde{N}$ sont deux variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes, et θ est une variable uniformément distribuée sur $[0, 2\pi[$.

La démonstration de (1.b) repose sur les deux remarques suivantes :

(i) $\quad (\sigma, \tilde{\sigma}) \overset{(\text{loi})}{=} \left(\frac{1}{\tilde{N}^2}, \frac{1}{N^2}\right)$

---

* Ce travail a été réalisé avec l'aide partielle de NSF Grant DMS 88 - 01808

(ii) $\theta \equiv \arg(N+i\tilde{N})$ est uniformément distribuée sur $[0,2\pi[$ (et, de plus, indépendante de $N^2+\tilde{N}^2$).

(1.2) Décrivons maintenant l'extension du résultat (1.a) que nous avons en vue :

- commençons par remplacer le mouvement brownien réel par un processus de Markov (X_t) à valeurs dans E_k, l'union de k demi-droites concourantes $I_i (i = 1,2,\dots,k)$ du plan, dont on note 0 le point d'intersection. On suppose que $X_o = 0$, et que (X_t) se comporte comme un mouvement brownien sur chacune des demi-droites et, lorsqu'il arrive en 0, choisit avec probabilité p_i la demi-droite I_i, la probabilité $(p_i)_{1\le i\le k}$ étant supposée donnée.

Cette description est seulement d'ordre heuristique, le point 0 étant régulier pour lui-même, relativement au processus X. En fait, il n'est pas difficile de décrire précisément un tel processus à l'aide de la théorie des excursions : en particulier, la mesure caractéristique des excursions hors de 0 du processus (X_t) est : $\sum_{i=1}^{k} p_i n_i$ où n_i est obtenue (de manière évidente) à partir de la mesure d'Itô des excursions positives du mouvement brownien réel.

Une description détaillée du processus de Markov (X_t) est faite dans notre article [14] sur le processus de Walsh, également publié dans ce volume.

- plus généralement, le modèle que nous considèrerons dans cette rédaction est celui présenté ci-dessus, mais dans lequel on a remplacé le mouvement brownien sur les demi-droites I_i par un processus de Bessel de dimension $\delta \in (0,2)$.

Nous nous proposons d'expliciter, dans ce cadre général, la loi du vecteur

$$\left\{A_i(u) = \int_0^u ds\, 1_{(X_s\in I_i)}\ ;\ i \le k\right\}$$

pour u fixé.

Il est souvent commode de considérer, au lieu de la dimension δ, l'indice μ, lié à δ par la formule : $\delta = 2(1-\mu)$; μ décrit donc l'intervalle $(0,1)$. Nous utiliserons également la quantité $\nu = 1/_{\mu}$.
Nous appellerons ce processus de Markov à valeurs dans E_k <u>processus de Walsh d'indice</u> μ, <u>associé à la probabilité</u> $(p_i)_{i\le k}$, et nous noterons ce processus $W_k(\mu\ ;\ (p_i)_{i\le k})$; c'est en effet Walsh [10] qui a, le premier, introduit de tels processus.

Lorsque $k = 2$ et $\delta = 1$, le processus (X_t) peut être identifié au skew Brownian motion tel que :

(1.c) $$P(X_t > 0) = p_1 \quad ; \quad P(X_t < 0) = p_2 \equiv 1-p_1.$$

Les skew Brownian motions, introduits par Itô-Mc Kean [4], ont été étudiés ensuite par Walsh [10], Harrison-Shepp [3], Brooks-Chacon [1] ;ils interviennent de façon naturelle dans certains théorèmes limites pour les diffusions réelles (voir Rosenkrantz [9], Le Gall [6], Franchi [2]). On peut présenter le skew Brownian motion satisfaisant (1.c) comme la solution en loi de :

(1.d) $$X_t = B_t + \frac{1-a}{1+a} L_t^o(X) \qquad (a > 0)$$

où (B_t) désigne un mouvement brownien réel, issu de 0, et $L_t^o(X)$ le temps local symétrique de X en 0, a et p_1 étant liés par la formule :

(1.e) $$p_1 = \frac{1}{1+a}.$$

(1.3) Nous présentons maintenant les deux résultats principaux de ce travail (Théorèmes 1 et 2 ci-dessous).

Précisons tout d'abord le choix du temps local $(\ell_t, t \geq 0)$ de X en 0 que nous adopterons dans toute la suite.

Notons $\tau(t) = \inf\{u : \ell_u > t\}$ l'inverse à droite de $(\ell_u, u \geq 0)$; en anticipant légèrement sur le paragraphe 2, le processus $(\tau(t), t \geq 0)$ est un processus stable unilatéral, d'indice μ. Choisissons-le de façon que :

$$E[\exp - \xi\tau(t)] = \exp - t\xi^{\mu} \qquad (\xi \geq 0),$$

et définissons $(\ell_u \, ; \, u \geq 0)$ comme son inverse à droite.

Nous pouvons maintenant énoncer le

__Théorème 1__ : *Soient* $(T_i \, ; \, i \leq k)$ k *variables positives stables, d'indice* μ, *indépendantes. Alors :*

(i) *pour tout* $u > 0$,

$$\frac{1}{\ell_u^{\nu}} (A_i(u) \, ; \, i \leq k) \overset{(\text{loi})}{=} (p_i^{\nu} T_i \, ; \, i \leq k)$$

(ii) *en conséquence*

$$(A_i(1)\ ;\ i \le k\ ;\ \ell_1^{\nu}) \overset{(\text{loi})}{=} \left[\frac{p_i^{\nu} T_i}{\sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j}\ ;\ i \le k\ ;\ \left(\sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j\right)^{-1}\right].$$

On obtient un résultat voisin pour le processus $W_k(\mu\ ;\ (p_i)_{i\le k})$ conditionné à être en 0 au temps 1. On appellera ce processus <u>pont de Walsh</u>.

A l'aide des propriétés de scaling, le pont de Walsh peut être réalisé de la manière suivante :

$$Y_u = \frac{1}{\sqrt{g}} X_{ug} \qquad (u \le 1)$$

où $g = \sup\{t \le 1 : X_t = 0\}$; en outre, il n'est pas difficile de montrer que Y et g sont indépendants.

Notons $U_i = \int_0^1 du\, 1_{(Y_u \in I_i)}$, et λ la valeur au temps 1 du temps local en 0 de Y, précisé par la formule :

$$\ell_1^{\nu} = g\lambda^{\nu} \tag{1.f}$$

(pour une justification de cette formule, voir le paragraphe 2, remarque(ii)).

On a alors le

Théorème 2 : *Soient* $(T_i\ ;\ i \le k)$ k *variables positives, stables, d'indice* μ, *indépendantes. Alors :*

i) Soit $f : \mathbb{R}_+^k \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *fonction borélienne. On a :*

$$E\left[f\left(\frac{U_i}{\lambda^{\nu}}\ ;\ i \le k\right)\right] = E\left[f(p_i^{\nu} T_i\ ;\ i \le k)\ \frac{\Gamma(1+\mu)}{\left(\sum_{i=1}^{k} p_i^{\nu} T_i\right)^{\mu}}\right]$$

ii) en conséquence, pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *borélienne, on a :*

$$E\left[f(U_i\ ;\ i \le k\ ;\ \frac{1}{\lambda^{\nu}})\right]$$
$$= E\left[f\left(\frac{p_i^{\nu} T_i}{\sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j}\ ;\ i \le k\ ;\ \sum_{j=1}^{k} p_j^{\nu} T_j\right)\ \frac{\Gamma(1+\mu)}{\left(\sum_{i=1}^{k} p_i^{\nu} T_i\right)^{\mu}}\right].$$

(1.4) Lorsque $\mu = 1/2$ (c'est-à-dire dans le cas "brownien"), la formule classique : $P(2T_i \in dt) = \frac{dt}{(2\pi t^3)^{1/2}} e^{-1/2t}$ permet, avec les théorèmes 1 et 2, d'expliciter complètement les lois de $(A_i(1)\ ;\ i \le k)$ et $(U_i\ ;\ i \le k)$. Ces calculs sont présentés au paragraphe 4.

Nous utilisons, au paragraphe 3, pour démontrer les théorèmes 1 et 2, la théorie des excursions. Des calculs voisins, s'appuyant également sur la théorie des excursions, permettent d'obtenir très simplement la transformée de Laplace (en t) de :

$$E\left[\exp - \left(\sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(t)\right)\right] \qquad (\xi_j \ge 0)$$

et donc de retrouver, au moins théoriquement, une partie des résultats du théorème 1. Ces compléments sont développés au paragraphe 4, dans lequel nous présentons également des résultats asymptotiques déduits des Théorèmes 1 et 2 dans le cas $p_i \equiv \frac{1}{k}$ $(i \le k)$, lorsque $k \longrightarrow \infty$.

Enfin, il a semblé nécessaire, pour la commodité du lecteur, de faire, au paragraphe 2, avant toute démonstration, quelques rappels sur les processus de Bessel de dimension $\delta \in (0,2)$.

(1.5) Les résultats qui figurent dans cet article représentent notre compréhension du sujet jusqu'en Septembre 1988, date à laquelle ils ont été exposés aux Journées de Probabilités de Barcelone. Depuis, nous avons obtenu des compléments importants aux Théorèmes 1 et 2, sous la forme d'identités en loi entre processus ou familles d'excursions. Ces nouveaux résultats, rassemblés en [15], feront l'objet d'une publication ultérieure.

2. Rappels sur les processus de Bessel.

Les résultats présentés dans ce paragraphe sont classiques ; le lecteur trouvera une discussion détaillée dans Kent [16] et Molchanov-Ostrovski [17], par exemple.

(2.1) Notons $(R_t, t \ge 0)$ le processus de Bessel de dimension $\delta = 2(1-\mu) \in (0,2)$, issu de 0, et admettant 0 pour barrière instantanément réfléchissante.

Cette diffusion, à valeurs dans $[0,\infty[$, admet pour fonction d'échelle

$s(x) = c/_{x^{\delta-2}} = c\ x^{2\mu}$, et pour mesure de vitesse $m(dx) = m'(x)dx$, où

$m'(x) = c' x^{\delta-1} = c' x^{1-2\mu}$, c' étant convenablement choisie en fonction de c.

Fixons provisoirement $\alpha > 0$; il existe une famille bicontinue

$(\ell_t^x\ ; x \geq 0, t \geq 0)$ de temps locaux de R, définie au moyen de la formule :

$$\text{(2.a)} \qquad \int_0^t ds\ f(R_s) = \alpha \int_0^\infty dx\ x^{\delta-1}\ \ell_t^x\ f(x)$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne.

Nous allons maintenant choisir α de façon à ce que les calculs que nous ferons dans les démonstrations des théorèmes 1 et 2 soient aussi simples que possible.

De la propriété de scaling, vérifiée par R :

pour $c > 0$, $(R_{ct}\ ;\ t \geq 0) \overset{(\text{loi})}{=} (\sqrt{c}\ R_t\ ;\ t \geq 0)$

on déduit l'identité :

$$(\ell_{ct}^x\ ;\ x \geq 0, t \geq 0) \overset{(\text{loi})}{=} \left[c^\mu\ \ell_t^{x/\sqrt{c}}\ ;\ x \geq 0, t \geq 0\right].$$

En particulier, en notant simplement ℓ_t pour ℓ_t^0 , on a :

$$\text{(2.b)} \qquad (\ell_{ct}\ ;\ t \geq 0) \overset{(\text{loi})}{=} (c^\mu\ \ell_t\ ;\ t \geq 0)$$

dont on déduit, pour le processus $\tau(t) \equiv \inf\{u : \ell_u > t\}$ la propriété de scaling :

$$\text{(2.c)} \qquad (\tau(t)\ ;\ t \geq 0) \overset{(\text{loi})}{=} (c\tau(t/_{c^\mu})\ ;\ t \geq 0).$$

En conséquence, le processus $(\tau(t), t \geq 0)$, qui est à accroissements indépendants, est un processus stable, unilatéral, d'indice μ, c'est-à-dire qu'il existe une constante γ, dépendant de α, telle que :

$$E[\exp - \xi\tau(t)] = \exp - t\gamma\xi^\mu \qquad (\xi \geq 0).$$

Pour simplifier les calculs qui suivent, nous prenons $\gamma = 1$, et la détermination correspondante de α, constante que nous notons α_μ , maintenant fixée une fois pour toutes.

Pour être tout à fait précis, explicitons α_μ :

- de l'égalité : $E\left[\int_0^\infty dt\ e^{-\xi\tau(t)}\right] = E\left[\int_0^\infty d\ell_s\ e^{-\xi s}\right]$,

et de la propriété de scaling (2.b), on déduit :

$$\beta_\mu \equiv E[\ell_1] = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)}$$

- d'autre part, d'après (2.a) et la propriété de scaling vérifiée par R, on a :

$$\alpha_\mu \beta_\mu x^{\delta-1} \underset{x\to 0}{\sim} 2 \int_0^1 du\ p_1(0;\frac{x}{u})$$

où $p_1(0;y) = \dfrac{2}{2^{\delta/2}\ \Gamma(\frac{\delta}{2})}\ y^{\delta-1} \exp(-\frac{y^2}{2})$

est la valeur du semi-groupe de R, issu de 0, pris au temps 1.

Finalement, on obtient : $\alpha_\mu = \dfrac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(1-\mu)}\ 2^\mu$.

(2.2) Terminons ce paragraphe par deux remarques :

(i) on déduit des propriétés de scaling (2.b) et (2.c) l'identité :

(2.d) $$\tau(1) \overset{(\text{loi})}{=} \ell_1^{-\nu}.$$

Cette identité (2.d) est bien en accord avec le résultat suivant tiré du théorème 1, (ii)

(2.e) $$\ell_1^{-\nu} \overset{(\text{loi})}{=} \sum_{j=1}^{k} p_j^\nu T_j$$

puisque le membre de droite de (2.e) a même loi que T_j, pour j donné.

(ii) L'égalité (1.f) $\ell_1^\nu = g\ \lambda^\nu$ provient de ce que, de même qu'en (2.a), on définit la famille continue $(\lambda^x\ ;\ x \ge 0)$ au moyen de la formule :

$$\int_0^1 ds\ f(Y_s) = \alpha_\mu \int_0^\infty dx\ x^{\delta-1}\ \lambda^x f(x)$$

valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, borélienne.

(1.f) découle alors de la définition de $Y_u = \dfrac{1}{\sqrt{g}}\ X_{ug}$ $\quad (u \le 1)$.

3. **Démonstration des théorèmes 1 et 2 :**

(3.1) Les assertions (ii) des théorèmes 1 et 2 découlent immédiatement des assertions (i).

(3.2) Pour prouver l'assertion (i) du théorème 1, il suffit, grâce à la propriété de scaling, de montrer que, si S est un temps exponentiel indépendant de X, de paramètre 1, on a :

$$\frac{1}{\ell_S^{\nu}}\,(A_i(S)\ ;\ i \le k) \overset{(\text{loi})}{=} (p_i^{\nu} T_i, i \le k),$$

ce qui équivaut à prouver :

$$\text{(3.a)} \qquad E\left[\exp - \frac{A(S)}{\ell_S^{\nu}}\right] = \exp - \left(\sum_{i=1}^{k} p_i \xi_i^{\mu}\right)$$

où $A(t) = \sum_{i=1}^{k} \xi_i A_i(t) \qquad (\xi_i \ge 0)$.

Or, on a :

$$E\left[\exp - \frac{A(S)}{\ell_S^{\nu}}\right] = E\left[\int_0^{\infty} du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{\ell_u^{\nu}}\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{s>0} \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{s^{\nu}}\right)\right]$$

$$= E\left[\sum_{s>0} \exp - \left(\tau_{s-} + \frac{A(\tau_{s-})}{s^{\nu}}\right)\left(\int_0^{V} du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{s^{\nu}}\right) o\ \theta_{\tau_{s-}}\right)\right]$$

$$\underset{(3.b)}{=} E\left[\int_0^{\infty} ds \exp - \left(\tau_s + \frac{A(\tau_s)}{s^{\nu}}\right)\right] \int n(de) \int_0^{V} du \exp - \left(u + \frac{A(u)}{s^{\nu}}\right).$$

Or, on a, en posant $\tau_s^i = \int_0^{\tau_s} du\, 1_{I_i}(X_u)$:

$$E\left[\exp - (\tau_s + \frac{A(\tau_s)}{s^{\nu}})\right] = \prod_{i=1}^{k} E\left[\exp - \left(1 + \frac{\xi_i}{s^{\nu}}\right)\tau_s^i\right]$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \exp - s p_i \left(1 + \frac{\xi_i}{s^{\nu}}\right)^{\mu}$$

$$= \exp - \left[\sum_{i=1}^{k} p_i (s^\nu + \xi_i)^\mu\right] \equiv \exp - \varphi(s).$$

D'autre part, on a :

$$\int n(de) \int_0^V du \exp - \left[u + \frac{A(u)}{s^\nu}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \int n_i(de) \int_0^V du \exp - \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right] u$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \frac{1}{\left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right]} \int n_i(de) \left[1 - \exp - \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right] V\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} p_i \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right]^{\mu-1} = \left[\sum_{i=1}^{k} p_i (s^\nu + \xi_i)^{\mu-1}\right] s^{\nu-1} \equiv \varphi'(s).$$

On a donc finalement, d'après (3.b) :

$$E\left[\exp - \frac{A(S)}{\ell_S^\nu}\right] = \int_0^\infty ds \exp(-\varphi(s))\varphi'(s) = \exp - \varphi(0) = \exp - \sum_{i=1}^{k} p_i \xi_i^\mu,$$

c'est-à-dire (3.a).

(3.3) Pour prouver l'assertion (i) du théorème 2, il suffit de montrer, avec les notations déjà utilisées en (3.2), l'identité suivante :

$$\text{(3.c)} \qquad E\left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu}\right] = E\left[\exp\left(- \sum_{i=1}^{k} \xi_i p_i^\nu T_i\right) \frac{\Gamma(1+\mu)}{\left[\sum_{i=1}^{k} p_i^\nu T_i\right]^\mu}\right].$$

Or, en reprenant les mêmes arguments que ci-dessus, il vient :

$$E\left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu}\right] = E\left[\int_0^\infty du \exp - \left[u + \frac{A(g_u)}{\ell_u^\nu}\right]\right]$$

$$= E\left[\sum_s \int_{\tau_{s-}}^{\tau_s} du \exp - \left[u + \frac{A(\tau_{s-})}{s^\nu}\right]\right]$$

$$= \int_0^\infty ds \exp - s \sum_{i=1}^{k} p_i \left[1 + \frac{\xi_i}{s^\nu}\right]^\mu$$

$$= \int_0^\infty ds \exp - \sum_{i=1}^k p_i (s^\nu + \xi_i)^\mu .$$

Introduisons maintenant les variables T_i ; il vient :

$$E\left[\exp - \frac{A(g_S)}{\ell_S^\nu}\right] = \int_0^\infty ds \prod_{i=1}^k E[\exp - p_i^\nu (s^\nu + \xi_i) T_i]$$

d'où l'on déduit, sans difficulté, la formule (3.c).

4. Résultats complémentaires sur les lois décrites dans les Théorèmes 1 et 2.

(4.1) Le cas brownien $\mu = 1/2$.

Dans ce cas, on déduit de la formule :

$$P(2T_i \in dt) = \frac{dt}{(2\pi t^3)^{1/2}} e^{-1/2t}$$

($2T_i$ est le premier temps d'atteinte de 1 par un mouvement brownien réel issu de 0) et des théorèmes 1 et 2 les résultats explicites suivants.

Théorème 3 : *Soit* f, *fonction borélienne, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$, *définie sur le simplexe* $\Sigma_k = \{(u_1, \dots, u_k) : u_i \geq 0, \sum_{i=1}^k u_i = 1\}$. *On a alors :*

$$E[f(A_i(1) \; ; \; i \leq k)] = c_k \int_{\Sigma_k} du_1 \dots du_{k-1} \prod_{i=1}^k \left(\frac{p_i}{u_i^{3/2}}\right) \frac{f(u_1, \dots, u_k)}{\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i^2}{u_i}\right)^{k/2}}$$

$$E[f(U_i \; ; \; i \leq k)] = d_k \int_{\Sigma_k} du_1 \dots du_{k-1} \prod_{i=1}^k \left(\frac{p_i}{u_i^{3/2}}\right) \frac{f(u_1, \dots u_k)}{\left(\sum_{i=1}^k \frac{p_i^2}{u_i}\right)^{\frac{k+1}{2}}}$$

avec $c_k = \Gamma(\frac{k}{2})/\pi^{k/2}$ *et* $d_k = \Gamma(\frac{k+1}{2})/\pi^{k/2}$.

En particulier, pour $k = 2$, *on a (en posant* $p = p_1$ *et* $q = p_2$*) :*

$$E[f(A_1(1))] = \frac{1}{\pi} \int_0^1 du \, f(u) \frac{pq}{p^2(1-u)+q^2 u} \frac{1}{(u(1-u))^{1/2}}$$

$$E[f(U_1)] = \frac{1}{2}\int_0^1 du\, f(u)\, \frac{pq}{(p^2(1-u)+q^2u)^{3/2}}.$$

<u>Remarque</u> : On retrouve bien les résultats de Paul Lévy dans le cas $p = q = 1/_2$, c'est-à-dire que $A_1(1)$ suit la loi de l'arc sinus, et U_1 la loi uniforme sur $[0,1]$. □

Nous donnons maintenant une description, de nature moins calculatoire, de la loi du vecteur $((A_i(1), i \le k) ; \ell_1^2)$.

Proposition 1 : *Soient* $\underline{x}_k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ *variable aléatoire distribuée uniformément sur la sphère unité de* $\mathbb{R}^k$, *et* $Z_{k/2}$ *une variable aléatoire indépendante, suivant la loi gamma de paramètre* $\frac{k}{2}$, *c'est-à-dire :*

$$P(Z_{k/2} \in dr) = r^{\frac{k}{2}-1} e^{-r}\, dr/\Gamma(\tfrac{k}{2}).$$

Alors :

1) $$((A_i(1), i \le k) ; \tfrac{1}{2}\ell_1^2) \overset{(\text{loi})}{=} \left[\frac{(p_i/x_i)^2}{\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2},\ i \le k \ ; \ \frac{2Z_{k/2}}{\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2}\right]$$

2) En conséquence :

i) $$\left[\sum_{j=1}^k p_j^2/A_j(1)\right]^{-1} \overset{(\text{loi})}{=} \left[\sum_{j=1}^k (p_j/x_j)^2\right]^{-1}$$

et ces deux variables, à valeurs dans $[0,1]$, *suivent la loi* $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$, *c'est-à-dire :*

$$\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{k-1}{2})}\, t^{-1/2}(1-t)^{\frac{k-3}{2}}\, dt$$

ii) $$(x_i^2 \ ; \ i \le k) \overset{(\text{loi})}{=} \left[\frac{p_i^2/A_i(1)}{\sum_{j=1}^k p_j^2/A_j(1)} \ ; \ i \le k\right]$$

iii) Conditionnellement à $(A_i(1) = a_i \ ; \ i \le k), \frac{1}{2}\ell_1^2$ *a même loi que*

$$(2a_*)\, Z_{k/2}, \quad \textit{où} \quad a_* = \left[\sum_{j=1}^k p_j^2/a_j\right]^{-1}.$$

<u>Démonstration</u> : 1) La première assertion découle du Théorème 1 et des deux remarques suivantes :

- d'une part, $(2T_i \ ; \ i \le k) \overset{(\text{loi})}{=} (1/_{N_i^2} \ ; \ i \le k)$

où $\underline{N}_k \overset{\text{def}}{=} (N_i \ ; \ i \leq k)$ est un vecteur aléatoire constitué de k variables gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes ;

- d'autre part, on a : $\underline{N}_k = |\underline{N}_k| \underline{x}_k$; les variables $|\underline{N}_k| = \left[\sum_{i=1}^{k} N_i^2\right]^{1/2}$ et $\underline{x}_k$ sont indépendantes ; $\underline{x}_k$ est distribuée uniformément sur la sphère unité de $\mathbb{R}^k$, et : $|\underline{N}_k|^2 \overset{(\text{loi})}{=} 2Z_{k/2}$.

2) Si l'on pose $y_i = \dfrac{p_i^2/x_i^2}{\sum_{j=1}^{k} (p_j/x_j)^2}$, il est immédiat que :

$$\sum_{i=1}^{k} p_i^2/y_i = \sum_{j=1}^{k} (p_j/x_j)^2 ,$$

et donc : $x_i^2 = \dfrac{p_i^2/y_i}{\sum_{j=1}^{k} p_j^2/y_j}$; cette remarque entraîne les égalités en loi qui figurent en i) et ii), ainsi que iii).

3) Il reste à montrer que la variable $H = \left[\sum_{j=1}^{k} (p_j/x_j)^2\right]^{-1}$ suit la loi $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$.

(Le fait que H prenne ses valeurs dans $[0,1]$ découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; en effet :

$$1 = \sum_{i=1}^{k} p_i \left[\frac{\sqrt{p_i}}{|x_i|}\right] \left[\frac{|x_i|}{\sqrt{p_i}}\right] \leq H^{-1/2} (\Sigma x_i^2)^{1/2} = H^{-1/2}).$$

Remarquons que, d'après 1), $\frac{1}{2} \ell_1^2 \overset{(\text{loi})}{=} 2Z_{k/2} H$, les variables $Z_{k/2}$ et H étant indépendantes.

Or, il est bien connu que $\frac{1}{2} \ell_1^2 \overset{(\text{loi})}{=} N_1^2 \overset{(\text{loi})}{=} 2Z_{1/2}$, où $Z_{1/2}$ suit la loi gamma de paramètre $1/_2$. En conséquence, les moments de H sont ceux d'une variable distribuée suivant $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$, d'où le résultat. □

<u>Remarques</u> : 1) On peut noter que le Théorème 1 et la Proposition 1 jouent des rôles inverses l'un de l'autre : dans le Théorème 1, c'est la division par ℓ_1^ν qui permet d'obtenir de façon simple la loi du vecteur $(A_i(1), i \leq k)$, alors que dans la Proposition 1, on obtient la loi de ℓ_1^2, conditionnellement à $(A_i(1), i \leq k)$.

2) Au passage, nous avons identifié la loi de $H = \left[\sum_{j=1}^{k} (p_i/x_j)^2\right]^{-1}$ comme étant $\beta(\frac{1}{2}, \frac{k-1}{2})$; en particulier, cette loi ne dépend pas de la probabilité $(p_i)_{i \le k}$.

Bien entendu, ce résultat peut être obtenu en dehors de toute considération brownienne, et repose essentiellement sur les faits bien connus suivants: d'une part, si $T_1, \dots, T_n$ sont n variables stables, d'indice $1/2$, indépendantes, $T = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 T_i$ est également stable d'indice $1/2$, et, d'autre part, $2T \overset{(\text{loi})}{=} 1/N^2$, où N est une variable gaussienne, centrée, réduite.

(4.2) Transformées de Laplace.

Considérons à nouveau l'énoncé du théorème 1. L'idée de diviser le vecteur $(A_i(u)\ ;\ i \le k)$ par ℓ_u^{ν}, de façon à obtenir un résultat simple, nous est venue tout à la fin de notre étude. Auparavant, nous avions simplement procédé par transformation de Laplace, et obtenu les résultats suivants, qui conservent néanmoins leur intérêt.

Théorème 4 : *Soient* $\alpha > 0$ *et* $\xi_j \ge 0$ $(1 \le j \le k)$. *Alors :*

$$(4.a) \qquad E\left[\int_0^{\infty} dt \exp - \left(\alpha t + \sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(t)\right)\right] = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}}$$

$$(4.b) \qquad E\left[\int_0^{\infty} dt \exp - \left(\alpha t + \sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(g_t)\right)\right] = \frac{\alpha^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}}.$$

Faisons quelques commentaires, avant de démontrer le théorème 4 :

a) Prenons, dans la formule (4.b), $\xi_j = \xi$ pour tout $j \le k$. On obtient alors, en choisissant de plus $\alpha = 1$:

$$E\left[\int_0^{\infty} dt \exp - (t + \xi g_t)\right] = (1+\xi)^{-\mu}.$$

Si l'on note $g_\mu \equiv g(1) = \sup\{s \le 1 : X_s = 0\}$, et S une variable exponentielle de paramètre 1, indépendante de g_μ, on peut réécrire, à l'aide de la propriété de scaling, l'identité précédente sous la forme :

(4.c) $\quad E[\exp - \xi S g_\mu] = (1+\xi)^{-\mu} = E[\exp - \xi\gamma_\mu],$

où $\quad P(\gamma_\mu \in dt) = \frac{dt}{\Gamma(\mu)} e^{-t}\, t^{\mu-1}.$

Or, d'après les résultats classiques sur l'algèbre des variables béta et gamma, on a :

(4.d) $$\gamma_\mu \overset{(\text{loi})}{=} Z_{\mu,1-\mu}\cdot S$$

où, dans le membre de droite, $Z_{\mu,1-\mu}$ est une variable $\beta(\mu,1-\mu)$, c'est-à-dire :

$$P(Z_{\mu,1-\mu} \in dt) = \frac{\sin(\pi\mu)}{\pi}\, dt\; t^{\mu-1}(1-t)^{-\mu}$$

indépendante de S.

On déduit maintenant des relations (4.c) et (4.d) l'identité :

(4.e) $$g_\mu \overset{(\text{loi})}{=} Z_{\mu,1-\mu}$$

(le cas particulier $\mu = 1/_2$ donne bien sûr le résultat (1.a) pour g, dû à Paul Lévy ; le résultat (4.e) dans le cas général est dû à Dynkin [18]).

b) La loi de g_μ ayant été déterminée, nous allons appliquer la propriété de scaling pour transformer les membres de gauche de (4.a) et (4.b).

i) Tout d'abord, comme $(A_j(t)\ ;\ j \le k) \overset{(\text{loi})}{=} (tA_j(1)\ ;\ j \le k)$, on a :

(4.a') $$E\left[\left(\alpha + \sum_{j=1}^{k} \xi_j A_j(1)\right)^{-1}\right] = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}}$$

ii) D'autre part, on a, pour t fixé :

$$(A_j(g_t), j \le k) \overset{(\text{loi})}{=} t g_\mu (U_j\ ;\ j \le k)$$

la variable g_μ étant indépendante du vecteur $(U_j, j \le k)$.

On déduit alors de (4.c) l'identité :

$$E\left[\exp - \left(\sum_{j=1}^{k} \xi_j U_j\right)\gamma_\mu\right] = \left(\sum_{j=1}^{k} p_j(1+\xi_j)^{\mu}\right)^{-1},$$

la variable γ_μ étant indépendante du vecteur $(U_j, j \le k)$.

En utilisant à nouveau (4.c), on remarque que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est égal à :

$$E\left[\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \xi_j U_j\right)^{-\mu}\right]$$

et, finalement, en remplaçant ξ_j par ξ_j/α, on obtient :

$$(4.b') \qquad E\left[\left(\alpha + \sum_{j=1}^{k} \xi_j U_j\right)^{-\mu}\right] = \left(\sum_{j=1}^{k} p_j(\alpha+\xi_j)^{\mu}\right)^{-1}.$$

c) Lorsque l'on compare le théorème 1, resp : 2, à l'identité (4.a'), resp : (4.b'), la question suivante se pose naturellement : l'identité (4.a') (par exemple) détermine uniquement - même si l'on considère seulement $\alpha = 1$ - la loi du vecteur $(A_j(1), j \le k)$.

Peut-on montrer directement (et simplement...) que cette loi est celle de

$$\left(\frac{p_j^{\nu} T_j}{\sum_{i=1}^{k} p_i^{\nu} T_i} \; ; \; j \le k\right)$$

comme cela est démontré dans le théorème 1 ?

Nous allons voir qu'il en est bien ainsi.

En effet, en posant $a_j = p_j^{\nu}$ et $b_j = p_j^{\nu}(1+\xi_j)$, cette question se ramène aisément à la démonstration de l'identité :

$$(4.f) \qquad E\left[\frac{\sum_{j=1}^{k} a_j T_j}{\sum_{j=1}^{k} b_j T_j}\right] = \frac{\sum_{j=1}^{k} a_j b_j^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}}$$

identité valable pour tout k-uple $(a_j, b_j)_{j\le k}$ de couples (a_j, b_j) tels que : $0 \le a_j \le b_j$.

<u>Remarque</u> : A priori, on ne connaissait la validité de l'identité (4.f) que pour des réels positifs $a_j (\equiv p_j^{\nu})$ satisfaisant la condition :

$\sum_{j=1}^{k} a_j^{\mu} = 1$, mais, quitte à remplacer a_j par a_j/α et b_j par b_j/α, où

$\alpha^{\mu} = \sum_{j=1}^{k} a_j^{\mu}$, on voit que l'égalité (4.f) est toujours valable sous la seule

condition : $0 \leq a_j \leq b_j$.

Démonstration de (4.f) : Posons

$$T_{(a)} = \sum_{j=1}^{k} a_j T_j \ , \ T_{(b)} = \sum_{j=1}^{k} b_j T_j,$$

$$\varphi(s,t)=E[\exp-(sT_{(a)}+tT_{(b)})] \ ; \ \psi(t) = -\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \varphi(s,t) = E[T_{(a)}\exp-tT_{(b)}].$$

On a alors : $E\left[\frac{T_{(a)}}{T_{(b)}}\right] = \int_0^{\infty} dt\ \psi(t).$

Or, comme :

$$\varphi(s,t) = \exp - \sum_{j=1}^{k} (sa_j + tb_j)^{\mu} \ ,$$

on a :

$$\psi(t) = \exp\left[-t^{\mu} \sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}\right] \sum_{j=1}^{k} \mu a_j t^{\mu-1} b_j^{\mu-1}$$

$$= \mu t^{\mu-1}\left\{\exp - t^{\mu}\left[\sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}\right]\right\}\left[\sum_{j=1}^{k} a_j b_j^{\mu-1}\right].$$

On en déduit :

$$E\left[\frac{T_{(a)}}{T_{(b)}}\right] = \int_0^{\infty} dt\ \psi(t) = \frac{\sum_{j=1}^{k} a_j b_j^{\mu-1}}{\sum_{j=1}^{k} b_j^{\mu}}, \text{ c'est-à-dire (4.f).} \qquad \square$$

Nous donnons maintenant une démonstration du théorème 4, indépendante des résultats obtenus dans le sous-paragraphe c) ci-dessus. Celle-ci repose uniquement sur le lemme suivant (classique en théorie des excursions), dont la démonstration utilise les arguments du paragraphe 3 (aussi, nous ne donnons pas les détails de cette démonstration).

Lemme : *Soit* $(X_t)_{t\geq 0}$ *processus de Markov à trajectoires continues, admettant* 0 *pour point régulier pour lui-même, et* $n(de)$ *une détermination de la* *mesure caractéristique des excursions de* X *hors de* 0.

Notons $g_t = \sup\{s \le t : X_s = 0\}$.

Soit $(A_t, t \ge 0)$ *fonctionnelle additive continue, croissante, de* X, *telle que, p.s.,* dA_s *ne charge pas* $\{s : X_s = 0\}$. *On a alors les formules :*

$$(4.g) \qquad E\left[\int_0^\infty dt \exp - (\alpha t + A_t)\right] = \frac{\int n(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha t + A_t)}{\int n(de)\ (1 - \exp - (\alpha V + A_V))}$$

$$(4.h) \qquad E\left[\int_0^\infty dt \exp - (\alpha t + A_{g_t})\right] = \frac{\int n(de)\ (1 - e^{\alpha V})}{\int n(de) \left[1 - e^{-\alpha V - A_V}\right]}$$

où V *désigne la durée de vie de l'excursion générique* $(e(u), u \le V)$.

Pour démontrer le théorème 4, il suffit d'appliquer le lemme à la fonctionnelle $A_t = \sum_{j=1}^k \xi_j A_j(t)$. Alors, si l'on note n_μ une détermination, fixée une fois pour toutes, de la mesure des excursions hors de 0 du processus de Bessel de dimension $\delta = 2(1-\mu)$, on a, par exemple :

$$\begin{aligned}
\int n(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha t + A_t) &= \sum_{j=1}^k p_j \int n_\mu(de) \int_0^V dt \exp - (\alpha + \xi_j)t \\
&= \sum_{j=1}^k p_j \frac{1}{(\alpha+\xi_j)} \int n_\mu(de) \left[1 - e^{-(\alpha+\xi_j)V}\right] \\
&= c_\mu \sum_{j=1}^k p_j (\alpha+\xi_j)^{\mu-1},
\end{aligned}$$

pour une certaine constante c_μ.

Les formules (4.a) et (4.b) découlent alors aisément de ce type de calculs.

(4.3) <u>Un résultat asymptotique</u>.

Nous considérons maintenant uniquement le processus de Walsh $W_k(\mu\ ;\ (p_i)_{i \le k})$ et le pont de Walsh correspondant, lorsque la probabilité $(p_i\ ;\ i \le k)$ est uniforme, c'est-à-dire : $p_i \equiv \frac{1}{k}\ (i \le k)$, et nous déduisons des Théorèmes 1 et 2 le résultat asymptotique suivant, lorsque $k \longrightarrow \infty$.

Théorème 5 : *Soit* p *entier fixé, et* $\{(T_i\ ;\ i \le p)\ ;\ T_*\}$ *un ensemble de* (p+1) *variables positives stables, d'indice* μ, *indépendantes. Alors :*

(i) $\{(k^{\nu} A_i(1)\ ;\ i \le p)\ ;\ \ell_1^{\nu}\} \xrightarrow[k\to\infty]{(\text{loi})} \left\{\frac{T_i}{T_*}\ (i \le p)\ ;\ \frac{1}{T_*}\right\}$

(ii) pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+^{p+1} \longrightarrow \mathbb{R}$, *continue, bornée,*

$$E\left[f((k^{\nu} U_i(1)\ ;\ i \le p)\ ;\ \lambda_1^{\nu})\right] \xrightarrow[k\to\infty]{} E\left[f\left((\frac{T_i}{T_*}\ ;\ i \le p)\ ;\ \frac{1}{T_*}\right) \frac{\Gamma(1+\mu)}{T_*^{\mu}}\right]$$

Démonstration : Ces deux assertions découlent des Théorèmes 1 et 2 lorsque l'on a remarqué que le vecteur :

$$\left[(T_i\ ;\ i \le p)\ ;\ \frac{1}{k^{\nu}} \left[\sum_{j=1}^{k} T_j\right]\right] \tag{4.i}$$

converge en loi vers : $((T_i\ ;\ i \le p)\ ;\ T_*)$;

en d'autres termes : lorsque $k \longrightarrow \infty$, la variable : $\frac{1}{k^{\nu}} \left[\sum_{j=1}^{k} T_j\right]$ est asymptotiquement indépendante de $(T_i\ ;\ i \le p)$, résultat qui découle, par exemple, de la convergence de la transformée de Laplace du vecteur (4.i) vers le produit des transformées de Laplace des (p+1) variables $(T_i)_{i\le p}$ et T_*.

Remarque : Le théorème 5 est à rapprocher du lemme de Poincaré selon lequel, si $\underline{x}_k = (x_k^{(1)},\dots,x_k^{(k)})$ est une variable uniformément distribuée sur la sphère unité de $\mathbb{R}^k$, alors pour $p \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\sqrt{k}(x_k^{(1)},\dots,x_k^{(p)}) \xrightarrow[(k\to\infty)]{(\text{loi})} (N_1,\dots,N_p),$$

les variables N_i, $i \le p$, étant gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes.

A cet effet, remarquons que l'on déduit du Théorème 1 et de la loi des grands nombres que :

$$\frac{\ell_1^{\nu}}{k^{\nu+1}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{A_i(1)} \overset{(\text{loi})}{=} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{T_i} \xrightarrow{(P)} E(\frac{1}{T_1}) = \Gamma(\nu+1).$$

En conséquence, on peut réécrire l'assertion (i) du Théorème 5 sous la forme :

$$(4.j)\qquad \left\{\left[\frac{1/k^{\nu}A_i(1)}{\sum_{j=1}^{k} 1/k^{\nu}A_j(1)}\ ,\ i \le p\right]\ ;\ \frac{1}{k^{\nu+1}}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{A_j(1)}\right\}$$

converge en loi, lorsque $k \longrightarrow \infty$, vers :

$$(4.k)\qquad \left\{\left[\frac{1}{T_i\Gamma(\nu+1)}\ ;\ i \le p\right]\ ;\ T_* \,\Gamma(\nu+1)\right\}.$$

Or, d'après la proposition 1, dans le cas brownien $(\nu = 2)$, le terme qui figure à gauche en (4.j) a même loi que :

$$k\left[(x_k^{(1)})^2,\dots,(x_k^{(p)})^2\right]$$

alors que le terme correspondant en (4.k) a même loi que :

$$(N_i^2, i \le p).$$

La relation avec le lemme de Poincaré est donc établie.

REFERENCES

[1] J.K. Brooks, R.V. Chacon : Diffusions as a limit of stretched Brownian motions. Adv. in Maths, vol. 49, n° 2, **109-122** (1983).

[2] J. Franchi : Produit semi-direct de diffusions réelles et lois asymptotiques. A paraître au Journal of App. Proba. (1989)

[3] J.M. Harrison, L.A. Shepp : On skew brownian motion. Ann. Proba. 9, **309-313** (1981).

[4] K. Itô, H.P. Mc Kean : Diffusion processes and their sample paths. Springer (1965).

[5] I. Karatzas, S.E. Shreve : Brownian motion and stochastic calculus. Springer (1987).

[6] J.F. Le Gall : One-dimensional stochastic differential equations involving the local times of the unknown process. In : Stochastic Analysis and Applications (eds. A. Truman, D. Williams). Lect. Notes in Maths 1095. Springer (1984).

[7] J.W. Pitman, M. Yor : Asymptotic laws of planar Brownian motion. Ann. Probas. 14, **733-779** (1986).

[8] L.C.G. Rogers, D. Williams : Diffusions, Markov processes and Martingales. Vol. 2 : Itô Calculus. J. Wiley (1987).

[9] W. Rosenkrantz : Limit theorems for solutions to a class of stochastic differential equations. Indiana Math. J. 24, 613-625 (1975).

[10] J.B. Walsh : A diffusion with discontinuous local time. Astérisque 52-53, **37-45** (1978).

[11a] P. Lévy : Sur un problème de M. Marcinkiewicz. C.R.A.S. 208 (1939), p. **318-321**. Errata p. **776**.

[11b] P. Lévy : Sur certains processus stochastiques homogènes. Compositio Math., t. 7, 1939, p. 283-339.

[12] D. Williams : Markov properties of Brownian local time. Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1035-1036 (1969).

[13] M. Kac : On some connections between probability theory and differential and integral equations. Proc. 2nd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probability, **189-215** (1951), University of California Press.

[14] M.T. Barlow, J.W. Pitman, M. Yor : On Walsh's Brownian Motions. Dans ce volume.

[15] M.T. Barlow, J.W. Pitman, M. Yor : Some extensions of the arc sine law. Technical Report n° 189. Department of Statistics, U.C. Berkeley (1989).

[16] J. Kent : Some probabilistic properties of Bessel functions. Ann. Prob. 6, **760-770** (1978).

[17] S.A. Molchanov, E. Ostrovski : Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes. Theory of Proba. and its App., vol. XIV, n° 1, **128-131** (1969).

[18] E.B. Dynkin : Some limit theorems for sums of independent random variables with infinite mathematical expectations. Selected Transl. in Math. Stat. and Probability, vol. 1, 1961, IMS-AMS, p. **171-189** (1961).