SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ZINSMEISTER

Les dérivations analytiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 21-46

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__21_0>

LES DÉRIVATIONS ANALYTIQUES

par M. Zinsmeister

AVERTISSEMENT de C. Dellacherie

Cet exposé de Zinsmeister, spécialiste de géométrie conforme, est la rédaction, faite à la demande de Kahane, président de son jury de thèse, de sa seconde thèse dont j'avais proposé le sujet. C'est, pour reprendre les mots d'une introduction antérieure de l'auteur[1], une présentation par un profane, et pour un profane, de la théorie des dérivations analytiques, avec des exemples concrets d'application en analyse réelle, en analyse fonctionnelle et en théorie du potentiel. Le tout, articulé autour d'un théorème de Moschovakis, un des théorèmes les plus récents mais aussi un des plus puissants de la théorie, vient couronner en quelque sorte les divers exposés du séminaire portant sur des constructions par récurrence transfinie (Dellacherie-Meyer, vol.9 p.373 ; Dellacherie, vol.11 p.34 ; Hillard, vol.12, p.524 ; Dellacherie, vol.12, p.746).

Après une introduction teintée d'histoire à la notion d'ensemble analytique, Zinsmeister introduit un outil fondamental, la notion d'arbre (dont un avatar est celle de temps d'arrêt dans l'exposé de Dellacherie-Meyer, vol.9). Puis vient l'énoncé du théorème de Moschovakis illustré par l'étude de la dérivation de Cantor abstraite (Dellacherie, vol.11) ou classique, qui mène à la démonstration de Bourgain du théorème de Szlenk sur la non-existence d'un Banach à dual séparable universel. Ensuite, Zinsmeister déduit du théorème de Moschovakis un théorème plus ancien appelé par moi (Dellacherie, vol.11) théorème de Kunen-Martin[2], et, de ce dernier, une forme générale du théorème de la borne ; cela est illustré par des résultats récents sur les ensembles d'unicité pour les séries trigonométriques.

---

[1] qui y remerciait aussi son directeur, lequel l'en remercie ici : le plaisir fut partagé

[2] malgré la protestation de ces derniers, qui ont démontré un théorème plus général dont le cas particulier ici envisagé est pour eux un résultat appartenant au folklore classique

Enfin, Zinsmeister présente une démonstration du théorème de Moschovakis, et donne un exemple de son utilisation en théorie du potentiel.

Avec un tel programme, on ne peut s'attendre à avoir toujours des démonstrations complètes. Cependant, Zinsmeister a tenu la gageure de faire un exposé vivant, intéressant l'analyste, et lui donnant une bonne idée de la théorie tout en lui donnant l'occasion d'apprendre des outils qui peuvent se révèler puissants dans sa spécialité.

Il est temps maintenant de donner voix au conférencier.

1. INTRODUCTION

La théorie des ensembles analytiques, initiée par Lusin et Souslin en 1917, a connu un grand développement entre les deux guerres grâce aux mathématiciens russes, polonais, et japonais. Il a fallu cependant attendre les travaux de Choquet sur les capacités (1959) pour que cette théorie soit utilisée de manière fondamentale en analyse et en probabilités. Au même moment, les logiciens, à partir d'une synthèse des travaux de Kleene en théorie de la récursivité et de la théorie - désormais appelée classique - des ensembles analytiques, se mirent à enrichir considérablement cette dernière. Nous allons présenter ici un aspect de cet enrichissement, illustré d'un bon nombre d'applications à l'analyse, tout en rappelant les grandes lignes de la théorie classique ; Louveau [L] nous permettra de rester au sein de celle-ci, sans avoir à faire appel à la théorie de la récursivité (au prix d'un affaiblissement des énoncés des logiciens).

Le point de départ de la théorie des ensembles analytiques est la célèbre erreur de Lebesgue qui affirmait, au détour de l'un de ses travaux (1905), que la projection d'un borélien de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}$ est encore un borélien alors que déjà la projection d'un $\mathcal{G}_\delta$ (i.e. une intersection dénombrable d'ouverts) n'est en général pas borélienne mais seulement "analytique". Voyons les choses plus en détail : soit X un espace polonais, i.e. un espace métrisable séparable que l'on peut munir d'une distance compatible pour laquelle il soit complet (les espaces polonais, qui incluent les espaces localement compacts à base dénombrable - en abrégé, LCD -, sont les espaces "ambiants naturels" de la théorie classique ; noter que, contrairement aux espaces LCD, un produit dénombrable d'espaces polonais est toujours polonais). La classe $\mathcal{B}(X)$ des boréliens de X est la plus petite classe de parties de X contenant les ouverts et qui soit stable par réunion dénombrable et complémentation, ou encore, ce qui revient au même, les fermés étant des $\mathcal{G}_\delta$, la plus petite classe de parties de X contenant les ouverts et stable par réunion et intersection dénombrables. La classe $\mathcal{B}$ des boréliens, pour X variable, est stable par image inverse par application borélienne entre espaces polonais (par définition d'une telle application), mais n'est pas stable par image directe par application même continue. Une partie de X sera dite *analytique* si elle est image directe, par une application borélienne, d'un borélien d'un espace polonais. On note, suivant les logiciens, $\Sigma_1^1(X)$ la classe des parties analytiques, et Σ_1^1 la classe obtenue en faisant varier X. On montre que Σ_1^1 est stable par image directe ou inverse par application borélienne et que $\Sigma_1^1(X)$ est stable par réunion et intersection dénombrables, mais pas par complémentation. Nous noterons Π_1^1 la classe des ensembles *coanalytiques*, i.e. des complémentaires d'analytiques. Evidemment, la classe $\Delta_1^1=\Sigma_1^1\cap\Pi_1^1$ contient les boréliens, et un théorème de Souslin (1917) affirme que $\Delta_1^1(X)=\mathcal{B}(X)$; nous reviendrons là-dessus au §2. La hiérarchie des ensembles ne s'arrête pas là : la classe Π_1^1 n'est pas stable par image directe borélienne, d'où l'introduction de la classe Σ_2^1 des images boréliennes d'ensembles coanalytiques, puis de la classe Π_2^1 de leurs complémentaires, etc. Dans cet exposé, nous nous restreindrons à l'étude des ensembles analytiques (et leurs complémentaires).

Nous appelons $\mathcal{I}$ l'espace $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$ des applications de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$. Muni de la topologie de la convergence simple, c'est un espace polonais, totalement discontinu et parfait. Dans la suite, cet espace sera l'espace polonais de référence, et la proposition fondamentale suivante, connue depuis bien longtemps,

Une partie A *d'un espace polonais* X *est analytique si et seulement si elle est projection sur* X *d'un fermé de* $X\times\mathcal{I}$.

nous servira dorénavant de définition d'un ensemble analytique.

2. ARBRES ET ENSEMBLES ANALYTIQUES

a) L'espace des arbres

Soit S l'ensemble des suites finies d'entiers (suite vide comprise). Pour $u=(u_1,\cdots,u_n)\in S$ et $p<n$, nous dirons que $v=(u_1,\cdots,u_p)$ est une *section commençante* de u et nous noterons $v\succ u$, lu "v est plus grand que u" ; par exemple, on a $(3,1)\succ(3,1,4,1)$. Un *arbre* d'entiers T est un sous-ensemble de S tel que $\emptyset\in T$ et $\forall u\in T\ v\succ u\Rightarrow v\in T$. Il est clair que la réunion et l'intersection d'une famille quelconque d'arbres est encore un arbre.

Soit $\mathfrak{T}$ l'ensemble des arbres d'entiers ; c'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(S)=\{0,1\}^S$. S étant dénombrable, $\{0,1\}^S$ muni de la topologie produit est un compact métrisable, et on vérifie immédiatement que $\mathfrak{T}$ est fermé dans $\{0,1\}^S$.

Soit T un arbre ; nous dirons que T est *bien fondé* s'il ne contient pas de suite infinie décroissante pour $\succ$. De façon équivalente, T est bien fondé si, pour tout $\alpha\in\mathcal{I}$, il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\alpha|n=(\alpha(1),\cdots,\alpha(n))$ n'appartienne pas à T. Nous noterons $\mathfrak{F}$ le sous-ensemble de $\mathfrak{T}$ constitué des arbres bien fondés. L'un des buts de ce paragraphe est de montrer que $\mathfrak{F}$ est coanalytique mais non analytique dans $\mathfrak{T}$. Ce résultat en lui-même peut paraître anecdotique ; en fait, il n'en est rien : nous allons voir que $\mathfrak{F}$ est en un certain sens le coanalytique "vrai" universel. Cette constatation nous permettra de développer la théorie de l'indice de Lusin-Sierpinski, l'outil de base de toute la théorie. Comme première application, nous donnerons une démonstration du premier théorème de séparation de Lusin-Souslin dont le théorème de Souslin précité est un corollaire.

b) Arbres et ensembles analytiques

Soit X un espace polonais et soit d une distance sur X définissant la topologie de X et le rendant complet. Pour $x\in X$ et $r>0$ on désigne par $B(x,r)$ la boule ouverte de centre x et rayon r.

Soit A une partie analytique de X et soit F un fermé de $X\times\mathcal{I}$ dont A est la projection sur X. Pour tout $x\in X$ nous définissons un arbre $T(x)$, dépendant de A, comme suit : on a $(u_1,\cdots,u_n)\in T(x)$ ssi on a

$$\forall B(y,\tfrac{1}{n})\ni x\quad \exists x_n\in B(y,\tfrac{1}{n})\quad \exists\alpha\in\mathcal{I}\quad (x_n,\alpha)\in F \text{ et } \alpha|n=(u_1,\cdots,u_n)$$

PROPOSITION 1. *Soit* $x\in X$ *; on a* $x\in A$ *ssi* $T(x)$ *n'est pas bien fondé.*

Soit en effet $x \in A$. Il existe alors $\alpha \in \mathcal{I}$ tel que $(x,\alpha) \in F$; mais alors on a $\alpha | n \in T(x)$ pour tout n, et $T(x)$ n'est pas bien fondé. Réciproquement soit $x \in X$ tel que $T(x)$ ne soit pas bien fondé. Il existe alors $\alpha \in \mathcal{I}$ tel que $\alpha | n \in T(x)$ pour tout n. Par la définition de $T(x)$, il existe une suite $(x_n, \beta_n) \in F$ avec $d(x,x_n) \leq \frac{2}{n}$ et $\beta_n | n = \alpha | n$. Une telle suite converge vers (x,α) dans $X \times \mathcal{I}$, d'où, F étant fermé, $(x,\alpha) \in F$; ainsi on a $x \in A$.

PROPOSITION 2. *Pour tout* $(\alpha, n) \in \mathcal{I} \times \mathbb{N}$, *l'ensemble*

$$\{x \in X \,;\, \alpha | n \in T(x)\}$$

est un fermé de X.

En particulier, comme $(\{T \in \mathfrak{T} \,;\, u \in T\})_{u \in S}$ est une base de la topologie de $\mathfrak{T}$, l'application $x \mapsto T(x)$ est borélienne de X dans $\mathfrak{T}$; nous dirons plus précisément qu'elle est *semicontinue supérieurement* (en abrégé, s.c.s.), ce qui n'étonnera pas le lecteur.

Soit $u \in S$; montrer la proposition 2 revient à prouver que l'ensemble $V_u = \{x \in X \,;\, u \notin T(x)\}$ est ouvert. Soit n la longueur de u ; on a

$$u \notin T(x) \iff \exists B(y,\tfrac{1}{n}) \ni x \quad \forall x' \in B(y,\tfrac{1}{n}) \quad \forall \alpha \in \mathcal{I} \quad \alpha | n = u \Rightarrow (x',\alpha) \notin F$$

Il est alors immédiat que V_u contient $B(y,\frac{1}{n})$, qui est un voisinage de x ; V_u est donc ouvert comme voisinage de chacun de ses points.

c) Nature de $\mathfrak{F}$

THÉORÈME 1. *L'ensemble* $\mathfrak{F}$ *des arbres bien fondés est une partie coanalytique mais non analytique de* $\mathfrak{T}$.

La démonstration que nous donnons de ce théorème est empruntée à Dellacherie-Meyer [DM]. Montrons d'abord que $\mathfrak{F}$ est coanalytique. Pour cela, on observe que

$$\mathfrak{T} \setminus \mathfrak{F} = \{T \in \mathfrak{T} \,;\, \exists \alpha \in \mathcal{I} \ \forall n \in \mathbb{N} \ \ \alpha | n \in T\}$$

Cet ensemble est projection sur $\mathfrak{T}$ de $\{(T,\alpha) \in \mathfrak{T} \times \mathcal{I} \,;\, \forall n \in \mathbb{N} \ \alpha | n \in T\} = F$, qui est un fermé de $\mathfrak{T} \times \mathcal{I}$; il est donc analytique. Supposons à présent que $\mathfrak{F}$ est analytique. D'après b), il existe alors $f : \mathfrak{T} \to \mathfrak{T}$ s.c.s. telle que

$$x \in \mathfrak{F} \iff f(x) \notin \mathfrak{F}$$

Posons alors $g(x) = x \cap f(x)$ et définissons un arbre T par

$$T = \bigcup_{x \in \mathfrak{T}} g(x)$$

Montrons qu'on a $T \in \mathfrak{F}$. Sinon, il existerait $\alpha \in \mathcal{I}$ et (x_n) une suite dans $\mathfrak{T}$ tels que $\alpha | n \in g(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathfrak{T}$ est compact, on peut supposer que cette suite est convergente vers $x \in \mathfrak{T}$. Posons

$$F_n = \{y \in \mathfrak{T} \,;\, \alpha | n \in y\} \quad , \quad G_n = \{y \in \mathfrak{T} \,;\, \alpha | n \in f(y)\}$$

(F_n) est une suite décroissante de fermés, et, comme f est s.c.s., il en est de même de (G_n). Comme on a $x_n \in F_n \cap G_n$, la limite x des x_n appartient à $(\cap F_n)\cap(\cap G_n)$. Donc, ni x ni f(x) n'appartiennent à $\mathfrak{J}$, ce qui est impossible. Ainsi, T est bien fondé si $\mathfrak{J}$ est analytique. Terminons en montrant qu'on aboutit alors à une contradiction. Posons

$$\tilde{T} = \{u \in S \text{ tels que } u \in T \text{ ou } u=(v,p) \text{ avec } v \in T \text{ et } p \in \mathbb{N}\}$$

$\tilde{T}$ est bien fondé comme T, et on a $\tilde{T} \supset T \supset g(\tilde{T}) = f(\tilde{T}) \cap \tilde{T}$, ce qui implique $\tilde{T} \supset f(\tilde{T})$: ainsi on a $\tilde{T} \in \mathfrak{J}$ et $f(\tilde{T}) \in \mathfrak{J}$, ce qui est contradictoire.

d) Dérivation des arbres.

Soit T un arbre d'entiers ; on définit T*, le dérivé de T, par

$$T^* = \{u \in T\,;\ \exists v \in T\ u \succ v\}.$$

T* est encore un arbre, sauf si $T=\{\emptyset\}$, auquel cas $T^*=\emptyset$. Pour parler de façon imagée, T* est l'arbre obtenu à partir de T en coupant les extrémités.

L'opération de dérivation peut être itérée de façon transfinie ; on définit, par récurrence sur les ordinaux,

$$T^{\alpha+1} = (T^{\alpha})^* \text{ et}$$

$$T^{\beta} = \bigcap_{\alpha<\beta} T^{\alpha} \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite.}$$

Si T est un arbre bien fondé, il existe un plus petit ordinal, noté j(T), tel que $T^{\alpha}=\emptyset$ si $\alpha \geq j(T)$ (et réciproquement). Vérifions que j(T) est un ordinal dénombrable. Pour ce faire, notons $\aleph_1$ le premier ordinal non dénombrable et supposons $j(T) \geq \aleph_1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, désignons par T_n l'arbre $\{v \in S;\ (n,v) \in T\} \cup \{\emptyset\}$. On se convainc facilement que

$$j(T) = \sup_n (j(T_n)+1).$$

Si donc $j(T) \geq \aleph_1$, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $j(T_{n_1}) \geq \aleph_1$. On recommence alors le même processus et l'on peut construire par récurrence une suite (n_k) telle que $\forall k$, $(n_1,\ldots,n_k) \in T$, ce qui contredit le fait que T est un arbre bien fondé.

L'ordinal j(T) est appelé *l'indice* de T. On généralise la notation en posant $j(T)=\aleph_1$ si T n'est pas bien fondé. On a alors le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 2. *Soit* $A \subset \mathfrak{J}$ *un ensemble analytique. Alors* $\sup_{T \in A} j(T) < \aleph_1$.
De plus, l'ensemble $B_{\alpha} = \{T \in \mathfrak{T}\,;\ j(T) < \alpha\}$ *est borélien pour tout* $\alpha < \aleph_1$.

La preuve du théorème 2 débute par un lemme dont nous ne donnons qu'une preuve abrégée(voir [DM]).

LEMME. *L'ensemble* $\{(T,S)\in\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}\ ;\ j(T)\le j(S)\}$ *est analytique dans* $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$.

Preuve : Appelons *codage* toute application $f : S\to S$ transformant les suites de longueur n en suites de longueur n et vérifiant

$$\forall u,\ v\in S,\ u\succ v \Rightarrow f(u)\succ f(v).$$

L'ensemble des codages peut se décrire comme un fermé de l'espace polonais $\prod_n (\mathbb{N}^n)^{\mathbb{N}^n}$. Soient $S,T\in\mathfrak{T}$; on montre, et nous l'admettrons, que $j(S)\le j(T)$ si et seulement si il existe un codage f tel que $S\subset f(T)$. L'ensemble $\{j(S)\le j(T)\}$ apparait comme la projection sur $\mathfrak{T}\times\mathfrak{T}$ du fermé $\{(S,T,f)\ ;\ S\subset f(T)\}$.

Revenons maintenant à la preuve du théorème 2. Si l'on avait $\sup_{T\in A} j(T)=\aleph_1$, on pourrait écrire

$$\mathfrak{J} = \{S\in\mathfrak{T}\ ;\ \exists\ T\in A\ j(S)\le j(T)\}\ ,$$

et $\mathfrak{J}$ serait la projection sur $\mathfrak{T}$ de l'ensemble

$$\{(S,T)\ ;\ T\in A\}\cap\{(S,T) : j(S)\le j(T)\},$$

qui est analytique par le lemme que l'on vient de voir.
L'ensemble $\mathfrak{J}$ serait donc lui-même analytique, ce qui contredit le théorème 1. Enfin, le fait que les B_α soient boréliens pour $\alpha<\aleph_1$ résulte d'une facile récurrence transfinie laissée au lecteur.

Les B_α, $\alpha<\aleph_1$, sont appelés les *constituants* de $\mathfrak{J}$; $\mathfrak{J} = \bigcup_{\alpha<\aleph_1} B_\alpha$, et le théorème 2 nous apprend que si $A\subset\mathfrak{J}$ est analytique, alors $A\subset B_\alpha$ pour un $\alpha<\aleph_1$. Nous nous proposons à présent de généraliser cette description aux ensembles coanalytiques généraux.

e) L'indice de Lusin-Sierpinski.

Soit X un espace polonais quelconque et $B\subset X$ un ensemble coanalytique. D'après la partie b), il existe une application $x\mapsto T(x)$ de X dans $\mathfrak{T}$, borélienne, telle que

$$x\in B \Leftrightarrow T(x)\in\mathfrak{J}.$$

On définit alors une application ψ de X à valeurs dans les ordinaux $\le \aleph_1$ par $\forall x\in X,\ \psi(x) = j(T(x))$.
Les propriétés d'un tel indice sont les mêmes que celles de j sur $\mathfrak{J}$. Vérifions-les brièvement :
- Si $A\subset B$ est analytique alors $\{T(x),\ x\in A\}$ est analytique dans $\mathfrak{J}$ puisque T est borélienne. On a donc, grâce au théorème 2,

$$\sup_{x\in A} \psi(x)<\aleph_1.$$

- Si $\alpha<\aleph_1$ alors $\{x\,;\,\psi(x)<\alpha\} = T^{-1}(B_\alpha)$ est borélien.

Remarquons en particulier que nous obtenons une décomposition de B en constituants boréliens et que B est égal à un de ses constituants s'il est analytique, ce qui prouve la propriété annoncée dans l'introduction, à savoir que l'ensemble des boréliens n'est autre que $\Sigma_1^1 \cap \Pi_1^1$. En fait, cette propriété est un cas particulier du théorème suivant, communément appelé premier théorème de séparation, dû à Lusin-Suslin.

THÉORÈME 3. *Soit* X *un espace polonais et* A_1, A_2 *deux sous-ensembles analytiques disjoints de* X. *Il existe alors deux boréliens disjoints* A'_1, A'_2 *contenant* A_1 *et* A_2 *respectivement.*

Preuve : Soit $B_1=X-A_1$ et ψ_1 un indice de Lusin-Sierpinski associé à B_1. Puisque A_2 est analytique et $A_2 \subset B_1$, il existe un ordinal dénombrable α tel que $\psi_1(x)<\alpha$ si $x \in A_2$. Il suffit alors de prendre $A'_2=\{\psi_1 < \alpha\}$ et $A'_1=X-A'_2$.

f) Un exemple

Nous terminons cette section en l'illustrant par un exemple tiré de l'analyse. Soit E l'espace de Banach des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ et $D \subset E$ l'ensemble des fonctions dérivables en tout point de $[0,1]$.

THÉORÈME 4. *L'ensemble* D *est coanalytique non borélien dans* E.

Ce théorème est dû à Mazurkiewicz [M], mais la démonstration que nous avons adoptée est due à Kechris et Woodin [KW].

Si $f \in E$ et $x<y \in [0,1]$, posons

$$\delta_f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Si $0 \le p \le q \le 1 \in \mathbb{Q}$ on note $\langle p,q\rangle$ le couple correspondant et on désigne par τ une bijection entre l'ensemble de ces couples $\langle p,q\rangle$ et $\mathbb{N}$.
L'idée consiste à associer à chaque fonction f un arbre T_f de la façon suivante :

$$\forall f \in E,\ T_f=\{(n,\tau(\langle p_1,q_1\rangle),\dots,\tau(\langle p_k,q_k\rangle)) \text{ tels que :}$$

- $\forall i \le k,\ q_i-p_i \le 1/i$,
- $\bigcap_{i=1}^{k}[p_i,q_i] \neq \emptyset$,

— $\forall i \leq k-1$, $|\delta_f(p_{i+1},q_{i+1})-\delta_f(p_i,q_i)| \geq 1/(n+1)\}$.

On vérifie que $f \mapsto T_f$ est s.c.s. Il est d'autre part presque immédiat que $f \in D$ si et seulement si T_f est bien fondé. D est donc coanalytique comme image réciproque d'un coanalytique par une application borélienne. Si maintenant D était analytique, il en serait de même de $\{T_f,\ f \in D\} \subset \mathfrak{T}$ et par conséquent on aurait

$$\sup_{f \in D} j(T_f) < \aleph_1$$

par le théorème 2. Or il est très facile de construire, pour tout $\alpha < \aleph_1$, une fonction $f_\alpha \in D$ telle que $j(T_\alpha) \geq \alpha$. Le théorème est prouvé.

3. DÉRIVATIONS ANALYTIQUES.

La notion de dérivation, déjà rencontrée au chapitre précédent, est centrale dans la théorie. Historiquement, c'est Cantor qui a le premier introduit le concept avec la dérivation des compacts : c'est d'ailleurs cette étude qui l'a amené à inventer les ordinaux transfinis et à jeter les bases de la théorie des ensembles. Nous reprenons cet exemple historique après avoir énoncé le théorème de Moschovakis, un résultat très général permettant de le retrouver en même temps que d'autres résultats tournant autour de la notion de dérivation. Nous présentons aussi quelques exemples d'application du théorème dont nous différons la preuve jusqu'au chapitre 5.

a) Enoncé du théorème de Moschovakis.

Soit X un espace polonais et φ une application de $\mathcal{P}(X)$ dans lui-même. Si W est un espace polonais auxiliaire et A un sous-ensemble de $X\times W$, désignons, pour tout $w\in W$, par A_w la "section"

$$\{x\in X\,;\ (x,w)\in A\}.$$

Nous dirons que l'application φ est *uniformément analytique* si pour tout espace polonais W et tout sous-ensemble A analytique de $X\times W$, l'ensemble

$$\underline{\varphi}(A)=\{(y,w)\in X\times W\,;\ y\in\varphi(A_w)\}$$

est encore analytique dans $X*W$ (en fait,il suffit de le vérifier pour $W=\mathcal{I}$).En particulier, une application uniformément analytique transforme les analytiques en analytiques. Réciproquement, les applications "naturelles" conservant les analytiques sont uniformément analytiques.

On appellera *dérivation* toute application φ de $\mathcal{P}(X)$ dans lui-même, croissante et telle que $\varphi(A)\subset A$ pour $A\in\mathcal{P}(X)$. On verra au chapitre 5 que dans la définition d'une dérivation uniformément analytique, l'hypothèse "φ est croissante" est redondante. Ainsi, à partir de toute application φ uniformément analytique, on peut définir une dérivation uniformément analytique ψ par $\psi(A)=\varphi(A)\cap A$.

Si φ est une dérivation sur $\mathcal{P}(X)$ on définit par récurrence transfinie les itérés de φ par :

$$\varphi_0(A)=A,\ \varphi_{\alpha+1}(A)=\varphi(\varphi_\alpha(A))\ \text{et}$$

$$\varphi_\beta(A)=\bigcap_{\alpha<\beta}\varphi_\alpha(A)\ \text{si } \beta \text{ est un ordinal limite.}$$

On définit aussi $\varphi_\infty(A)=\bigcap_\alpha \varphi_\alpha(A)$. Notons que c'est le plus grand

sous-ensemble de A qui est φ-invariant.
Nous pouvons maintenant énoncer le théorème de Moschovakis.

THÉORÈME 5. *Soit φ une dérivation uniformément analytique sur* X:

(1) φ_∞ *est uniformément analytique,*

(2) *si* $A\subset X$ *est analytique,* $\varphi_\infty(A)=\varphi_{\aleph_1}(A)$,

(3) *si* $A\subset X$ *est analytique,* $B\subset X$ *est coanalytique et si* $\varphi_\infty(A)\subset B$, *il existe un ordinal dénombrable* α *tel que* $\varphi_\alpha(A)\subset B$.

Notons tout de suite un cas particulier de (3), le plus utile dans la pratique: si A est Σ_1^1 et $\varphi_\infty(A)=\emptyset$ alors $\varphi_\alpha(A)=\emptyset$ pour un ordinal dénombrable α.

b) Dérivation de Cantor généralisée.

Nous nous fixons le cadre suivant: X est un espace polonais muni d'une relation d'ordre analytique (i.e. de graphe analytique) vérifiant:

(4) Il existe un plus petit élément pour $\leq$ noté O,

(5) toute famille non vide filtrante décroissante admet une borne inférieure.

On se donne également une application $d:X\to X$ appelée *dérivation* car elle vérifie les propriétés suivantes:

(6) $\forall x\in X,\ d(x)\leq x$,

(7) $\forall x,y\in X,\ x\leq y\Rightarrow d(x)\leq d(y)$.

Une telle dérivation sera dite analytique si elle vérifie en outre:

(8) La relation $x\leq d(y)$ est analytique.

Grâce à (6) et (7) on peut définir les itérées transfinies de d de la façon suivante:

$$d^0(x)=x,\ d^{\alpha+1}(x)=d(d^\alpha(x)) \text{ et}$$

$$d^\beta(x)=\inf_\alpha d^\alpha(x) \text{ si } \beta \text{ est un ordinal limite. Enfin,}$$

$$d^\infty(x)=\inf_\alpha d^\alpha(x).$$

Notons que $d^\infty(x)=y$ est parfait, c'est à dire qu'il vérifie $d(y)=y$, et que c'est le plus grand parfait $\leq x$.

Cette situation abstraite a pour avantage d'unifier la dérivation des arbres vue au chapitre précédent et la dérivation de Cantor que l'on étudiera au c).

Posons $\mathbb{D} = \{x \in X;\ d^{\infty}(x)=0\}$ et $\mathbb{C} = X \setminus \mathbb{D}$. On a alors le théorème suivant, dû à Dellacherie [D1] (qui ignorait le résultat de Moschovakis).

THÉORÈME 6. *Sous les hypothèses précédentes,*

(9) $d^{\infty}(x)=d^{\aleph_1}(x)$ *pour tout* $x \in X$,

(10) $x \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow \exists y \neq 0$, *parfait tel que* $y \leq x$,

(11) $\mathbb{C}$ *est analytique,* $\mathbb{D}$ *est coanalytique,*

(12) *si l'on pose* $j(x)=\inf\{\alpha;\ d^{\alpha}(x)=0\}$ *si* $d^{\infty}(x)=0$ *et* $j(x)=\aleph_1$ *sinon, alors, si* $A \subset \mathbb{D}$ *est analytique,* $\sup_{x \in A} j(x) < \aleph_1$. *En particulier,* $\mathbb{D}$ *n'est pas borélien si* $\sup_{x \in A} j(x)=\aleph_1$.

Une démonstration consiste à associer à d une dérivation d'ensembles D et à appliquer à cette dernière le théorème de Moschovakis. Soit D l'application de $\mathcal{P}(X)$ dans lui-même définie par

$$\forall\ A \in \mathcal{P}(X),\ D(A) = \{y \in A;\ \exists\ x \in A,\ y \leq d(x)\}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que D est uniformément analytique. Pour tout $x \in X$ définissons $S_x=\{y \in A;\ y \neq 0 \text{ et } y \leq x\}$.

- On vérifie tout d'abord par une facile récurrence que l'on a $D^{\alpha}(S_x)=S_{d^{\alpha}(x)}$ pour tout ordinal α. La propriété (9) découle alors de (2).

- Soit $x \in X$; si $x \in \mathbb{C}$, alors $d^{\infty}(x)$ est parfait, non nul, et $d^{\infty}(x) \leq x$. Si, réciproquement, il existe $y \neq 0$ parfait $\leq x$ alors $y \leq d^{\infty}(x)$ et $d^{\infty}(x) \neq 0$. Ceci prouve (10).

- Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des éléments parfaits ; alors $\mathbb{P}=\{x \in X;\ x \leq d(x)\}$ qui est analytique par (7). Donc $\mathbb{C}=\{x \in X;\ \exists y \in \mathbb{P},\ y \neq 0 \text{ et } y \leq x\}$ est analytique comme projection d'analytique par (10), et (11) est démontré.

Pour prouver (12) il nous faut introduire une troisième dérivation. On munit tout d'abord $X \times X$ de la relation d'ordre

$$(x_1,y_1) \leq (x_2,y_2) \Longleftrightarrow x_1=x_2 \text{ et } y_1 \leq y_2$$

et l'on définit la dérivation δ sur $X \times X$ par $\delta(x,y)=(x,d(y))$. Enfin, Δ désigne la dérivation ensembliste associée à δ comme D à d.

Si A est un ensemble analytique contenu dans $\mathbb{D}$, soit

$$\mathcal{A} = \{\ (x,y) \in X \times X;\ x \neq 0,\ y \in A \text{ et } x \leq y\}.$$

Alors, pour tout ordinal α,

$$\Delta^{\alpha}(\mathcal{A}) = \{(x,t) \in \mathcal{A};\ \exists y \in A,\ t \leq d^{\alpha}(y)\}$$

et en particulier $\Delta^{\infty}(\mathcal{A})=\emptyset$. Par le théorème de Moschovakis, il existe $\lambda < \aleph_1$ tel que $\Delta^{\lambda}(\mathcal{A})=\emptyset$ et $\sup_{x \in A} j(x) \leq \lambda < \aleph_1$.

c) La dérivation de Cantor.

Soit E un espace métrique compact et $\mathcal{K}(E)$ l'ensemble des compacts de E. La topologie de Hausdorff sur $\mathcal{K}(E)$ est la topologie la moins fine qui rende ouverts les ensembles $\{K ; K \subset U\}$ où U est ouvert et fermés les $\{K ; K \subset F\}$ où F est fermé.
Une base pour cette topologie est fournie par les intersections finies d'ensembles du type $\{K \subset U\}$ ou $\{K \cap U \neq \emptyset\}$ où U décrit une base d'ouverts de E. $\emptyset$ est un point isolé de $\mathcal{K}(E)$. $\mathcal{K}(E)$ est un espace compact métrisable donc polonais. A tout compact de E nous associons son dérivé noté $d(K)$ qui est l'ensemble des points d'accumulation de K. Naturellement $d(K)$ est compact et d définit une dérivation sur $\mathcal{K}(E)$ au sens de b). Montrons que d est borélienne. Il suffit de vérifier que pour tout ouvert U de E, $\{K ; d(K) \subset U\}$ est borélien. Soit (x_n) une partie dénombrable dense de $F = E \setminus U$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ notons $V_{n,p} = B(x_n, 1/p)$ et $F_{n,p} = E \setminus V_{n,p}$; alors $d(K) \subset U \Leftrightarrow K \cap F$ est fini $\Leftrightarrow \exists p > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists y_n \in E$ tel que $K \subset F_{n,p} \cup \{y_n\}$.
Soit, pour L compact de E, K_L l'ensemble des couples (x,K) de $E \times \mathcal{K}(E)$ tels que $K \subset \{x\} \cup L$. On vérifie que K_L est compact et, si π désigne la projection de $E \times \mathcal{K}(E)$ sur $\mathcal{K}(E)$, on a

$$\{K ; d(K) \subset U\} = \bigcup_{p>0} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi(K_{F_{n,p}}),$$

qui est F_σ donc borélien. Comme, par ailleurs, la relation $K \subset L$ est fermée dans $\mathcal{K}(E) \times \mathcal{K}(E)$, le triplet $(\mathcal{K}(E), \subset, d)$ vérifie les hypothèses du théorème 6. De toute cette étude, on déduit le théorème suivant, dû à Hurewicz [H] :

THÉORÈME 7. *L'ensemble des compacts dénombrables de $[0,1]$ est coanalytique non borélien dans $\mathcal{K}([0,1])$.*

En effet, avec les notations du théorème 6, l'ensemble des compacts dénombrables est l'ensemble des compacts K tels que $d^{\aleph_1}(K) = \emptyset$, c'est à dire l'ensemble $\mathbb{D}$. C'est donc un coanalytique. Pour montrer qu'il n'est pas borélien il suffit de prouver, d'après (11), qu'il existe des compacts dénombrables de $[0,1]$ d'ordre aussi grand que l'on veut, ce qui est un exercice laissé au lecteur.

d) Une application.

Nous nous proposons ici de développer une application inattendue du théorème d'Hurewicz, due à Bourgain (n'ayant pas trouvé la référence, nous renvoyons à [R] pour les détails) ; il s'agit d'une

nouvelle démonstration d'un théorème de Szlenk [9].
Si X et Y sont deux espaces de Banach, nous écrirons $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est isomorphe à un sous-espace fermé de Y. Soit $\mathcal{A}$ une classe d'espaces de Banach ; nous dirons qu'un Banach B est *universel pour* $\mathcal{A}$ si $X \hookrightarrow B$ pour tout X de $\mathcal{A}$. Un résultat classique de Banach affirme que $C(\Delta)$, l'espace des fonctions continues sur l'ensemble triadique Δ de Cantor, est universel pour la classe des Banach séparables. Nous dirons d'un Banach qu'il est *universel* s'il est universel pour la classe des Banach séparables. Soit $\mathcal{S}$ la classe des Banach séparables à dual séparable.

THÉORÈME 8. *Soit* B *un espace de Banach universel pour la classe* $\mathcal{S}$*; alors* B *est universel.*

Preuve : Remarquons tout d'abord que si K est un compact dénombrable de $[0,1]$, alors on a $C(K) \in \mathcal{S}$ car son dual est isomorphe à ℓ^1. Soit alors S l'ensemble des compacts de $[0,1]$ tels que $C(K) \hookrightarrow B$. Si nous parvenons à montrer que S est analytique le théorème sera démontré car, par le théorème 7, S contiendra au moins un compact non dénombrable K. Mais tout compact non dénombrable contient un Cantor Δ et donc $C(\Delta) \hookrightarrow B$ ce qui implique que B est universel.

LEMME. S *est analytique dans* $\mathcal{K}([0,1])$.

Preuve du lemme : Vérifions que $K \subset S$ si et seulement si

$$\exists\ \delta > 0\ , T \in \mathcal{L}(C([0,1],\ B),\ \|T\| \le 1 \text{ et } \|Tf\| \ge \delta \|f|K\|\ ,\ f \in C([0,1]).$$

Soit tout d'abord $K \in S$; alors il existe un opérateur $U : C(K) \to B$ avec $\|U\| \le 1$ et $\|Uf\| \ge \delta \|f\|$ pour tout $f \in C(K)$. L'opérateur $Tf = U(f|K)$ convient.
Supposons réciproquement l'existence de T, δ. Soit $E : C(K) \to C([0,1])$ un opérateur linéaire d'extension ; alors $U = T \circ E$ réalise un isomorphisme entre C(K) et un fermé de B. On munit alors $\mathcal{A}$, la boule unité de $\mathcal{L}(C([0,1],B)$, de la topologie de la convergence forte des opérateurs (i.e. $T_n \to T \iff \|Tf - T_n f\| \to 0$ pour toute $f \in C([0,1])$). $\mathcal{A}$ devient alors un espace polonais ainsi que $\mathcal{B} = \mathcal{K}([0,1]) \times \mathcal{A} \times (0,1]$. Soit $Q \subset \mathcal{B}$ défini par

$$Q = \{ (K, T, \delta)\ ;\ \|Tf\| \ge \delta \|f|K\|\ \forall f \in C([0,1])\ \}.$$

C'est un fermé de $\mathcal{B}$ et S est la projection de Q sur $\mathcal{K}([0,1])$, ce qui termine la preuve du lemme.

4. LE THÉORÈME DE LA BORNE.

Dans ce chapitre, nous continuons à développer les conséquences du théorème de Moschovakis. Nous prouvons deux théorèmes, le théorème de Kunen-Martin et le théorème de la borne. Ces deux théorèmes constituent des généralisations des résultats vus au chapitre 2 sur la dérivation des arbres et sur l'indice de Lusin Sierpinski respectivement. Comme application à l'analyse de ces résultats, nous présentons un autre théorème de Bourgain sur les espaces de Banach universels et un théorème récent de Kaufman-Kechris-Solovay sur les fermés d'unicité des séries de Fourier.

a) Le théorème de Kunen-Martin.

Soit X un ensemble non vide et $<$ une relation binaire stricte sur X c'est à dire telle que

$$\forall x,y\in X,\ x<y \Rightarrow \text{non}(y<x)$$

Comme exemple d'une telle situation, citons l'ordre strict associé à un bon ordre.

Nous dirons que la relation $<$ est *bien fondée* s'il n'existe pas de suite infinie "décroissante" pour $<$. L'analogie avec les arbres du chapitre 2 est évidente. Si X est un ensemble muni d'une relation $<$ stricte, on peut définir l'arbre associé comme l'ensemble des suites finies $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de X telles que $x_1>x_2\dots>x_n$. Dire que $<$ est bien fondée revient alors à dire que l'arbre associé l'est. La grande différence est que l'arbre est ici à valeurs dans X qui n'est pas nécessairement dénombrable.

Pour toute relation stricte bien fondée, on peut définir, par récurrence transfinie, une *fonction de rang* sur X de la façon suivante :

$$\rho(x)=0 \text{ si } \forall y\in X,\ \text{non}(y<x)$$
$$\rho(x)=\sup_{y<x}\rho(y)+1 \text{ sinon.}$$

Par définition, la longueur de la relation bien fondée $<$ est

$$|<|=\sup_{x\in X}\rho(x)+1.$$

THÉORÈME 9. (Kunen-Martin [Mo]). *Soit X un espace polonais et $<$ une relation stricte, bien fondée, et analytique sur X. Alors* $|<|<\aleph_1$.

Démonstration. Nous introduisons une dérivation φ sur $\mathcal{P}(X)$ de la façon suivante :

$$\forall\ A\in\mathcal{P}(X),\ \varphi(A) = \{\ y\in A\,;\ \exists x\in A\ x<y\ \}.$$

On vérifie sans peine que φ est une dérivation uniformément analytique. D'autre part, $\varphi_{\infty}(X)=\emptyset$ puisque $<$ est bien fondée. Par le théorème de Moschovakis, il existe alors un ordinal dénombrable λ tel que $\varphi_{\lambda}(X)=\emptyset$. On conclut en remarquant, par une facile récurrence transfinie, que $\varphi_{\lambda}(X)=\{x\in X\,;\ \rho(x)\geq\lambda\}$.

Comme application du théorème 9, nous allons démontrer un deuxième théorème de Bourgain concernant les espaces de Banach universels. Nous désignons par (RS) la classe des Banach reflexifs et séparables.

THÉORÈME 10. (Bourgain, voir [R]). *Soit B un espace de Banach universel pour la classe (RS); alors B est universel.*

La démonstration de ce théorème n'est pas aussi simple que celle du théorème 8. La stratégie est ici la suivante: nous allons associer à chaque espace de Banach X un ordinal $h(X)\leq\aleph_1$ de sorte que $h(X)\leq h(Y)$ si $X\hookrightarrow Y$ (i.e. si X est isomorphe à un sous-espace fermé de Y) et que $h(X)=\aleph_1$ si $C(\Delta)\hookrightarrow X$ (Δ est l'ensemble de Cantor). Il suffira alors de construire, pour tout ordinal $\alpha<\aleph_1$ un espace (RS) X_α tel que $h(X_\alpha)\geq\alpha$ pour achever la preuve du théorème 10 (rappelons que B est universel ssi $C(\Delta)\hookrightarrow B$).

-Construction de l'application h.

On identifie Δ à $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pour $n\in\mathbb{N}$, soit $\Delta_n=\{0,1\}^n$ identifié à un sous-espace de Δ. Si B est un espace de Banach (RS), il en est de même de $C(\Delta,B)$. Pour $n\geq1$, appelons B_n le sous-espace de $C(\Delta,B)$ des fonctions qui ne dépendent que ds n premières coordonnées, identifié à $C(\Delta_n,B)$. Enfin, si $0<\delta\leq1$, posons

$$B^{\delta}=\{u\in C(\Delta,B)\ ;\ \exists n\geq1\ u\in B_n \text{ et } \forall a:\Delta_n\to\mathbb{R},\ \delta\|a\|_{\infty}\leq\|\sum_{x\in\Delta_n}a(x)u(x)\|\leq\|a\|_{\infty}\}.$$

Si $u\in B^{\delta}$, on note $|u|=\inf\{n\,;\ u\in B_n\}$. On introduit alors sur $C(\Delta,B)$ la relation $>_\delta$ définie par

$$u>_\delta v\Leftrightarrow u,v\in B^{\delta},\ |u|<|v| \text{ et } \forall x\in\Delta_{|u|},\ u(x)=\sum_{y\in\Delta_{|v|-|u|}}v(x,y).$$

Cette relation est F_σ donc analytique sur $C(\Delta,B)$.

LEMME. *B est universel si et seulement si il existe $\delta\in(0,1]$ tel que $>_\delta$ ne soit pas bien fondée.*

Preuve abrégée du lemme:

Supposons tout d'abord que $>_\delta$ n'est pas bien fondée. Soit (u_n) une suite de B^{δ} strictement décroissante et $p_n=|u_n|$. Si $f\in C(\Delta,\mathbb{R})$, on définit $f_n : \Delta_{p_n} \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x_1,\dots,x_{p_n})=f(x_1,\dots,x_{p_n},0,0,\dots).$$

Enfin, $b_n = \sum_{x\in\Delta_{p_n}} f_n(x)u_n(x) \in B$.

Par les propriétés de (u_n), $\delta\|f_n\|_\infty \le \|b_n\| \le \|f_n\|_\infty$ et (b_n) est une suite de Cauchy de B. Soit $b=T(f)$ sa limite ; alors $\delta\|f\| \le \|T(f)\| \le \|f\|$, ce qui prouve que $C(\Delta) \hookrightarrow B$.

Supposons réciproquement qu'il existe $T: C(\Delta)\to B$ linéaire tel que $\delta\|f\| \le \|Tf\| \le \|f\|$ pour $f\in C(\Delta)$. Si $n\ge 1$ et $x\in\Delta_n$ on note $1_x : \Delta\to\mathbb{R}$ la fonction qui à tout y associe 1 si y commence par x et 0 sinon. Alors $1_x\in C(\Delta)$ et on pose $u_n=T(1_x)$. On vérifie que $(u_n)\subset B^\delta$ est strictement décroissante pour $>_\delta$. Le lemme est démontré.

Définissons maintenant notre "indice" h. Soit B un espace de Banach : Si $C(\Delta) \hookrightarrow B$ nous posons $h(B)=\aleph_1$. Sinon, par ce que l'on vient de voir, la relation $>_\delta$ est bien fondée pour tout $\delta\in(0,1]$. Par le théorème de Kunen-Martin, $|>_\delta|=h^\delta(B)$ est un ordinal dénombrable. Il est facile de voir que $h^\delta(B)$ décroit avec δ ; nous pouvons donc définir $h(B)=\sup_{n\ge 1} h^{1/n}(B)<\aleph_1$.

Pour achever la preuve du théorème 10 il nous faudrait encore construire, pour tout $\alpha<\aleph_1$, un espace de Banach RS X_α tel que $h(X_\alpha)\ge\alpha$. Malheureusement, cette construction s'avère trop longue et technique pour trouver sa place ici. Nous renvoyons à [R] le lecteur intéressé.

b) Le théorème de la borne.

Soit X un espace polonais et $P\subset X$ un ensemble *coanalytique*. Nous appellerons Π^1_1-norme sur P toute fonction φ définie sur P, à valeurs dans les ordinaux dénombrables, telle qu'il existe R et Q resp. analytique et coanalytique dans $X\times X$ tels que, pour $y\in P$,

$$(x\in P \text{ et } \varphi(x)\le\varphi(y)) \iff R(x,y) \iff Q(x,y).$$

L'indice de lusin-Sierpinski défini au chapitre 2 est un exemple de Π^1_1-norme. De même, l'application $f\to j(T_f)$ est une Π^1_1-norme sur l'ensemble des fonctions partout dérivables (voir **2.f)**), ainsi que $K\to j(K)$ sur l'ensemble des compacts dénombrables de $[0,1]$ ([Hi]). Par contre, dans la dérivation de Cantor généralisée, l'application $x\to j(x)$ n'est en général pas une Π^1_1-norme sur $\mathbb{D}$ si d n'est pas borélienne.

Le théorème de la borne, que nous allons maintenant démontrer, affirme qu'une Π_1^1-norme possède les mêmes propriétés que l'indice de Lusin-Sierpinski.

THÉORÈME 11. *Soit* X *un espace polonais,* $P \subset X$ *un coanalytique et* φ *une* Π_1^1*-norme sur* P. *Si* $A \subset P$ *est un ensemble analytique, alors* $\sup_{x \in A} \varphi(x) < \aleph_1$. *De plus, si* $\alpha < \aleph_1$, $B_\alpha = \{x\,;\ \varphi(x) < \alpha\}$ *est borélien,* $P = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} B_\alpha$, *et tout* $A \subset P$ *analytique est inclus dans l'un de ces constituants.*

Démonstration. L'ensemble analytique A étant fixé, on définit l'ordre strict $<$ sur X par

$$\forall x,y \in X,\ x<y \iff x,y \in A \text{ et } \varphi(x) < \varphi(y).$$

Le graphe de la relation $<$ est $(A \times A) \cap R \cap Q^c$ qui est analytique dans $X \times X$ et cette relation est évidemment bien fondée. Soit ρ la fonction de rang associée à cet ordre. Il est clair que $\rho(x) = \rho(y)$ et $x,y \in A \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$. D'autre part, par le théorème de Kunen-Martin, ρ ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs $< \aleph_1$. On conclut aussitôt qu'il en est de même pour φ.

L'intérêt des Π_1^1-normes est qu'elles permettent une description des coanalytiques en réunion de constituants boréliens exactement comme l'indice de Lusin-Sierpinski.

EXEMPLE : Les ensembles d'unicité pour les séries de Fourier.

Un ensemble $E \subset \mathbb{T}$ est appelé d'unicité si la seule série trigonométrique $\sum c_n e^{inx}$ telle que

$$\lim \sum_{-n}^{n} c_k e^{ikx} = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{T} \setminus E$$

est la série nulle. Nous nous intéressons ici à l'ensemble $\mathcal{U}(\mathbb{T})$ des fermés E d'unicité regardé comme sous-ensemble de $\mathcal{K}(\mathbb{T})$ (= l'ensemble des compacts de $\mathbb{T}$ muni de la topologie de Hausdorff). Nous renvoyons à [GM] pour les résultats classiques sur les ensembles d'unicité.

THÉORÈME (Kaufman, Solovay). *L'ensemble* $\mathcal{U}(\mathbb{T})$ *est coanalytique non borélien dans* $\mathcal{K}(\mathbb{T})$.

Plan de la démonstration. La stratégie consiste à fabriquer une Π_1^1-norme sur $\mathcal{U}(\mathbb{T})$ non bornée par un ordinal dénombrable. Pour ce faire on utilise le résultat suivant de Pyateckii-Schapiro : soit A l'algèbre de Banach des fonctions dont la série de Fourier est absolument convergente. A est isométrique à ℓ^1 et peut donc être vu comme le dual de c_o. Si $E \subset \mathbb{T}$ est fermé nous désignons par $J(E)$ l'idéal de A des fonctions f s'annulant sur un voisinage de E. On a alors le théorème :

THÉORÈME. (Pyateckii-Schapiro). *$E \in \mathcal{U}(\mathbb{T})$ si et seulement si $J(E)$ est dense dans A pour la topologie $\sigma(\ell^1, c_o)$.*

Si maintenant B est un Banach séparable et X un sous-espace du dual B^* de B, on peut construire l'adhérence préfaible de X dans B^* de la façon suivante : $X_o = X$ et, si X_α a été défini pour un ordinal α, $X_{\alpha+1}$ est l'ensemble des limites préfaibles de suites de X_α. Enfin, si β est un ordinal limite, $X_\beta = \bigcap_{\alpha<\beta} X_\alpha$. Un théorème de Banach affirme l'existence d'un ordinal dénombrable $\lambda = O(X)$ tel que X_λ soit l'adhérence préfaible de X dans B^*.
Pour $E \subset \mathcal{U}(\mathbb{T})$ on pose alors $|E|_{P.S.} = O(J(E))$ et l'on conclut en appliquant les deux résultats suivants :

THÉORÈME (Katznelson-Mac Gehee). *Pour tout ordinal dénombrable α, il existe $E \subset \mathcal{U}(\mathbb{T})$ tel que $|E|_{P.S.} > \alpha$.*

THÉORÈME (Solovay). $E \to |E|_{P.S.}$ *est une Π^1_1-norme sur $\mathcal{U}(\mathbb{T})$.*

Pour tout ce qui concerne les ensembles d'unicité, on consultera le livre récent [KL] de Kechris et Louveau.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE MOSCHOVAKIS.

Dans la première partie de ce chapitre nous prouvons le théorème de Moschovakis après le théorème de point fixe de Kleene qui en constitue l'outil essentiel. Dans la deuxième partie, nous appliquons une version fonctionnelle du théorème de Moschovakis à un problème de théorie du potentiel. Nous développons cette application en dernier car elle est d'un genre tout à fait différent des autres.

a) Ensembles universels. Le théorème de point fixe de Kleene.

Soit Γ une "classe de parties" (par exemple les ouverts ou les analytiques). Si X est un espace polonais nous noterons $\Gamma(X)$ les sous-ensembles de X de la classe Γ. Rappelons également que $\mathcal{I}$ désigne l'espace polonais $\mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}$. Un ensemble $G \subset X \times \mathcal{I}$ est dit *universel* pour $\Gamma(X)$ si $G \in \Gamma(X \times \mathcal{I})$ et si

$$\forall P \in \Gamma(X),\ \exists \varepsilon \in \mathcal{I} ;\ P = G_\varepsilon = \{x \in X ;\ (x,\varepsilon) \in G\}.$$

Une classe Γ est dite $\mathcal{I}$-paramétrable si pour tout espace X polonais, il existe $G \subset X \times \mathcal{I}$ universel pour $\Gamma(X)$.

L'exemple le plus simple d'une classe $\mathcal{I}$-paramétrisable est la classe Σ_1^0 des ouverts. Soit en effet X polonais et $\mathcal{U}(k)$, $k \in \mathbb{N}$, une base dénombrable d'ouverts de la topologie de X. On définit alors une partie G de $X \times \mathcal{I}$ par $G(x,\varepsilon) \Longleftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}\ x \in \mathcal{U}(\varepsilon(n))$, et il est immédiat que G est universel pour $\Sigma_1^0(X)$. Remarquons que si $\mathcal{U} \in \Sigma_1^0(X)$, il existe une infinité d'$\varepsilon \in \mathcal{I}$ tels que $\mathcal{U} = G_\varepsilon$. Par passage au complémentaire on obtient immédiatement le fait que la classe Π_1^0 des fermés est $\mathcal{I}$-paramétrisable. Montrons que la classe Σ_1^1 des analytiques est également paramétrisable. Pour ce faire on considère $G \subset X \times \mathcal{I} \times \mathcal{I}$ un ouvert universel pour $\Sigma_1^0(X \times \mathcal{I})$; alors $H = G^c$ est universel pour $\Pi_1^0(X \times \mathcal{I})$. Définissons l'ensemble $\mathcal{H}$ par : $\forall (x,z) \in X \times \mathcal{I}$, $(x,z) \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \exists y \in \mathcal{I}\ (x,y,z) \in H$. $\mathcal{H}$ est analytique dans $X \times \mathcal{I}$; soit $A \subset X$ un ensemble analytique : il existe donc $B \subset X \times \mathcal{I}$ fermé tel que $A(x) \Longleftrightarrow \exists y \in \mathcal{I}\ B(x,y)$. Comme H est universel, il existe $z \in \mathcal{I}$ tel que $B(x,y) \Longleftrightarrow H(x,y,z)$. Mais alors :

$$\begin{aligned} A(x) &\Longleftrightarrow \exists y \in \mathcal{I}\ B(x,y) \\ &\Longleftrightarrow \exists y \in \mathcal{I}\ \exists z \in \mathcal{I}\ H(x,y,z) \\ &\Longleftrightarrow \mathcal{H}(x,z), \end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est universel pour $\Sigma_1^1(X)$. Donc Σ_1^1 est $\mathcal{I}$-paramétrisable ; en fait un résultat un peu plus fort est vrai, que nous aurons à utiliser.

LEMME DE BON PARAMÉTRAGE. *A tout espace polonais* X *on peut associer un ensemble* $G^X \subset X\times\mathcal{N}$ *universel pour* $\Sigma_1^1(X)$ *tel que si* Y *est un autre espace polonais, on ait :*

$$G^{X\times Y}(x,y,\varepsilon) \Longleftrightarrow G^Y(y,S(x,\varepsilon))$$

où $S\colon X\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ *est borélienne.*

Preuve abrégée : Soit π une bijection bi-borélienne de $X\times\mathcal{N}$ sur $\mathcal{N}$. D'autre part, si $\varepsilon\in\mathcal{N}$ nous posons $\varepsilon_o=(\varepsilon(2n),\ n\geq1)$ et $\varepsilon_1=(\varepsilon(2n+1),\ n\geq0)$. Soit enfin $V_X\subset(X\times\mathcal{N})\times\mathcal{N}$ un ensemble universel pour $\Sigma_1^1(X\times\mathcal{N})$. On vérifie alors que

$$G^X(x,\varepsilon) \Longleftrightarrow V_X(x,\pi(x,\varepsilon_o),\varepsilon_1)$$

est un universel répondant à la question.

THÉORÈME (Kleene). *Soit* X *un espace polonais et* $H\subset X\times\mathcal{N}$ *un ensemble analytique. Il existe alors* $\alpha\in\mathcal{N}$ *tel que les coupes* H_α *et* G_α^X *coïncident.*

Démonstration. Par le lemme de bon paramétrage,

$$G^{X\times\mathcal{N}}(x,\alpha,\varepsilon) \Longleftrightarrow G^X(x,S(\alpha,\varepsilon))$$

où $S\colon\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$ est borélienne. Soit alors $P\subset X\times\mathcal{N}$ défini par

$$P(x,\alpha) \Longleftrightarrow H(x,S(\alpha,\alpha)).$$

C'est un ensemble analytique et donc

$$\begin{aligned}\exists\varepsilon_o\in\mathcal{N}\ P(x,\alpha) &\Longleftrightarrow G^{X\times\mathcal{N}}(x,\alpha,\varepsilon)\\ &\Longleftrightarrow G^X(x,S(\alpha,\varepsilon_o)).\end{aligned}$$

Autrement dit, $\forall(x,\alpha)\in X\times\mathcal{N}$, $H(x,S(\alpha,\alpha)) \Longleftrightarrow G^X(x,S(\alpha,\varepsilon_o))$. Si l'on fixe alors $\alpha=\varepsilon_o$ et $\varepsilon^*=S(\varepsilon_o,\varepsilon_o)$, on a $\forall x\in X\ H(x,\varepsilon^*)\Longleftrightarrow G^X(x,\varepsilon^*)$; c'est fini.

Comme première application du théorème de Kleene démontrons le résultat annoncé au chapitre 3. Rappelons de quoi il s'agit ; X est un espace polonais et $\varphi\colon\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ est uniformément analytique :

PROPOSITION. *Si* $A\subset B\subset X$ *sont analytiques, nécessairement* $\varphi(A)\subset\varphi(B)$.

Démonstration : Fixons $x\in\varphi(A)$. Il faut montrer que $x\in\varphi(B)$. Soient G un "bon" universel pour les analytiques de X et $C\subset\mathcal{N}$ l'ensemble défini par $P(y,\beta) \Longleftrightarrow y\in A$ ou $(\beta\in C$ et $y\in B)$. Par le théorème de Kleene, il existe $\varepsilon\in\mathcal{N}$ tel que $P_\varepsilon=G_\varepsilon$. Montrons que ε est nécessairement élément de C. Si ce n'était pas le cas, on aurait $P(y,\varepsilon) \Longleftrightarrow y\in A$ ou encore $P_\varepsilon=G_\varepsilon=A$, ce qui impliquerait $x\in\varphi(G_\varepsilon)$ et $\varepsilon\in C$. Cette contradiction implique que $\varepsilon\in C$ et que $P_\varepsilon=G_\varepsilon=B \Rightarrow x\in\varphi(G_\varepsilon)=\varphi(B)$.

b) Démonstration du théorème de Moschovakis.

Soit $A\subset X$ un ensemble analytique et $Q=G^X$ un bon universel pour $\Sigma_1^1(X)$. On définit $H\subset X\times\mathcal{I}$ par

$$H(x,\alpha) \iff x\in\varphi(A\cap\{y\ ;\ \psi(y,\alpha)\geq\psi(x,\alpha)\})$$

où ψ est un indice de Lusin-Sierpinski associé à Q^c (on le prolonge sur Q par $\aleph_1$). Montrons que H est un ensemble analytique : par les propriétés de ψ, pour tout $(x,\alpha)\in X\times\mathcal{I}$, l'ensemble

$$A_{x,\alpha}=A\cap\{y\ ;\ \psi(y,\alpha)\geq\psi(x,\alpha)\}$$

est analytique, et on a $A_{x,\alpha}=\mathcal{A}_{(x,\alpha)}$ où $\mathcal{A}\subset X\times X\times\mathcal{I}$, défini par

$$\mathcal{A}(x,y,\beta) \iff x\in A_{y,\beta},$$

est analytique. Posons

$$\underline{\varphi}(\mathcal{A})=\{(x,y,\beta)\in\mathcal{A};\ x\in\varphi(A_{y,\beta})\}.$$

Finalement, si π désigne la projection de $X\times X\times\mathcal{I}$ sur $X\times\mathcal{I}$ (les deux dernières coordonnées), on a

$$H=\Pi(\underline{\varphi}(\mathcal{A})\cap\Delta\times\mathcal{I})$$

où Δ désigne ici la diagonale de $X\times X$; c'est donc bien un ensemble analytique.

Par le théorème de Kleene, il existe $\alpha\in\mathcal{I}$ tel que $H_\alpha=Q_\alpha$.

LEMME. (i) $H_\alpha\subset A$ *et* $H_\alpha\subset\varphi(H_\alpha)$,

(ii) *Si λ est un ordinal dénombrable,*

$$\varphi_\lambda(A)\subset Q_\alpha^\lambda=\{y\ ;\ \psi(y,\alpha)\geq\lambda\}.$$

Preuve du lemme : tout d'abord, $x\in H\Rightarrow x\in Q_\alpha$ et donc $\psi(x,\alpha)=\aleph_1$, ce qui signifie que $\{y\ ;\ \psi(y,\alpha)\geq\psi(x,\alpha)\}=H_\alpha$. Par conséquent, $x\in\varphi(A\cap H_\alpha)=\varphi(H_\alpha)$ car il est évident que $H_\alpha\subset A$, et (i) est démontré.

Pour démontrer (ii), nous procédons par récurrence sur λ. C'est clairement vrai pour $\lambda=0$; supposons la propriété vraie pour $\eta<\lambda$ et fausse pour λ. Il existe alors $x\in\varphi_\lambda(A)$ tel que $\psi(x,\alpha)=\eta<\lambda$. Dans ces conditions x ne peut appartenir à $Q_\alpha=H_\alpha$. Or, par les propriétés de φ, on a $x\in\varphi(A\cap\varphi_\eta(A))$ et, par l'hypothèse de récurrence,

$$\varphi_\eta(A)\subset Q_\eta^\alpha\Rightarrow x\in\varphi(A\cap Q_\eta^\alpha)=H_\alpha$$

et nous avons obtenu la contradiction cherchée.

Nous pouvons maintenant conclure. Par (i), $H_\alpha\subset\varphi_\infty(A)$; par (ii), $\varphi_{\aleph_1}(A)\subset\bigcap_{\xi<\aleph_1}\varphi_\xi(A)\subset\bigcap_{\xi<\aleph_1}Q_\xi^\alpha=H_\alpha$, et donc $H_\alpha=\varphi_\infty(A)=\varphi_{\aleph_1}(A)$ ce qui prouve (2). Pour prouver (1) on remarque simplement que $\underline{\varphi}_\infty=\underline{\varphi}_\infty$ et on applique le résultat précédent à $\underline{\varphi}$. Enfin, pour montrer (3), considérons un ensemble coanalytique B tel que $\varphi_\infty(A)=H_\alpha\subset B$. Alors $X\backslash B$ est analytique inclus dans Q_α^c; par le théorème de la borne pour l'indice de Lusin-Sierpinski, il existe un ordinal dénombrable λ tel que $\psi(x,\alpha)\le\lambda$ si $x\in X\setminus B$ et $\varphi_\lambda(A)\subset Q_\alpha^\lambda\subset B$ par (ii).

c) Application à la théorie du potentiel.

Donnons tout d'abord une version fonctionnelle du théorème de Moschovakis.

Soit X un espace polonais. Une application $f: X\to\mathbb{R}_+$ sera dite *analytique* (resp. *coanalytique*) si pour tout $t\ge 0$, l'ensemble $\{x\in X\,;\ f(x)>t\}$ est analytique (resp. coanalytique). De manière équivalente, f est (co-)analytique si et seulement si son sous-graphe

$$\Omega_f = \{\ (x,t)\in X\times\mathbb{R}_+\,;\ f(x)>t\}$$

est (co-)analytique. On appelle dérivation uniformément analytique sur $\mathbb{R}_+^X$ toute application $D: \mathbb{R}_+^X\to\mathbb{R}_+^X$ telle que

- $f\le g \Rightarrow Df\le Dg$,
- $Df\le f$,
- $\forall\ F: X\times\mathcal{I} \to \mathbb{R}_+$ analytique, l'application $(x,\omega)\to D(F(.,\omega))(x)$ est analytique.

Si D est une dérivation uniformément analytique on définit les itérées transfinies de D par $D^0f=f$, $D^{\alpha+1}f=D(D^\alpha f)$ et $D^\beta f=\inf_{\alpha<\beta} D^\alpha f$ si β est un ordinal limite. On a alors l'analogue suivant du théorème de Moschovakis :

THÉORÈME 5 BIS. *Soit D une dérivation uniformément analytique sur* $\mathbb{R}_+^X$. *Si* $f\in\mathbb{R}_+^X$ *on définit* $D^\infty f=\inf_\alpha D^\alpha f$. *Alors,*

(1) D^∞ *est uniformément analytique,*

(2) *si* $f\in\mathbb{R}_+^X$ *est analytique,* $D^\infty f=D^{\aleph_1}f$,

(3) *si* f *est analytique,* g *est coanalytique et* $D^\infty f\le g$, *il existe un ordinal dénombrable* λ *tel que* $D^\lambda f\le g$.

La démonstration du théorème 5 bis consiste à appliquer le théorème de Moschovakis à la dérivation suivante :

Si A est un sous-ensemble de $X\times\mathbb{R}_+$, on lui associe f_A définie par $f_A(X) = \sup\{t\in\mathbb{R}_+\,;\ (x,t)\in A\}$, en convenant que $\sup\varnothing=0$. On vérifie sans peine que f_A est analytique si et seulement si A l'est. On définit alors une dérivation φ sur $X\times\mathbb{R}_+$ par

$$\forall\ A\subset X\times\mathbb{R}_+,\ \varphi(A) = \Omega_{Df(A)}\cap A.$$

Les détails, sans surprise, sont laissés au lecteur.

Venons en à présent à l'application à la théorie du potentiel. Soit X un espace polonais et $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures positives de masse ≤ 1 sur X. Muni de la topologie de la convergence étroite, $\mathcal{M}$ est un espace polonais. Soit $x \to \mu_x$ une application borélienne de X dans $\mathcal{M}$. On définit un *noyau* N par

$$\forall\ f \geq 0 \text{ borélienne sur } X,\ Nf(x) = \int f d\mu_x,$$

et l'on étend cette définition à toutes les fonctions ≥ 0 par le biais de l'intégrale supérieure. Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ sera dite *excessive* si $Nf \leq f$, *invariante* si $Nf = f$, et *pure* si elle est excessive et si la seule fonction invariante $\leq f$ est la fonction nulle. Enfin, le *potentiel* associé au noyau N est l'opérateur $G = \sum_{k\geq 0} N^k$.

La proposition suivante n'est autre que la version abstraite de la décomposition de Riesz :

PROPOSITION. *Soit f une fonction ≥ 0 borélienne excessive et partout finie. Il existe alors un unique couple (φ, i) de fonctions boréliennes avec i invariante et*

$$f = G\varphi + i.$$

Preuve : La suite $N^k f$ décroit vers une fonction $i \geq 0$, borélienne. Puisque f est partout finie, on peut appliquer le théorème de Beppo-Levi qui implique que i est invariante. Posons alors $\varphi = f - Nf$. Pour tout $k \geq 1$,

$$\varphi + \ldots + N^k\varphi = f - N^{k+1}f.$$

La décomposition de Riesz en découle en faisant tendre k vers l'infini. En ce qui concerne l'unicité, on observe que $N^\infty G\varphi = 0$ et donc que $i = N^\infty f$ si $f = G\varphi + i$.

L'hypothèse f finie joue un rôle fondamental dans cette proposition. L'objet du théorème qui suit est la décomposition de Riesz sans cette hypothèse.

THÉORÈME 13 [D2]. *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction borélienne excessive. Alors la plus grande fonction i invariante majorée par f est analytique et il existe une fonction φ borélienne ≥ 0 telle que*

$$f = G\varphi + i.$$

Démonstration. Soit D la dérivation $Df = Nf \wedge f$. On vérifie que D est uniformément analytique. Par le théorème 5 bis, $N^\infty f = D^\infty f = D^{\aleph_1} f = i$ est analytique. Soit φ la fonction qui vaut $f - Nf$ sur $F = \{Nf < +\infty\}$ et $+\infty$ sur $\{Nf = +\infty\}$. Sur F on a encore $f = \varphi + \ldots + N^k\varphi + N^{k+1}f$. On remarque ensuite que $\mu_x(F^c)=0$ si $x\in F$. Sur F on peut donc raisonner comme dans la proposition précédente et $i(x)=\lim_{k\to\infty} N^k f(x)$ si $x\in F$, ce qui prouve que $f= G\varphi+i$ sur F et donc partout puisque $f=\varphi=+\infty$ sur F^c.

Remarques : 1) Dans cet énoncé, on perd l'unicité et aussi le caractère borélien de i.

2) Si f est pure, le théorème de Moschovakis implique qu'il existe un ordinal α dénombrable tel que $N^{\alpha}f=0$.

3) Pour d'autres applications à la théorie du potentiel, on consultera Feyel [F].

RÉFÉRENCES.

[D1] Dellacherie C.- Transformations analytiques : Théorèmes de capacitabilité, de séparation, et d'itération transfinie. Séminaire Initiation à l'analyse 20, Publ. Math. Univ. P. et M. Curie 46, 1980/81, p.16-01 à 16-27.

[D2] Dellacherie C.- Les sous-noyaux élémentaires. Actes du colloque Deny (1983). Lecture notes Springer n°1096, p.183-222.

[DM] Dellacherie C.- Meyer P.A.- Ensembles analytiques et temps d'arrêt. Séminaire de Probabilités IX. Lecture notes Springer n°465, p.373-389.

[F] Feyel D.- Quelques applications d'un théorème de Moschovakis à la théorie du potentiel. Actes du colloque Deny (1983). Lecture notes Springer n°1096, p.280-289.

[GM] Graham C.- Mc Gehee O.- Essay in commutative harmonic analysis. Springer, New York, 1979.

[Hi] Hillard G.- Exemples de normes en théorie descriptive des ensembles.Séminaire de Probabilités XII. Lecture notes Springer n°649, p.524-563.

[H] Hurewicz W.- Zur Theorie der analytischen Mengen. Fund.Math. 15 (1930) p.4-16.

[KL] Kechris A.- Louveau A.- Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness. Cambridge Univ.Press, New York 1987.

[KW] Kechris A.- Woodin W.- Ranks of differentiable functions. Preprint, Caltech.

[L] Louveau A.- Capacitabilité et sélections boréliennes. Séminaire Initiation à l'analyse 21, Publ.Math. Univ. P. et M. Curie 54 1981/82, p.19-01 à 19-21.

[M] Mazurkiewicz S.- Über die Menge der differenzierbaren Funktionen. Fund. Math. 27 (1936) p.244-249.

[Mo] Moschovakis Y.- Descriptive set theory. A fundational approach. North Holland, Amsterdam, 1980.

[R] Rosenthal H.- On applications of the boundedness principle to Banach space theory, according to J.Bourgain. Séminaire Initiation à l'analyse 18, Publ. Math. Univ. P. et M. Curie 29, 1978/79, p.5-01 à 5-14.

[S] Szlenk W.- The non-existence of a separable reflexive Banach space universal for all separable reflexive Banach spaces. Studia Math. T. XXX (1968) p.53-67.