SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE BIANE

Comportement asymptotique de certaines fonctionnelles additives de plusieurs mouvements browniens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 198-233

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__198_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DE CERTAINES FONCTIONNELLES ADDITIVES DE PLUSIEURS MOUVEMENTS BROWNIENS.

Philippe Biane
Tour 45-55, 5^e étage
Université Paris 7, 2 place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

Abstract

Let $B^1, B^2, \dots, B^k$ be k independent Brownian motions with values in $\mathbb{R}^d$. We study the long time asymptotics of additive functionals of the type: $\int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_k} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \dots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \dots ds_k$ where f is an integrable function on $\mathbb{R}^d$. The critical cases are $d = 2k-1$ and $d = 2k$. We obtain results of the first order and of the second order (corresponding to $\int f(x)dx = 0$), which generalize classical results of Kallianpur-Robbins, Papanicolaou-Stroock-Varadhan, and Kasahara-Kotani, for $k = 1$, as well as recent results of Le Gall and Weinryb-Yor, for $k = 2$.

Introduction:

Les fonctionnelles additives des processus de Markov et, en particulier, du mouvement Brownien, ont fait l' objet de nombreuses études asymptotiques. Nous allons commencer en rappelant tout d' abord quelques résultats classiques concernant le mouvement Brownien :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, et B_t un mouvement Brownien réel, le résultat suivant résulte de l' existence et de la continuité des temps locaux de B.

$$\frac{1}{n^{1/2}} \int_0^n f(B_s)ds \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} L_1^0 \int f(x)dx$$

(ici et dans la suite (d) désigne la convergence en distribution)

où L_1^x est le temps local en x d'un mouvement Brownien réel issu de 0, à l'instant 1

Rappelons comment on montre ce résultat:

D'après les propriétés de changement d'échelle du mouvement Brownien,

$\frac{1}{n^{1/2}} \int_0^n f(B_s)ds$ a même loi que $n^{1/2}\int_0^1 f(n^{1/2}B_s)ds$, qui s'écrit, en utilisant la formule de densité d'occupation:

$$n^{1/2}\int f(n^{1/2}x)L_1^x\, dx = \int f(x)L_1^{n^{-1/2}x}\, dx \xrightarrow[n \to \infty]{p.s.} L_1^0 \int f(x)dx$$

La même démonstration permet d'étendre ce résultat à la convergence en loi du processus continu

$$t \longrightarrow \frac{1}{n^{1/2}} \int_0^{nt} f(B_s)ds \text{ vers } t \longrightarrow L_t^0 \int f(x)dx$$

Papanicolaou, Stroock et Varadhan [11] ont étendu ce résultat au deuxième ordre : si $\int f(x)dx = 0$ alors le processus continu

$$t \longrightarrow \frac{1}{n^{1/4}} \int_0^{nt} f(B_s)ds$$

converge en loi lorsque $n \longrightarrow \infty$ vers

$$t \longrightarrow (-2\iint f(x)f(y)\,|x-y|\, dxdy)^{1/2}\ \beta(L_t^0)$$

où $\beta(.)$ est un mouvement Brownien réel indépendant de L^0.

En dimension 2 il n'existe pas de temps locaux, mais Kallianpur et Robbins [5] ont montré que pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, intégrable, et B_t mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{1}{\mathrm{Log} n} \int_0^n f(B_s)ds$$

converge en loi vers

$$\frac{1}{2\pi}\, \mathbb{E} \int f(x)dx$$

où $\mathbb{E}$ est une variable aléatoire de loi exponentielle d' espérance 1.

Kasahara et Kotani [6] ont précisé ce résultat: le processus

$$t \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{Log} n} \int_0^{n^t} f(B_s)ds$$

converge en loi au sens de la topologie M_1 de Skorokhod vers

$$t \longrightarrow \frac{1}{2\pi}\, \mathbb{E}(t) \int f(x)dx$$

où le processus $\mathbb{E}(t)$ est à accroissements indépendants et tel que la loi de $\mathbb{E}(t)$ soit exponentielle, d' espérance t pour tout t.

De plus ils donnent le résultat au second ordre:

si $\int f(x)dx = 0$, le processus

$$t \longrightarrow \frac{1}{(\mathrm{Log} n)^{1/2}} \int_0^{n^t} f(B_s) ds$$

converge, au sens des lois marginales de rang fini, vers

$$t \longrightarrow \left(-\frac{2}{\pi} \iint f(x)\, f(y)\, \mathrm{Log}|x-y|\, dx\, dy\right)^{1/2} \beta(\mathbb{E}(t))$$

où $\beta(.)$ est un mouvement Brownien indépendant de $\mathbb{E}$.

Nous allons nous intéresser à des généralisations de ces résultats à des fonctionnelles additives de plusieurs mouvements Browniens.
La notion de fonctionnelle additive de plusieurs processus de Markov a été introduite par Dynkin [1], et a fait l'objet d'études récentes (voir Evans [2], Fitzsimmons, Salisbury [3], Mountford [10]).
Un exemple important de telle fonctionnelle additive est le temps local d'intersection de deux mouvements Browniens (cf. Geman, Horowitz, Rosen [4]).
Rappelons que si B^1 et B^2 sont deux mouvements Browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (d=2 ou 3), la mesure $f \longrightarrow \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(B^1_u - B^2_v)\, du dv$ admet presque surement une densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue, que l' on note $\alpha(y,t_1,t_2)$; c' est le temps local d'intersection des deux mouvements Browniens B^1 et B^2. A l'aide de α on peut étudier le temps local d'intersection d'un seul mouvement Brownien, qui joue un rôle crucial dans l'étude des points doubles de la trajectoire Brownienne (voir par exemple Le Gall [8], [9])
De l'existence de ce temps local on déduit, par un calcul analogue à celui fait en dimension 1, le résultat suivant:
Le processus continu

$$(t_1,t_2) \longrightarrow \frac{1}{n^{1/2}} \int_0^{nt_1}\int_0^{nt_2} f(B^1_{s_1} - B^2_{s_2})\, du dv$$

converge en loi lorsque $n \longrightarrow \infty$ vers

$$(t_1,t_2) \longrightarrow \alpha(0,t_1,t_2) \int f(x)dx$$

En dimension 3, le résultat du second ordre correspondant à $\int f(x)dx = 0$ peut s'obtenir à partir d'un théorème dû à S. Weinryb et M. Yor.
Dans [14], ils montrent que le processus

$$(y,t_1,t_2) \longrightarrow \left[n^{1/2}\left(\alpha(0,t_1,t_2) - \alpha(\tfrac{y}{n},t_1,t_2) \right) ;\ B^1_{t_1} ;\ B^2_{t_2} \right]$$

converge au sens des lois des marginales de rang fini vers le processus

$$(y,t_1,t_2) \longrightarrow \left[\ \mathbb{B}(y,t_1,t_2)\ ;\ B^1_{t_1}\ ;\ B^2_{t_2}\ \right]$$

où la loi du processus $\mathbb{B}$ est décrite de la façon suivante:
$\mathbb{B}$ est indépendant de B^1 et B^2 conditionnellement à $\alpha(0,.,.)$, et conditionnellement à α, $\mathbb{B}$ est un processus Gaussien de covariance:

$$E[\mathbb{B}(x,s_1,s_2)\mathbb{B}(y,t_1,t_2)] = \frac{2}{\pi}\left[|x|+|y|-|x-y|\right]\alpha(s_1\wedge t_1,s_2\wedge t_2)$$

(En particulier, conditionnellement à α, le processus $\mathbb{B}$, fonction de sa première variable est un mouvement Brownien de Paul Lévy).

Soit f: $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, telle que $\int f(x)dx = 0$ alors,

$$\int f(y)\ n^{1/2}\ (\ \alpha(0,t_1,t_2)-\alpha(\tfrac{y}{n},t_1,t_2)\ )dy = -n^{7/2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} f(n(B^1_{s_1}-B^2_{s_2}))\ ds_1 ds_2.$$

$$\overset{(d)}{=} -\frac{1}{n^{1/2}}\int_0^{n^2t_1}\int_0^{n^2t_2} f(B^1_{s_1}-B^2_{s_2})\ ds_1 ds_2$$

Appliquant formellement le théorème précédent on obtient:
$L^1_0(\mathbb{R}^3)$ désigne l' espace des fonctions d'intégrale nulle,
Le processus
$L^1_0(\mathbb{R}^3)\times\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f,t_1,t_2) \longrightarrow \frac{1}{n^{1/4}}\int_0^{nt_1}\int_0^{nt_2} f(B^1_{s_1}-B^2_{s_2})\ ds_1 ds_2$$

converge au sens des lois marginales de rang fini lorsque $n \longrightarrow \infty$ vers

$(f,t_1,t_2) \longrightarrow \Lambda(f,t_1,t_2)$, dont la loi est donnée par:

conditionnellement à α, Λ est un processus Gaussien de covariance:

$$E[\Lambda(f,s_1,s_2)\Lambda(g,t_1,t_2)] = \frac{2}{\pi}\left[-\iint f(x)g(y)\,|x-y|\,dxdy\right]\ \alpha(s_1\wedge t_1,s_2\wedge t_2)$$

En dimension 4, Le Gall [7] a montré que le processus

$$t \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{Logn}}\int_0^{n^t}\int_0^{n^t} f(B_u-B'_v)du\ dv$$

où B et B' sont des mouvements Browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^4$, et f: $\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ est une fonction intégrable, converge au sens des lois des marginales de rang fini vers

$$t \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^2}\int f(x)dx\ \Gamma(t)$$

où Γ est un processus à accroissements indépendants tel que pour chaque $t,\Gamma(t)$

suive une loi gamma de paramètre 1/2 et d' espérance t.

Dans la suite de cet article, nous généralisons les résultats précédents en étudiant le comportement asymptotique de fonctionnelles additives du type:

$$\mathcal{A}(f,t_1,\ldots,t_k) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\ldots\int_0^{t_k} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

où les B^j sont des mouvements Browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ parcourt un ensemble de fonctions satisfaisant à certaines conditions d' intégrabilité.

D' après Mountford [10], la mesure

$$f \longrightarrow \int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_k} f(B^1_{s_1} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1\ldots ds_k$$

admet presque surement une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$,si et seulement si $d < 2k$. Nous étudierons les deux cas critiques, $d = 2k$ et $d = 2k-1$; dans ce dernier cas on notera $\alpha(y,t_1,t_2,\ldots,t_k)$ la densité de la mesure d' occupation, dont on sait qu' il existe une version telle que la famille de mesures $\alpha(y,ds_1,ds_2,\ldots,ds_k)$ soit vaguement continue en y.

On a alors la formule de densité d'occupation:

$$\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_k} h(s_1,\ldots,s_k)\, f(B^1_{s_1} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1\ldots ds_k =$$

$$\int f(y)\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_k} h(s_1,\ldots,s_k)\ \alpha(y,ds_1,\ldots,ds_k)\ dy$$

L'étude de la densité d'occupation α permettra de dégager une généralisation de la formule de Tanaka qui est à rapprocher de formules analogues pour un mouvement Brownien de dimension 2, dues à Rosen [13] et Yor [15].

Je tiens à remercier Marc Yor et Thierry Jeulin pour de nombreux conseils lors de la rédaction de cet article.

1)Enoncé des principaux résultats:

Dans la suite, B^1, B^2, $\ldots,B^k$, sont k mouvements Browniens indépendants à valeurs dans $\mathbb{R}^d$; (on prendra toujours $d = 2k-1$ ou $d= 2k$)

Le théorème suivant résulte immédiatement de la propriété de scaling du mouvement Brownien ainsi que de l' existence et de la continuité de $y \longrightarrow \alpha(y,t_1,t_2,\ldots,t_k)$.

Théorème 1:

On suppose que $d = 2k-1$.

Le processus

$L^1(\mathbb{R}^d)\times(\mathbb{R}^+)^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f,t_1,\ldots,t_k) \longrightarrow n^{-1/2}\mathcal{A}(f,nt_1,\ldots,nt_k)$

converge au sens des lois marginales de rang fini lorsque $n \longrightarrow \infty$ vers

$(f,t_1,\ldots,t_k) \longrightarrow \alpha(0,t_1,\ldots,t_k).\int f(x)dx$

Nous étendons maintenant le résultat de Le Gall [7] mentionné plus haut:

Théorème 2:

On suppose que $d = 2k$

Le processus

$L^1(\mathbb{R}^d;(1+\log^+\frac{1}{|x|})\, dx) \times (\mathbb{R}^+)^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$(f,t_1,t_2,\ldots,t_k) \longrightarrow \frac{1}{Logn}\,\mathcal{A}(f,n^{t_1},\ldots,n^{t_k})$

converge au sens des lois des marginales de rang fini lorsque $n \longrightarrow \infty$ vers

$(f,t_1,t_2,\ldots,t_k) \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^k(k-1)!}\,\Gamma_k(t_1\wedge t_2\wedge\ldots\wedge t_k)\int f(x)dx$

où $\Gamma_k(.)$ est un processus à accroissements indépendants, tel que la loi de $\Gamma_k(t)$ soit une loi Gamma de paramètre $2^{-(k-1)}$ et d' espérance t.

Ces deux théorèmes sont des extensions de ceux correspondant à $k=1$, le processus α jouant le rôle du temps local dans les dimensions impaires, et le processus Γ_k remplaçant le processus $\mathbb{E}$ de Kasahara et Kotani pour les dimensions paires.

Pour une étude des trajectoires du processus Γ_2 nous renvoyons à l'article de Le Gall [7] p 522, les processus Γ_k pouvant être décrits de façon semblable.

Passons maintenant à l' énoncé des résultats du second ordre :

Théorème 3:

On suppose que $d = 2k-1$

$\mathcal{H}$ est l' ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, d'intégrale nulle.

Le processus

$\mathcal{H} \times (\mathbb{R}^+)^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f,t_1,\dots,t_k) \longrightarrow \frac{1}{n^{1/4}}\,\mathcal{A}(f,nt_1,\dots,nt_k)$$

converge au sens des lois marginales de rang fini, lorsque $n \longrightarrow \infty$ *vers*

$$(f,t_1,\dots,t_k) \longrightarrow \Lambda(f,t_1,\dots,t_k)$$

où la loi du processus Λ *est décrite de la façon suivante:*
On se donne $\alpha(0,.)$*; conditionnellement à* $\alpha(0,.)$*,* Λ *est alors un processus gaussien de covariance:*

$$E[\Lambda(f,s_1,\dots,s_k)\Lambda(g,t_1,\dots,t_k)] =$$

$$\left(-\frac{2}{\pi^{k-1}(k-1)!}\iint f(x)g(y)|x-y|\ dxdy\right)\ \alpha(0,s_1\wedge t_1,\dots,s_k\wedge t_k)$$

Remarque: la covariance $(-\iint f(x)g(y)|x-y|\ dxdy)$ est celle du processus $f \longrightarrow \int f(x)B(x)dx$ où B est un mouvement Brownien de Paul Lévy, c'est à dire un processus Gaussien indexé par $\mathbb{R}^d$ de covariance $(|x|+|y|-|x-y|)$.

Théorème 4:

On suppose que $d = 2k$
$\mathcal{H}$ *est l' ensemble des fonctions* $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$*, d'intégrale nulle*
Le processus
$\mathcal{K} \times (\mathbb{R}^+)^k \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f,t_1,t_2,\dots,t_k) \longrightarrow \frac{1}{(\mathrm{Log}\,n)^{1/2}}\,\mathcal{A}(f,n^{t_1},\dots,n^{t_k})$$

converge en loi lorsque $n \longrightarrow \infty$ *vers*

$$(f,t_1,t_2,\dots,t_k) \longrightarrow \Pi(f,t_1,t_2,\dots,t_k)$$

où la loi de Π *est déterminée par la donnée du processus* Γ_k *du théorème 2, et conditionnellement à* Γ_k*,* Π *est un processus gaussien de covariance:*

$$E[\Pi(f,s_1,s_2,\dots,s_k)\Pi(g,t_1,t_2,\dots,t_k)] =$$

$$\left(-\frac{1}{2^{k-1}\pi^d(k-1)!^2}\iint f(x)g(y)\mathrm{Log}|x-y|\ dxdy\right)\ \Gamma_k(s_1\wedge\dots\wedge s_k\wedge t_1\wedge\dots\wedge t_k)$$

Remarque:
Cette fois ci, la covariance $(-\iint f(x)g(y)\mathrm{Log}|x-y|\ dxdy)$ ne peut plus s'interpréter à l'aide d'un mouvement de Lévy.
Il sera clair dans les preuves des deux derniers théorèmes que la propriété cruciale de ces covariances qui intervient ici est le fait que :
$\Delta_y^k(|x-y|) = (-1)^{k-1}2^d\pi^{k-1}(k-1)!\,\delta_x(y)$ si $d=2k-1$

et

$\Delta^k_y(\mathrm{Log}|x-y|) = (-1)^{k-1}2^{d-1}\pi^k(k-1)!\,\delta_x(y)$ si $d=2k$.

Signalons que les techniques utilisées ici permettent de donner la généralisation suivante du théorème de S. Weinryb et M. Yor cité précédemment, dont on peut, comme plus haut, déduire formellement le théorème 3, mais nous n'en donnerons pas la démonstration détaillée.

Théorème 5:

On suppose que $d = 2k-1$.

Le processus

$$(y,t_1,t_2,\dots,t_k) \longrightarrow n^{1/2}\left[\alpha(\tfrac{y}{n},t_1,\dots,t_k) - \alpha(0,t_1,\dots,t_k)\right]$$

converge au sens des lois marginales de rang fini vers le processus

$$(y,t_1,t_2,\dots,t_k) \longrightarrow \mathbb{L}(y,t_1,t_2,\dots,t_k)$$

défini par :

conditionnellement à $\alpha(0,.)$, $\mathbb{L}$ est un processus gaussien de covariance :

$E[\mathbb{L}(x,s_1,s_2,\dots,s_k)\mathbb{L}(y,t_1,t_2,\dots,t_k)] =$

$$\frac{2}{\pi^{k-1}(k-1)!}\,(|x|+|y|-|x-y|)\,\alpha(0,s_1\wedge t_1,s_2\wedge t_2,\dots,s_k\wedge t_k)$$

La preuve des théorèmes 1 à 4 occupe le reste de l'article.

Dans toute la suite de l'article, afin de ne pas alourdir les notations, on désignera par la même lettre K toutes les constantes intervenant dans les calculs.

On notera $p_t(x) = (2\pi t)^{-d/2}\, e^{-|x|^2/2t}$ la densité Gaussienne.

2) Démonstration des théorèmes 1 et 2:

a) d = 2k-1

$$\frac{1}{n^{1/2}}\int_0^{nt_1}\int_0^{nt_2}\dots\int_0^{nt_k} f(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})\,ds_1ds_2\dots ds_k$$

$$\overset{(d)}{=} n^{d/2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\dots\int_0^{t_k} f(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k}))\,ds_1ds_2\dots ds_k$$

(d'aprés les propriétés de changement d'échelle du mouvement Brownien)

$$= n^{d/2}\int f(n^{1/2}x)\,\alpha(x,t_1,t_2,\dots,t_k)dx$$

(D'après la définition de α)

$$=\int f(x)\ \alpha(n^{-1/2}x,t_1,t_2,\dots,t_k)\ dx \xrightarrow{p.s} \int f(x)dx\ \alpha(0,t_1,t_2,\dots,t_k)$$

d'où le théorème 1

□

b) d = 2k

Les calculs de cette partie sont une adaptation de ceux de Le Gall [7], la différence essentielle étant que nous ne travaillons pas avec la densité gaussienne mais avec sa transformée de Fourier, ce qui facilite les calculs pour les grandes dimensions.

Pour étudier le comportement asymptotique du processus commençons par montrer que pour $t_1,t_2,\dots,t_k$ fixés, la variable aléatoire

$$\frac{1}{\mathrm{Logn}}\int_0^{n^{t_1}}\int_0^{n^{t_2}}\dots\int_0^{n^{t_k}} f(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})\ ds_1ds_2\dots ds_k$$

converge en loi lorsque $n\to\infty$ vers une variable de loi Gamma de paramétre $2^{-(k-1)}$, et d' espérance $\dfrac{1}{(2\pi)^k(k-1)!}\displaystyle\int f(x)dx\ (t_1\wedge t_2\wedge\dots\wedge t_k)$

Remarquons tout d'abord que la norme L^1 de cette variable est majorée par

$$\frac{1}{\mathrm{Logn}}\int_0^{n^{t_1}}\int_0^{n^{t_2}}\dots\int_0^{n^{t_k}} E[\,|f(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})|\,]\ ds_1ds_2\dots ds_k$$

$$\le \frac{1}{\mathrm{Logn}}\int_0^{n^{t_1}}\int_0^{n^{t_2}}\dots\int_0^{n^{t_k}}\int|f(x)|\ p_{s_1+s_2+\dots+s_k}(x)\ dx\ ds_1ds_2\dots ds_k$$

$$\le \frac{1}{\mathrm{Logn}}\Big[\int_0^{1}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}\int|f(x)|\ p_{s_1+s_2+\dots+s_k}(x)\ dx\ ds_1ds_2\dots ds_k$$

$$+\int_1^{n^{t_1}}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}\int|f(x)|\ \frac{1}{(2\pi\ (s_1+s_2+\dots+s_k))^k}dx\ ds_1ds_2\dots ds_k\Big]$$

or : $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{\infty}\dots\int_0^{\infty}p_{s_1+s_2+\dots+s_k}(x)\ ds_1ds_2\dots ds_k$

$$=\int_0^{1}\int_0^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\ (s_2)^{k-2}\ \frac{ds_1ds_2}{(2\pi(s_1+s_2))^k}\ e^{-\frac{|x|^2}{(s_1+s_2)}}$$

$$=\int_0^{|x|^{-2}}\int_0^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\ (s_2)^{k-2}\ \frac{ds_1ds_2}{(2\pi(s_1+s_2))^k}\ e^{-\frac{1}{(s_1+s_2)}}$$

$$\le K\ (1+\mathrm{Log}^+\frac{1}{|x|})$$

et $\frac{1}{\text{Logn}} \int_1^{n^{t_1}} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \frac{1}{(2\pi(s_1 + s_2 + \ldots + s_k))^k} \, ds_1 ds_2 \ldots ds_k \le K$

Donc on peut majorer la norme L^1 de la variable par

$K \left[\int |f(x)| \left(1 + \log^+ \frac{1}{|x|} \right) dx \right]$, pour tout n

Il suffit donc de montrer la convergence en loi pour des f dans $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$, le résultat pour des f générales s' en déduisant par approximation.

A partir de maintenant, $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^d)$.

On va utiliser la méthode des moments pour montrer la convergence en loi.

__Lemme 1:__

$$\frac{1}{\text{Logn}} \int_0^{n^{t_1}} \int_0^{n^{t_2}} \cdots \int_0^{n^{t_k}} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}) \, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

a même comportement asymptotique que

$$\frac{1}{\text{Logn}} \int_0^{n^{t}} \int_0^{n^{t}} \cdots \int_0^{n^{t}} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}) \, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

(où $t = t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots \wedge t_k$.)

(i.e., la différence des deux converge vers 0 en probabilité).

__preuve__:

Il suffit de montrer que

$$\frac{1}{\text{Logn}} \int_0^{n^{t}} \int_{n^t}^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} |f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})| \, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

tend vers 0 dans L^1.

Or :

$$E\left[\int_0^{n^{t}} \int_{n^t}^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} |f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})| \, ds_1 \, ds_2 \ldots ds_k \right]$$

$$= \int_0^{n^{t}} \int_{n^t}^{\infty} \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \int |f(x)| \, p_{s_1+s_2+\ldots+s_k}(x) \, dx \, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$\le \int |f(x)| dx \int_0^{n^{t}} \int_{n^t}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{u^{k-3}}{2\pi(s_1 + s_2 + u))^k (k-3)!} \, ds_1 ds_2 du$$

$$= \int |f(x)|dx \int_0^1 \int_1^\infty \int_0^\infty \frac{u^{k-3}}{2\pi(s_1 + s_2 + u))^k (k-3)!} ds_1 ds_2 du < \infty$$

□

Proposition 1:

$$\int_0^{n^t}\int_0^{n^t}\cdots\int_0^{n^t} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$= (2\pi)^{-d}\int \hat{f}(x) \prod_{j=1}^{k} \left[\int_0^{n^t} e^{-i<x, B^j_{s_j}>} ds_j \right] dx$$

(où $\hat{f}(x) = \int f(y)\, e^{i<x,y>} dy$)

preuve:

D'après la formule d'inversion de Fourier, et le théorème de Fubini:

$$\int_0^{n^t}\int_0^{n^t}\cdots\int_0^{n^t} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$= (2\pi)^{-d}\int \hat{f}(x) \int_0^{n^t}\int_0^{n^t}\cdots\int_0^{n^t} e^{-i<x, B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}>} ds_1 ds_2 \ldots ds_k\, dx$$

$$= (2\pi)^{-d}\int \hat{f}(x) \prod_{j=1}^{k} \left[\int_0^{n^t} e^{-i<x, B^j_{s_j}>} ds_j \right] dx$$

□

Lemme 2:

$$\frac{1}{\mathrm{Logn}} (2\pi)^{-d}\int \hat{f}(x) \prod_{j=1}^{k} \left[\int_0^{n^t} e^{-i<x, B^j_{s_j}>} ds_j \right] dx$$

a même comportement asymptotique que:

$$\frac{1}{\mathrm{Logn}} (2\pi)^{-d}\int_{|x|<1} \hat{f}(0) \prod_{j=1}^{k} \left[\int_0^{n^t} e^{-i<x, B^j_{s_j}>} ds_j \right] dx$$

(i.e. la différence des deux tend vers 0 en probabilité)

preuve:

Il suffit de montrer que

$$\frac{1}{\mathrm{Logn}}\,(2\pi)^{-d}\int_{|x|<1}(\hat{f}(x)-\hat{f}(0))\prod_{j=1}^{k}\left[\int_0^{n^t} e^{-i<x,B^j_{s_j}>}ds_j\right]dx$$

et $$\frac{1}{\mathrm{Logn}}\,(2\pi)^{-d}\int_{|x|\geq 1}\hat{f}(x)\prod_{j=1}^{k}\left[\int_0^{n^t} e^{-i<x,B^j_{s_j}>}ds_j\right]dx$$

convergent vers 0 dans L^2. Or:

$$E\left[\left[\int_{|x|<1}(\hat{f}(x)-\hat{f}(0))\prod_{j=1}^{k}\left[\int_0^{n^t} e^{-i<x,B^j_{s_j}>}ds_j\right]dx\right]^2\right]=$$

$$\leq\int_{|x_1|<1}\int_{|x_2|<1}|\hat{f}(x_1)-\hat{f}(0)|\,|\hat{f}(x_2)-\hat{f}(0)|$$

$$\prod_{j=1}^{k}E\left[\int_0^{n^t}\int_0^{n^t} e^{-i<x_1,B^j_{u_j}>}e^{-i<x_2,B^j_{v_j}>}du_j\,dv_j\right]dx_1dx_2$$

f étant à support compact, $|\hat{f}(x)-\hat{f}(0)|\leq K\,|x|$, d' où :

$$\leq K\int_{|x_1|<1}\int_{|x_2|<1}|x_1|\,|x_2|$$

$$\left[\int_0^{n^t}\int_0^{u}\left(e^{-\frac{1}{2}|x_1|^2\,v}+e^{-\frac{1}{2}|x_2|^2\,v}\right)e^{-\frac{1}{2}|x_1+x_2|^2\,u}\,du\,dv\right]^k dx_1dx_2$$

$$\leq K\int_{|x_1|<1}\int_{|x_2|<1}|x_1|\,|x_2|$$

$$\left(\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|x_1|^2\,n^t}}{|x_1|^2}+\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|x_2|^2\,n^t}}{|x_2|^2}\right)^k\left(\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|x_1+x_2|^2\,n^t}}{|x_1+x_2|^2}\right)^k dx_1dx_2$$

$$\leq K\int_{|x_1|<1}\int_{|x_2|<1}|x_1|\,|x_2|$$

$$2^k\left(\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|x_1|^2\,n^t}}{|x_1|^2}\right)^k\left(\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|x_1+x_2|^2\,n^t}}{|x_1+x_2|^2}\right)^k dx_1dx_2$$

$$\le K \int_{|x_1|<1} |x_1|^{-(2k-1)}\, dx_1 \int_{|y|<2} \left[\frac{1- e^{-\frac{1}{2}|y|^2 n^t}}{|y|^2} \right]^k dy$$

$\le$ K Logn pour n assez grand.

Un calcul du même type permet également de majorer la norme L^2 du terme

$\int_{|x|\ge 1} \hat{f}(x) \prod_{j=1}^{k} \left[\int_0^{n^t} e^{-i<x,B^j_{s_j}>} ds_j \right] dx$ par K $(\mathrm{Logn})^{1/2}$ ce qui termine la preuve du lemme.

□

Il reste maintenant à évaluer les moments de

$$L(n) = \int_{|x|<1} \prod_{j=1}^{k} \left[\int_0^{n^t} e^{-i<x,B^j_{s_j}>} ds_j \right] dx$$

Avant de commencer le calcul on introduit quelques notations :

S_p désignant l'ensemble des permutations de $[1,p]$, pour tout couple (γ,σ) de $S_p \times S_p$ on pose $\phi_{\gamma,\sigma}(j) = \sup\,(\gamma(i);\ i \in A^{\sigma}_j)$

où A^{σ}_j est l'ensemble $\left\{\sigma(1),\ \sigma(2),\dots,\sigma(j)\right\} \Delta \left\{\sigma(1)-1,\ \sigma(2)-1,\dots,\sigma(j)-1\right\}$

(où Δ désigne la différence symétrique)

Ω_p est l' ensemble des $(\gamma,\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{k-1})$ tels que $\phi_{\gamma,\sigma_1},\ \phi_{\gamma,\sigma_2},\dots,\phi_{\gamma,\sigma_{k-1}}$ soient bijectives.

<u>**Lemme 3:**</u>

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{Logn})^{-p}\, E[L(n)^p] = \left[\frac{(2\pi)^k t}{(k-1)!}\right]^p \mathrm{card}\ \Omega_p$$

<u>preuve</u>:

Le moment d'ordre p à évaluer vaut :

$$\int_{|x_1|<1}\int_{|x_2|<1} \dots \int_{|x_p|<1} \left[E\left[\int_0^{n^t}\int_0^{n^t}\dots\int_0^{n^t} e^{-i\sum_{j=1}^{p}<x_j,B_{s_j}>} ds_1 ds_2 \dots ds_p\right]\right]^k dx_1 dx_2 \dots dx_p$$

Le terme à l' intérieur de la parenthèse vaut :

$$\sum_{\sigma\in S_p}\int_0^{n^t}\int_0^{n^t}\cdots\int_0^{n^t} 1_{0<s_1+\dots+s_p<n^t}\, E\left[e^{-i\sum_{j=1}^{p}<x_{\sigma(j)},B_{s_1+\dots+s_j}>}\right] ds_1 ds_2\dots ds_p$$

$$= \sum_{\sigma\in S_p}\int_0^{n^t}\int_0^{n^t}\cdots\int_0^{n^t} 1_{0<s_1+\dots+s_p<n^t}$$

$$E\left[e^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2 s_j}\right]\quad ds_1 ds_2\dots ds_p$$

Cette expression peut être majorée (resp. minorée) par l'intégrale sur l'ensemble des s_j tels que $s_1<n^t,\dots,s_p<n^t$ (resp. $s_1<\frac{n^t}{p},\dots,s_p<\frac{n^t}{p}$): la renormalisation étant en Logn, il suffit donc de considérer l' intégrale sur $s_1<n^t,\dots,s_p<n^t$, qui vaut:

$$\sum_{\sigma\in S_p}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1-\ e^{-\frac{1}{2}|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2\ n^t}}{|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2}\right)$$

le moment d' ordre p que l' on considère a donc la valeur :

$$\int_{|x_1|<1}\int_{|x_2|<1}\cdots\int_{|x_p|<1}$$

$$\left[\sum_{\sigma\in S_p}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1-\ e^{-\frac{1}{2}|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2\ n^t}}{|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2}\right)\right]^k dx_1dx_2\dots dx_p$$

$$=\int_{|x_1|<1}\int_{|x_2|<1}\cdots\int_{|x_p|<1} p!\ \prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1-\ e^{-\frac{1}{2}|x_1+\dots+\ x_j|^2 n^t}}{|x_1+\dots+\ x_j|^2}\right)$$

$$\left[\sum_{\sigma\in S_p}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1-\ e^{-\frac{1}{2}|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2\ n^t}}{|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2}\right)\right]^{k-1} dx_1dx_2\dots dx_p$$

$$=\int_{|x_1|<n^{t/2}}\int_{|x_2|<n^{t/2}}\cdots\int_{|x_p|<n^{t/2}} p!\ \prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1-\ e^{-\frac{1}{2}|x_1+\dots+\ x_j|^2}}{|x_1+\dots+\ x_j|^2}\right)$$

$$\left[\sum_{\sigma\in S_p}\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1-\ e^{-\frac{1}{2}|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2}}{|x_{\sigma(1)}+\dots+\ x_{\sigma(j)}|^2}\right)\right]^{k-1} dx_1dx_2\dots dx_p$$

$$=\iint\cdots\int_{K(n^{t/2})} p! \prod_{j=1}^{p}\left[\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|y_j|^2}}{|y_j|^2}\right]$$

$$\left[\sum_{\sigma\in S_p}\prod_{j=1}^{p}\left[\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|\sum_1^j (y_{\sigma(i)}-y_{\sigma(i)-1})|^2}}{|\sum_1^j (y_{\sigma(i)}-y_{\sigma(i)-1})|^2}\right]\right]^{k-1} dy_1 dy_2 \ldots dy_p$$

où on a posé $y_0 = 0$ et $K(n^{t/2})$ est un ensemble tel que:

$$\left[B(0,\frac{n^{t/2}}{p})\right]^p \subset K(n^{t/2}) \subset \left[B(0,p\, n^{t/2})\right]^p$$

La renormalisation étant en Log n, il suffira de considérer l' intégrale sur $\left[B(0,n^{t/2})\right]^p$. Par un argument semblable à celui de Le Gall [7] p. 514-515 on montre que l' expression ci-dessus est équivalente quand $n \longrightarrow \infty$ à :

$$\iint\cdots\int_{1<|y_1|<n^{t/2},\ldots,\ 1<|y_j|<n^{t/2}} p! \prod_{j=1}^{p}\left[\frac{1-e^{-\frac{1}{2}|y_j|^2}}{|y_j|^2}\right]$$

$$\left[\sum_{\sigma\in S_p}\prod_{j=1}^{p}\left[\sup_{i\in A_j^\sigma}|y_i|^2\right]^{-1}\right]^{k-1} dy_1 dy_2 \ldots dy_p$$

Là encore, le même calcul que dans Le Gall [7] p. 515, permet de conclure au résultat du lemme.

□

Il reste à calculer card Ω_p, ce que l' on fait au moyen d' un lemme semblable au Lemme 2.5 de Le Gall [7].

On introduit tout d'abord la notion d'extension:

Soit $(\gamma,\sigma) \in S_p \times S_p$, on dit que $(\gamma',\sigma') \in S_{p+1} \times S_{p+1}$ est une extension de (γ,σ), s' il existe k, l entiers $\le p+1$ tels que :

$\sigma'(k) = 1$	$\gamma'(1) = 1$
$\sigma'(i) = \sigma(i) + 1$ si $i < k$	$\gamma'(i) = \gamma(i-1)$ si $\gamma(i-1) < 1$
$\sigma'(i) = \sigma(i-1) + 1$ si $i > k$	$\gamma'(i) = \gamma(i-1)+1$ si $\gamma(i-1) > 1$

Lemme 4:

a) Soit $(\gamma',s') \in S_{p+1} \times S_{p+1}$, une extension de (γ,σ), telle que $\phi_{\gamma',\sigma'}$ soit bijective, alors $\phi_{\gamma,\sigma}$ est bijective.

b)Soit $(\gamma,\sigma) \in S_p \times S_p$ tel que $\phi_{\gamma,\sigma}$ soit bijective, si $l>1$ il existe exactement deux extensions de (γ,σ), avec $\gamma'(1) = l$ telles que l'application ϕ associée soit bijective; si $l=1$ il n'en existe qu' une.

preuve:

Soit $(\gamma,\sigma) \in S_p \times S_p$, k, $l \le p+1$ et (γ',σ') l' extension associée, on va exprimer $\phi_{\gamma',\sigma'}$ en fonction de $\phi_{\gamma,\sigma}$. On note r l' entier tel que $\sigma(r) = 1$.

Si $r<k$: pour $i<r$ $\phi_{\gamma',\sigma'}(i) = \phi_{\gamma,\sigma}(i)$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i)<l$

$= \phi_{\gamma,\sigma}(i)+1$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i)\ge l$

pour $r\le i<k$ $\phi_{\gamma',\sigma'}(i) = (\phi_{\gamma,\sigma}(i)+1)\vee l$

pour $i\ge k$ $\phi_{\gamma',\sigma'}(i) = \phi_{\gamma,\sigma}(i-1)$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i-1)<l$

$= \phi_{\gamma,\sigma}(i-1)+1$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i-1)\ge l$

Si $r\ge k$: pour $i<k$ $\phi_{\gamma',\sigma'}(i) = \phi_{\gamma,\sigma}(i)$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i)<l$

$= \phi_{\gamma,\sigma}(i)+1$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i)\ge l$

pour $k\le i<r$ $\phi_{\gamma',\sigma'}(i) = (\phi_{\gamma,\sigma}(i-1)+1)\vee l$

pour $i\ge r$ $\phi_{\gamma',\sigma'}(i) = \phi_{\gamma,\sigma}(i-1)$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i-1)<l$

$= \phi_{\gamma,\sigma}(i-1)+1$ si $\phi_{\gamma,\sigma}(i-1)\ge l$

On vérifie alors facilement le a) d'après ces formules.

Pour le b) on voit que, étant donné $(\gamma,\sigma) \in S_p \times S_p$, tel que $\phi_{\gamma,\sigma}$ soit bijective,

si $l = 1$ seule l' extension obtenue avec $k = 1$ convient

si $l>1$, les deux seules valeurs de k qui conviennent sont données par :

$k_1 = \sup\ (i<r;\ \gamma(i)<l)$

$k_2 = \inf\ (i\ge r;\ \gamma(i)<l)$, où $\sup \emptyset = 1$, $\inf \emptyset = p+1$.

□

On déduit du lemme 4 que card $\Omega_p = \prod_{j=1}^{p}(1 + 2^{k-1}(j-1))$, ce qui montre, à l'aide du lemme 3, que

$$\frac{1}{\mathrm{Log} n}\int_0^{n^{t_1}}\int_0^{n^{t_2}}\cdots\int_0^{n^{t_k}} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers une variable de loi Gamma de paramétre $2^{-(k-1)}$, et d' espérance $\dfrac{1}{(2\pi)^k (k-1)!}\displaystyle\int f(x)dx\ (t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots \wedge t_k)$

Le même argument que dans Le Gall [7] permet alors de conclure à la convergence du processus au sens des lois marginales de rang fini, ce qui termine la preuve du théorème 2.

3) Démonstration des résultats du deuxième ordre:

On suppose dorénavant que $f \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ et $\int f(x)\, dx = 0$.

Rappelons que l'on s'est placé dans les cas $d = 2k$ ou $d = 2k-1$

On va, pour étudier le comportement asymptotique du deuxième ordre, se ramener à l' étude d' une intégrale stochastique, suivant la méthode de Papanicolaou, Stroock et Varadhan [11], en identifiant la fonctionnelle additive comme dernier terme d' une formule d' Itô.

Proposition 2:

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_k} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$= (2\pi)^{-d}\sum_{J\subseteq[1,k]}\int \hat{f}(x)\,\frac{2^k}{|x|^{2k}}\prod_{j\in J}\left[1 - e^{-i\langle x, B^j_{t_j}\rangle}\right]$$

$$\prod_{j\notin J}\left[i\int_0^{t_j} e^{-i\langle x, B^j_{s_j}\rangle}\langle x, dB^j_{s_j}\rangle\right] dx$$

preuve:

D'après la proposition 1 on a

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_k} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$= (2\pi)^{-d}\int \hat{f}(x)\prod_{j=1}^{k}\left[\int_0^{t_j} e^{-i\langle x, B^j_{s_j}\rangle} ds_j\right] dx$$

D' après la formule d' Itô :

$$\int_0^{t_j} e^{-i\langle x, B^j_{s_j}\rangle} ds_j = \frac{2}{|x|^2}\left[1 - e^{-i\langle x, B^j_{t_j}\rangle} + i\int_0^{t_j} e^{-i\langle x, B^j_{s_j}\rangle}\langle x, dB^j_{s_j}\rangle\right];$$

en reportant cette formule dans l' expression au-dessus et en développant, on obtient le résultat

□

Nous allons voir que dans l'expression obtenue dans la proposition 2, la contribution des termes correspondant à $J \neq \emptyset$ est négligeable. Plus précisément, en notant A_J le terme de la somme correspondant à J, on a:

Lemme 5:

Pour $J \neq \emptyset$:

Si $d = 2k$, $E[|A_J|^2] \leq K$

Si $d = 2k-1$, $E[|A_J|^2] \leq K\,(1 + \mathrm{Log}^+ t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_k)$ si $J \neq [1,k]$

$E[|A_J|^2] \leq K\,(1 + \mathrm{Log}^+ t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_k)^2$ si $J = [1,k]$

preuve:

$$E[|A_J|^2] = \iint \hat{f}(x_1)\, \hat{f}(-x_2)\, \frac{2^k}{|x_1|^{2k}} \frac{2^k}{|x_2|^{2k}}$$

$$\prod_{j \in J} E\left[\left(1 - e^{-i\langle x_1, B^j_{t_j}\rangle}\right)\left(1 - e^{i\langle x_2, B^j_{t_j}\rangle}\right)\right]$$

$$\prod_{j \notin J} E\left[\left(i\int_0^{t_j} e^{-i\langle x_1, B^j_{s_j}\rangle} \langle x_1, dB^j_{s_j}\rangle\right)\left(-i\int_0^{t_j} e^{i\langle x_2, B^j_{s_j}\rangle} \langle x_2, dB^j_{s_j}\rangle\right)\right] dx_1 dx_2$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$\left| E\left[\left(1 - e^{-i\langle x_1, B^j_{t_j}\rangle}\right)\left(1 - e^{i\langle x_2, B^j_{t_j}\rangle}\right)\right]\right|$$

$$\leq E\left[\left|1 - e^{-i\langle x_1, B^j_{t_j}\rangle}\right|^2\right]^{1/2} E\left[\left|1 - e^{i\langle x_2, B^j_{t_j}\rangle}\right|^2\right]^{1/2}$$

$$= 2\left(1 - e^{-\frac{1}{2}|x_1|^2 t_j}\right)^{1/2}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}|x_2|^2 t_j}\right)^{1/2}$$

D' après les hypothèses sur f, on a $\int |\hat{f}(x)|dx < \infty$ et $|\hat{f}(x)| \leq K\,|x|$.

Pour $J = [1,k]$, on a:

$$E[|A_J|^2] \leq K \left(\int |\hat{f}(x)|\, \frac{1}{|x|^{2k}} \prod_{j \in J}\left(1 - e^{-\frac{1}{2}|x|^2 t_j}\right)^{1/2}\right)^2$$

$$\leq K \left(\int |\hat{f}(x)|\, \frac{1}{|x|^{2k}} \left(1 - e^{-\frac{1}{2}|x|^2 (t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_k)}\right)^{1/2}\right)^2$$

Donc, si **d = 2k-1** :

$$E[|A_J|^2] \le K \left[\int |\hat{f}(x)|dx + \int_{|x|<1} \frac{1}{|x|^{2k-1}} \left[1 - e^{-\frac{1}{2}|x|^2 t} \right]^{1/2} \right]^2$$

où $t = t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_k$

$$\le K\,(1 + \mathrm{Log}^+ t)^2$$

Si **d = 2k** :

$$E[|A_J|^2] \le K \left[\int |\hat{f}(x)| \frac{1}{|x|^{2k}} dx \right]^2 < \infty$$

Passons maintenant au cas où card J < k.

Tout d'abord:

$$\left| E\left[\left(i\int_0^{t_j} e^{-i<x_1, B^j_{s_j}>} <x_1, dB^j_{s_j}> \right)\left(-i\int_0^{t_j} e^{i<x_2, B^j_{s_j}>} <x_2, dB^j_{s_j}> \right)\right] \right|$$

$$= E\left[\int_0^{t_j} e^{i<x_2-x_1, B^j_{s_j}>} ds_j \right] |<x_1,\ x_2>| \le 2\,|x_1-x_2|^{-2}|x_1||x_2|$$

d'où:

$$E[|A_J|^2] \le K \iint |\hat{f}(x_1)||\hat{f}(-x_2)| \frac{1}{|x_1|^{2k}} \frac{1}{|x_2|^{2k}} \left[1 - e^{-\frac{1}{2}|x_1|^2 t} \right]^{1/2}$$

$$|x_1-x_2|^{-2(k-\mathrm{card}J)} \left[|x_1||x_2| \right]^{(k-\mathrm{card}J)} dx_1 dx_2$$

où $t = t_1 \vee t_2 \vee \ldots \vee t_k$

Si **d = 2k** :

$$\int |\hat{f}(-x_2)||x_2|^{-k-\mathrm{card}J}|x_1-x_2|^{-2(k-\mathrm{card}J)}dx_2$$

$$\le K \int |x_2|^{-k-\mathrm{card}J}|x_1-x_2|^{-2(k-\mathrm{card}J)}dx_2 \le K\,|x_1|^{d-3k+\mathrm{card}J}$$

Or l'intégrale $\int |\hat{f}(x_1)|\ |x_1|^{d-4k}\ dx_1$ est finie, donc la norme L^2 à évaluer est bornée indépendamment des t_j.

Si **d = 2k-1** :

$$\int |\hat{f}(-x_2)||x_2|^{-k-\mathrm{card}J}|x_1-x_2|^{-2(k-\mathrm{card}J)}dx_2$$

$$\le K \int |x_2|^{-k-\mathrm{card}J+1}|x_1-x_2|^{-2(k-\mathrm{card}J)}dx_2 \le K\,|x_1|^{d-3k+\mathrm{card}J+1}$$

Or

$$\int |\hat{f}(x_1)|\ |x_1|^{d-4k+1} \left[1 - e^{-\frac{1}{2}|x_1|^2 t} \right]^{1/2} dx_1 \le K\,(1+\mathrm{Log}^+ t)$$

□

Posons $\theta(y) = (2\pi)^{-d}\int \hat{f}(x) \dfrac{2^k}{|x|^{2k}} \left[1 - e^{-i<x,y>} \right] dx$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{k-1}(k-1)!} \int f(x) \left(|x| - |x-y| \right) dx \quad \text{si } d = 2k-1$$

$$= \frac{1}{2^{k-1}\pi^{k}(k-1)!} \int f(x) \left(\mathrm{Log}|x| - \mathrm{Log}|x-y| \right) dx \quad \text{si } d = 2k$$

et $\Theta(y_1, y_2, \ldots, y_k) = \displaystyle\sum_{J\subseteq[1,k]} (-1)^{\mathrm{card}J}\, \theta(\sum_{j\in J} y_j)$

On va écrire la fonctionnelle additive $\mathcal{A}(f, t_1, \ldots, t_k)$ à l' aide de la fonction Θ.

Lemme 6:

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_k} f(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})\, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$= \sum_{J\subseteq[1,k]} \int_0^{t_J} \nabla_{y_J} \Theta(B^J_{s_J}, B^{J^c}_{t_{J^c}}).dB^J_{s_J}$$

où, si $J = j_1, \ldots, j_m$, $J^c = j_{m+1}, \ldots, j_k$

$$\int_0^{t_J} \nabla_{y_J} \Theta(B^J_{s_J}, B^{J^c}_{t_{J^c}}).dB^J_{s_J} = A_J$$

$$= \int_0^{t_{j_1}}\cdots\int_0^{t_{j_m}} \nabla_{y_{j_1}} \cdots \nabla_{y_{j_m}} \Theta(B^1_{u_1}, \ldots, B^k_{u_k}).(dB^{j_1}_{s_{j_1}}; \ldots; dB^{j_m}_{s_{j_m}})$$

avec $u_i = s_i$ si $i \in J$,
$= t_i$ sinon.

preuve:

D'après la définition de Θ

$$\Theta(y_1, y_2, \ldots, y_k) = (2\pi)^{-d} \int \hat{f}(x) \frac{2^k}{|x|^{2k}} \prod_{j=1}^{k} \left[1 - e^{-i<x,y_j>} \right] dx$$

Le lemme 6 résulte donc de la proposition 2 par dérivation sous le signe $\int$
□

Remarque:

dans le cas $d = 2k-1$, le lemme 6 appliqué avec $f = \delta_0$, la mesure de Dirac en 0, soit $\hat{f} = 1$, fournit une généralisation de la formule de Tanaka des temps locaux du mouvement Brownien réel, i.e. on a la formule

$\alpha(0, t_1, \ldots, t_k) = |B^1_{t_1} + B^2_{t_2} + \ldots + B^k_{t_k}|$ + une intégrale stochastique qui, dans le cas $d = k = 1$ se ramène à la formule de Tanaka usuelle. Cette formule est à rapprocher de celles obtenues par Rosen [13] et Yor [15]. On ne justifiera pas, par manque de place, le fait que l'on peut prendre $f = \delta_0$ dans le lemme 6.

On s'est donc ramené à l'aide des lemmes précédents à l'étude asymptotique de l'intégrale stochastique multiple:

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_k} \nabla_{y_1}\nabla_{y_2}\cdots\nabla_{y_k}\Theta(B^1_{s_1},\ldots, B^k_{s_k}).(dB^1_{s_1};\ldots; dB^k_{s_k})$$

Or l'application k-linéaire $\nabla_{y_1}\nabla_{y_2}\cdots\nabla_{y_k}\Theta(B^1_{s_1},\ldots, B^k_{s_k})$ est égale, d'après la définition de Θ, à $\nabla^k\theta(B^1_{s_1} + B^2_{s_2}+\ldots+ B^k_{s_k})$, donc cette intégrale stochastique vaut:

$$\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_k} \nabla^k\theta(B^1_{s_1} + B^2_{s_2}+\ldots+ B^k_{s_k}).(dB^1_{s_1};\ldots; dB^k_{s_k}).$$

Le comportement asymptotique de telles intégrales stochastiques est décrit par le théorème suivant, extension d'un théorème de Weinryb et Yor [14].

Théorème 6:

Soit $L^2(\mathbb{R}^d, (\mathbb{R}^d)^{\otimes k})$ l'ensemble des champs d'applications k-linéaires sur $\mathbb{R}^d$, de carré intégrable, (i.e. $\int \|\Phi(x)\|^2dx < \infty$).

a) si $d = 2k-1$

le processus

$L^2(\mathbb{R}^d, (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}) \times (\mathbb{R}^+)^k$

$(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k) \longrightarrow$

$$n^{-1/4}\int_0^{nt_1}\int_0^{nt_2}\cdots\int_0^{nt_k} \Phi(B^1_{s_1} + B^2_{s_2}+\ldots+ B^k_{s_k}).(dB^1_{s_1};\ldots; dB^k_{s_k})$$

converge au sens des lois marginales de rang fini vers

$(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k) \longrightarrow \mathbb{L}(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k)$

où la loi du processus $\mathbb{L}$ est déterminée par:

$\alpha(0,\ldots)$ est donné et, conditionnellement à $\alpha(0,\ldots)$, $\mathbb{L}$ est un processus Gaussien de covariance:

$$E[\mathbb{L}(\Psi, s_1, s_2, \ldots, s_k)\,\mathbb{L}(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k)] =$$

$$\int \langle\langle \Psi(x), \Phi(x)\rangle\rangle dx \quad \alpha(0, s_1\wedge t_1, s_2\wedge t_2, \ldots, s_k\wedge t_k)$$

($\langle\langle .,.\rangle\rangle$ désigne le produit de Hilbert-Schmidt dans $(\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$)

b) si $d = 2k$

le processus

$L^2(\mathbb{R}^d, (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}) \times (\mathbb{R}^+)^k$

$(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k) \longrightarrow$

$$(Logn)^{-1/2} \int_0^{n^{t_1}} \int_0^{n^{t_2}} \ldots \int_0^{n^{t_k}} \Phi(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}).(dB^1_{s_1}; \ldots; dB^k_{s_k})$$

converge au sens des lois marginales de rang fini vers

$(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k) \longrightarrow \mathbb{M}(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k)$

où la loi du processus $\mathbb{M}$ *est déterminée par:*

Γ_k *est donné et, conditionnellement à* Γ_k, $\mathbb{M}$ *est un processus Gaussien de covariance:*

$$E[\mathbb{M}(\Psi, s_1, s_2, \ldots, s_k)\ \mathbb{M}(\Phi, t_1, t_2, \ldots, t_k) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^k (k-1)!} \int \langle\langle \Psi(x), \Phi(x) \rangle\rangle dx \ \ \Gamma_k(s_1 \wedge t_1 \wedge s_2 \wedge t_2 \wedge \ldots \wedge s_k \wedge t_k)$$

Avant de passer à la preuve du théorème 6 nous allons vérifier qu'il entraine les théorèmes 3 et 4.

D'après les lemmes 5 et 6, il suffit de vérifier que

$$\int |\nabla^k \theta(x)|^2 dx = -2^d \pi^{k-1}(k-1)! \iint f(x)f(y)|x-y|\ dxdy \qquad \text{si } d = 2k-1$$

$$= -2^{d-1}\pi^k (k-1)! \iint f(x)f(y)\mathrm{Log}|x-y|\ dxdy \quad \text{si } d = 2k$$

Par intégration par parties,

$$\int |\nabla^k \theta(x)|^2 dx = (-1)^k \int \theta(x)\Delta^k \theta(x) dx$$

or,

si $d = 2k-1$ $\ \Delta^k_y(|x-y|) = 2^d \pi^{k-1}(k-1)!\ \delta_x(y)$,

si $d = 2k$ $\ \Delta^k_y(\mathrm{Log}|x-y|) = 2^{d-1}\pi^k (k-1)!\ \delta_x(y)$, ce qui implique $\Delta^k \theta = c_d f$, et donc

$$\int |\nabla^k \theta(x)|^2 dx = -\int \theta(x)f(x)dx = -2^d \pi^{k-1}(k-1)! \iint f(x)f(y)|x-y|\ dxdy$$

$$\text{si } d = 2k-1$$

$$= -2^{d-1}\pi^k (k-1)! \iint f(x)f(y)\mathrm{Log}|x-y|\ dxdy \quad \text{si}$$

$$d = 2k$$

□

preuve du théorème 6:

Nous ne traiterons que le cas d = 2k-1, l'autre étant semblable.

Tout d'abord, d'après les propriétés de scaling du mouvement Brownien, le processus

$$n^{-1/4}\int_0^{nt_1}\int_0^{nt_2}\cdots\int_0^{nt_k}\Phi(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\ldots+B^k_{s_k}).(dB^1_{s_1};\ldots;dB^k_{s_k})$$

a même loi que

$$n^{(2k-1)/4}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\cdots\int_0^{t_k}\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\ldots+B^k_{s_k})).(dB^1_{s_1};\ldots;dB^k_{s_k})$$

Pour montrer le théorème 6, il suffit de montrer que pour toute fonction $h : (\mathbb{R}_+)^k \longrightarrow \mathbb{R}$, borélienne, bornée, à support compact, la suite de variables

$\mu(n,h)_\infty =$

$$n^{(2k-1)/4}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}h(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\ldots+B^k_{s_k})).(dB^1_{s_1};\ldots;dB^k_{s_k})$$

converge en loi, lorsque $n \longrightarrow \infty$, vers

$$\beta\left[\left[\int \| \Phi(x)\|^2 dx\right]\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}h^2(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \alpha(0,ds_1,ds_2,\ldots,ds_k)\right]$$

où β est un mouvement Brownien indépendant de α.

Pour cela, considérons la famille de martingales:

$B^1_t, B^2_t,\ldots,B^k_t,\mu(n,h)_t$

où $\mu(n,h)_t$ est la martingale continue $E[\mu(n,h)_\infty|\mathcal{F}_t]$, $\mathcal{F}_t$ étant la filtration des mouvements Browniens B^1, $B^2,\ldots,$ B^k.

$E[\mu(n,h)|\mathcal{F}_t] = \mu(n,h)_t =$

$$n^{(2k-1)/4}\int_0^{t}\int_0^{t}\cdots\int_0^{t}h(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\ldots+B^k_{s_k})).(dB^1_{s_1};\ldots;dB^k_{s_k})$$

On va tout d'abord montrer que la famille des lois de ces martingales, sur l'intervalle de temps $[\varepsilon,T]$, est tendue, en utilisant le critère de Kolmogorov:

il suffira de montrer que l'on a

$E[\sup_{s<T}|\mu(n,h)|^2] \le K$, une constante indépendante de n.

et

$E[|\mu(n,h)_t - \mu(n,h)_s|^4] \le K\ |t-s|^2$ pour une constante K indépendante de n, t et s, pour tous s, t tels que $0<\varepsilon<s<t\le T$.

La première inégalité résulte facilement des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy (voir [14], p 244-245).

Il reste à montrer la deuxième inégalité.

Au lieu de la montrer pour la martingale μ, nous la montrerons pour

$\nu(n,h)_t =$

$$n^{(2k-1)/4}\int\int_{0<s_k<\dots<s_1<t} h(s_1,s_2,\dots,s_k)\ \Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).(dB^1_{s_1};\dots;dB^k_{s_k})$$

Le résultat concernant μ s'en déduit en faisant une somme sur les permutations de $1,\dots,k$.

D'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy, on a

$$E[|\nu(n,h)_t-\nu(n,h)_s|^4]\le K\,E[(<\nu(n,h)>_t-<\nu(n,h)>_s)^2]$$

$$\le K\,E\left[\left(n^{(2k-1)/2}\int_s^t ds_1\right.\right.$$

$$\left.\left.|\int\dots\int_{0<s_k<\dots<s_1} h(s_1,s_2,\dots,s_k)\ \Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).(dB^2_{s_2};\dots;dB^k_{s_k})|^2\right)^2\right]$$

L'expression

$$\int\dots\int_{0<s_k<\dots<u} h(s_1,s_2,\dots,s_k)\ \Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).(dB^2_{s_2};\dots;dB^k_{s_k})$$

est une martingale en fonction de u dépendant d'un paramétre s_1

D'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy Hilbertiennes (voir Burkholder [12] p 90), on a:

$$E[|\nu(n,h)_t-\nu(n,h)_s|^4]\le K\,E\left[\left(n^{(2k-1)/2}\int_s^t ds_1\sup_{u\le t}|\int\dots\int_{0<s_k<\dots<u} h(s_1,s_2,\dots,s_k)\right.\right.$$

$$\left.\left.\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).(dB^2_{s_2};\dots;dB^k_{s_k})|^2\right)^2\right]$$

$$\le K\,E\left[\left(n^{(2k-1)/2}\int_s^t ds_1\int_0^t ds_2\ ||\int\dots\int_{0<s_k<\dots<s_2} h(s_1,s_2,\dots,s_k)\right.\right.$$

$$\left.\left.\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).(dB^3_{s_3};\dots;dB^k_{s_k})||^2\right)^2\right]$$

En continuant ainsi pour $B^3,\dots,B^k$ on obtient

$$E[|\nu(n,h)_t-\nu(n,h)_s|^4]\le K\,E\left[\left(n^{(2k-1)/2}\int_s^t ds_1\int_0^t\dots\int_0^t ds_k\right.\right.$$

$$\left.\left.||h(s_1,s_2,\dots,s_k)\ \Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k}))||^2\right)^2\right]$$

h étant bornée on a

$$E[|\nu(n,h)_t-\nu(n,h)_s|^4]\le K\,E\left[\left(n^{(2k-1)}\int_s^t ds_1\int_0^t\dots\int_0^t ds_k\int_s^t du_1\int_0^t\dots\int_0^t du_k\right.\right.$$

$$||\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} +\ldots+ B^k_{s_k}))||^2 \; ||\Phi(n^{1/2}(B^1_{u_1} + B^2_{u_2} +\ldots+ B^k_{u_k}))||^2\Big]\Big]$$

Pour évaluer cette intégrale il faut la découper en morceaux correspondant aux positions respectives des (u_i, s_i) . Nous n'envisagerons ici que le cas où $u_i<s_i$ pour chaque i, les autres se traitant de façon similaire.

Il faut estimer

$$\int_s^t ds_1\int_0^t\ldots\int_0^t ds_k \int_s^{s_1} du_1\int_0^{s_2}\ldots\int_0^{s_k} du_k \int\int dxdy \; ||\Phi(n^{1/2}x)||^2 \; ||\Phi(n^{1/2}(x+y)||^2$$

$$n^{(2k-1)} p_{u_1+\ldots+u_k}(x) \; p_{s_1+\ldots+s_k-u_1-\ldots-u_k}(y)$$

$$\le\int_s^t ds_1\int_0^t\ldots\int_0^t ds_k \int_s^{s_1} du_1\int_0^{s_2}\ldots\int_0^{s_k} du_k \int\int dxdy \; ||\Phi(x)||^2 \; ||\Phi((x+y)||^2$$

$$p_{u_1+\ldots+u_k}(0) \; p_{s_1+\ldots+s_k-u_1-\ldots-u_k}(0)$$

$\le K\ (t^{1/2}-s^{1/2})^2 \le K\ (t-s)^2$ si $s\ge\varepsilon>0$. □

L'étape suivante consiste à prouver les deux lemmes :

Lemme 8:

$$\langle\mu(n,h),B^j\rangle_t \xrightarrow{(P)} 0 \quad (n \longrightarrow \infty)$$

et

Lemme 9:

$$\langle\mu(n,h)\rangle_t \xrightarrow{(P)} \Big[\int |\Phi(x)|^2dx\Big] \int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t h^2(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \alpha(0,ds_1,ds_2,\ldots,ds_k)$$

Grâce aux résultats de Papanicolaou-Stroock-Varadhan [11], le résultat de tension et les lemmes 8 et 9 permettent alors de conclure à la convergence des lois des martingales $(B^1, B^2,\ldots, B^k,\mu(n,h))$ vers $(B^1, B^2,\ldots, B^k, \beta(U(.))$

où $U(t) = \Big[\int |\Phi(x)|^2dx\Big] \int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t h^2(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \alpha(0,ds_1,ds_2,\ldots,ds_k)$

et β est un mouvement Brownien indépendant de $(B^1, B^2,\ldots,B^k)$, ce qui achève la démonstration du théorème 6.

Il ne nous reste donc plus qu'à montrer les lemmes 8 et 9 pour achever la preuve du théorème.

preuve du lemme 8:

$<\mu(n,h),\ B^1>_t =$

$$n^{d/4}\int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h(s_1,s_2,\dots,s_k)$$

$$\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).(dB^2_{s_2};\dots;\ dB^k_{s_k})\ ds_1$$

Appliquant l'inégalité de Jensen, la norme L^1 de cette variable aléatoire est majorée par :

$$K\ n^{d/4}\left[\int_0^t ds_1\ E[||\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h(s_1,s_2,\dots,s_k)\right.$$

$$\left.\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).(dB^2_{s_2};\dots;\ dB^k_{s_k})||^2]\right]^{1/2}$$

$$= K\ n^{d/4}\left[\int_0^t ds_1\ E[\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h^2(s_1,s_2,\dots,s_k)\right.$$

$$\left.||\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k}))||^2\ ds_2\dots ds_k]\ \right]^{1/2}$$

$$\le K\ ||h||_\infty\left[n^{d/2}\int||\ \Phi(n^{1/2}x)\ ||^2\right.$$

$$\left.\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t(2\pi(s_1+s_2+\dots+s_k))^{-d/2}\ ds_1ds_2\dots ds_k\ dx\right]^{1/2}$$

$$\le K\ \left[\int||\ \Phi(x)\ ||^2dx\ \int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t(2\pi(s_1+s_2+\dots+s_k))^{-d/2}\ ds_1ds_2\dots ds_k\ \right]^{1/2}$$

$$\le K\ \left[\int||\ \Phi(x)\ ||^2dx\right]^{1/2}$$

Il suffit donc de montrer la convergence de $<\mu(n,h),B^1>_t$ en probabilité vers 0 pour les Φ continues à support compact, le résultat pour des Φ générales s'en déduit par approximation.

On va voir que $<\mu(n,h),B^1>_t \xrightarrow{L^2} 0$.

$E[|<\mu(n,h),B^1>_t|^2] =$

$$n^{d/2}\int_0^t ds_1\int_0^t du_1\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h(s_1,s_2,\dots,s_k)\ h(u_1,s_2,\dots,s_k)$$

$$E[\ <<\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).\Phi(n^{1/2}(B^1_{u_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k}))>>\ ]\ ds_2\dots ds_k$$

h étant bornée, en séparant les composantes de Φ, on se ramène donc à prouver que pour f, g positives continues à support compact

$$A(n) = n^{d/2}\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t E[f(n^{1/2}(B^1_{s_1}+B^2_{s_2}+\dots+B^k_{s_k})).$$

$$g(n^{1/2}(B^1_{u_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}))]\ ds_1 du_1 ds_2 \ldots ds_k \longrightarrow 0 \ (n \longrightarrow \infty)$$

Considérons l' intégrale sur $s_1 < u_1$:

On a $\displaystyle\int_{s_1}^{t} E[g(n^{1/2}(B^1_{u_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}))|B^1_{s_1}]\ du_1$

$$\leq n^{-1}\ Gg(n^{1/2}(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}))$$

où $Gg(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} E[g(x+B^1_{s_1})]ds_1 = C_d \int g(x+y)\ |y|^{-(d-2)}\ dy$

donc

$$A(n) \leq n^{-1}\ n^{d/2} \int_0^t\int_0^t \ldots \int_0^t E[fGg(n^{1/2}(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k}))]\ ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$$\leq n^{-1} \int f(x)\ Gg(x)\ dx \int_0^t\int_0^t \ldots \int_0^t (2\pi(s_1+s_2+\ldots+s_k))^{-d/2}\ ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

$\longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow \infty$ □

preuve du lemme 9 :

Pour montrer le lemme 9 on divise la martingale $\mu(n,h)$ en somme de martingales orthogonalesen divisant $[0,t]^k$ en k ensembles disjoints, chacun correspondant à $s_i = \sup\ (s_j)$; plus précisément:

$\mu(n,h)_t = \sum_i \mu^i(n,h)_t$ où

$$\mu^i(n,h)_t = n^{d-1/4} \int_0^{s_i} \ldots \int_0^t \ldots \int_0^{s_i} h\ (s_1,\ldots,s_k)$$

$$\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})).(dB^1_{s_1};\ldots;\ dB^k_{s_k})$$

Comme les martingales μ^i sont orthogonales, leurs mouvements Browniens de Dubins-Schwarz sont indépendants et dans l'application du théorème limite de Papanicolaou-Stroock-Varadhan [11], leurs crochets vont s'additionner.

La première de ces martingales a pour crochet:

$$n^{d/2} \int_0^t ds_1\ \| \int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_1} h(s_1,s_2,\ldots,s_k)$$

$$\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} + \ldots + B^k_{s_k})).(dB^2_{s_2};\ldots;\ dB^k_{s_k})\|^2$$

On va montrer que ce crochet tend en probabilité vers

$$\int \|\ \Phi(x)\|^2\ dx \int_0^t\int_0^{s_1} \ldots \int_0^{s_1} h^2(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \alpha(0,ds_1,ds_2,\ldots,ds_k)$$

(En additionnant avec les limites des crochets des autres martingales, on trouvera bien

$$\int \| \Phi(x)\|^2 \, dx \int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t h^2(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \alpha(0,ds_1,ds_2,\ldots,ds_k)\ )$$

Pour cela il suffit de montrer qu'il a même limite en probabilité que

$$A(n,h,t) = n^{d/2} \int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h^2(s_1,s_2,\ldots,s_k)$$

$$\|\Phi(n^{1/2}(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} +\ldots+ B^k_{s_k}))\|^2 \, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

(En effet en appliquant la formule de densité d'occupation on voit facilement que cette dernière expression tend presque surement vers

$$\int \| \Phi(x)\|^2 \, dx \int_0^t\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h^2(s_1,s_2,\ldots,s_k)\ \alpha(0,ds_1,ds_2,\ldots,ds_k)\ )$$

Chacun des deux termes ayant sa norme L^1 majorée par $K \int \|\Phi(x)\|^2 dx$, il suffira de considérer des fonctions Φ de classe $\mathscr{C}^\infty$, à support compact et le résultat général s'en déduira par approximation.

On va montrer que la différence des deux termes $<\mu^1(n,h)>_t$ et $A(n,h,t)$ tend vers 0 dans L^2 .Par changement d'échelle, cette différence a même loi que

$$n^{-1/2} \int_0^{nt} ds_1 \ \| \int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\ldots,n^{-1}s_k)$$

$$\Phi(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} +\ldots+ B^k_{s_k}).(dB^2_{s_2} ;\ldots;\ dB^k_{s_k})\|^2 \ -$$

$$n^{-1/2} \int_0^{nt}\int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h^2(n^{-1}s_1,\ldots,n^{-1}s_k)$$

$$\|\Phi(B^1_{s_1} + B^2_{s_2} +\ldots+ B^k_{s_k})\|^2 \, ds_1 ds_2 \ldots ds_k$$

On écrit cette expression comme somme de k-1 termes Ξ_i, avec:

$$\Xi_i = n^{-1/2} \int_0^{nt} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \cdots \int_0^{s_1} ds_{i-1}$$

$$\Big[\| \int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\ldots,n^{-1}s_k)\ \Phi(B^1_{s_1} + \ldots + B^k_{s_k}).(dB^i_{s_i} ;\ldots;\ dB^k_{s_k})\|^2 \ -$$

$$\int_0^{s_1} ds_i \| \int_0^{s_1}\cdots\int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\ldots,n^{-1}s_k)\ \ \Phi(B^1_{s_1} + \ldots + B^k_{s_k}).(dB^{i+1}_{s_{i+1}} ;\ldots;\ dB^k_{s_k})\|^2 \Big]$$

pour $2 \le i \le k$

En considérant les coordonnées de Φ, on voit que Ξ_i s'écrit comme somme de termes du type:

$$\Psi_i = n^{-1/2}\int_0^{nt} ds_1\int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_1} ds_{i-1}$$

$$\left[\left[\int_0^{s_1}\dots\int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\dots,n^{-1}s_k)\ \Upsilon(B^1_{s_1} + \dots + B^k_{s_k}).(dB^i_{s_i};\dots;\ dB^k_{s_k})\right]^2 -\right.$$

$$\left.\int_0^{s_1} ds_i \ \left|\int_0^{s_1}\dots\int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\dots,n^{-1}s_k)\ \Upsilon(B^1_{s_1} + \dots + B^k_{s_k}).(dB^{i+1}_{s_{i+1}};\dots;\ dB^k_{s_k})\right|^2\right]$$

où Υ est dans $\mathscr{C}^\infty_c((\mathbb{R}^d)^{\otimes(k-i+1)})$

Posons

$$H(s_1,\dots,s_{i-1},s_i) = \int_0^{s_1}\dots\int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\dots,n^{-1}s_i,n^{-1}u_{i+1},\dots,n^{-1}u_k)$$

$$\Upsilon(B^1_{s_1} +\dots+ B^i_{s_i} + B^{i+1}_{u_{i+1}} \dots + B^k_{u_k}).(dB^{i+1}_{u_{i+1}};\dots;\ dB^k_{s_k})$$

H est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

On a, d'après la formule d'Itô :

$$\Psi_i = n^{-1/2}\int_0^{nt} ds_1\int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_1} ds_{i-1}$$

$$\left[\ \left(\int_0^{s_1} H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i).dB^i_{v_i}\right)^2 - \int_0^{s_1}|H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i)|^2\ dv_i\ \right]$$

$$= 2n^{-1/2}\int_0^{nt} ds_1\int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_1} ds_{i-1}$$

$$\int_0^{s_1} H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i).\left(\int_0^{v_1} H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i).dB^i_{r_i}\right)dB^i_{v_i}$$

Le carré de la norme dans L^2 de cette variable aléatoire vaut :

$$8n^{-1}\int_0^{nt} ds_1\int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_1} ds_{i-1}\int_0^{s_1} du_1\int_0^{u_1} du_2 \dots \int_0^{u_1} du_{i-1}$$

$$E\left[\int_0^{s_1} H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i).\left(\int_0^{v_1} H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i).dB^i_{r_i}\right)dB^i_{v_i}\right.$$

$$\left.\int_0^{u_1} H(s_1,\dots,u_{i-1},v_i).\left(\int_0^{v_1} H(u_1,\dots,u_{i-1},r_i).dB^i_{r_i}\right)\ dB^i_{v_i}\right]$$

$$= 8n^{-1}\int_0^{nt} ds_1\int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_1} ds_{i-1}\int_0^{s_1} du_1\int_0^{u_1} du_2 \dots \int_0^{u_1} du_{i-1}$$

$$E\left[\int_0^{u_1} \langle H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle\right.$$

$$\left[\int_0^{v_i} H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i).dB^i_{r_i} \int_0^{v_i} H(u_1,\dots,u_{i-1},r_i).dB^i_{r_i}\right] dv_i \Bigg]$$

En utilisant la formule d'Itô on peut réécrire l'espérance figurant ci-dessus comme:

$$E\Bigg[\int_0^{u_i} \langle H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle$$
$$\Bigg[\int_0^{v_i} H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i).dB^i_{r_i} \int_0^{r_i} H(u_1,\dots,u_{i-1},q_i).dB^i_{q_i} +$$
$$\int_0^{v_i} H(u_1,\dots,u_{i-1},r_i).dB^i_{r_i} \int_0^{r_i} H(s_1,\dots,s_{i-1},q_i).dB^i_{q_i} +$$
$$\int_0^{v_i} \langle H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i),H(u_1,\dots,u_{i-1},r_i)\rangle dr_i\Bigg] \; dv_i \Bigg]$$

Afin d'évaluer cette espérance on va utiliser le lemme suivant, cas particulier de la formule d'intégration par parties du calcul de Malliavin :

Lemme 10

Soient $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}_t,\ P)$ un espace probabilisé filtré, et B un $\mathcal{F}_t$-mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^n)$, tout processus k_t, $\mathcal{F}_t$-prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de carré intégrable, on a

$$E[f(B_t)\int_0^t \langle k_s, dB_s\rangle \mid \mathcal{F}_0] = E[\langle \nabla f(B_t), \int_0^t k_s ds\rangle \mid \mathcal{F}_0]$$

voici une preuve de ce lemme à l'aide de la formule d'Itô:

D'après la formule d'Itô, on a $f(B_t) = E[f(B_t)\mid\mathcal{F}_0] + \int_0^t \langle \nabla P_{t-s}f(B_s),\ dB_s\rangle$

$$\begin{aligned} \text{donc, } E[f(B_t)\int_0^t \langle k_s, dB_s\rangle \mid \mathcal{F}_0] &= E[\int_0^t \langle \nabla P_{t-s}f(B_s),\ k_s\rangle\ ds \mid \mathcal{F}_0] \\ &= E[\int_0^t \langle P_{t-s}\nabla f(B_s),\ k_s\rangle\ ds \mid \mathcal{F}_0] \\ &= E[\langle \nabla f(B_t), \int_0^t k_s ds\rangle \mid \mathcal{F}_0]. \end{aligned}$$

Le lemme 10 permet de remplacer dans le calcul les intégrales stochastiques par des intégrales ordinaires. Nous allons montrer comment cela permet de terminer la démonstration du lemme 9.

Posons

$$\nabla^j H(s_1,s_2,\dots,s_{i-1},s_i) = \int_0^{s_1}\dots\int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\dots,n^{-1}s_i,n^{-1}u_{i+1},\dots,n^{-1}u_k)$$

$$\nabla^j \Upsilon(B^1_{s_1}+\dots+B^i_{s_i}+B^{i+1}_{u_{i+1}}\dots+B^k_{u_k}).(dB^{i+1}_{u_{i+1}};\dots;dB^k_{s_k})$$

$\nabla^j H$ est à valeurs dans $(\mathbb{R}^d)^{\otimes j}$

Dans l'espérance considérée le premier des trois termes vaut:

$$E\left[\int_0^{u_i} \langle H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle \right.$$
$$\left.\int_0^{v_i} H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i).dB^i_{r_i} \int_0^{r_i} H(u_1,\dots,u_{i-1},q_i).dB^i_{q_i} \quad dv_i\right]$$

$$= E\left[\int_0^{u_i}(\langle\nabla H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle + \right.$$
$$\langle H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),\nabla H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle)$$
$$\left.\int_0^{v_i} H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i)dr_i\int_0^{r_i} H(u_1,\dots,u_{i-1},q_i).dB^i_{q_i} \quad dv_i\right]$$

(d'après le lemme 10)

Les autres termes de l'espérance se traitent de façon semblable.

une nouvelle application du lemme 10 donne :

$$E\left[\int_0^{u_i} dv_i\int_0^{v_i}dr_i\int_0^{r_i}dq_i \left[\left[\langle\nabla\nabla H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle + \right.\right.\right.$$
$$2\langle\nabla H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),\nabla H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle +$$
$$\left.\langle H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),\nabla\nabla H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle\right]H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i) \quad +$$
$$\left[\langle\nabla H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle + \right.$$
$$\left.\left.\langle H(s_1,\dots,s_{i-1},v_i),\nabla H(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\rangle\right] \nabla H(s_1,\dots,s_{i-1},r_i)\right]$$
$$\left. H(u_1,\dots,u_{i-1},q_i)\right]$$

En raisonnant sur les composantes de Υ, on voit que tous les termes de cette somme sont du type:

$$E\left[\int_0^{u_i} dv_i \int_0^{v_i} dr_i \int_0^{r_i} dq_i \; \mathfrak{F}(s_1,\dots,s_{i-1},v_i) \; \mathfrak{G}(u_1,\dots,u_{i-1},v_i) \right.$$
$$\left. \mathfrak{H}(s_1,\dots,s_{i-1},r_i) \quad \mathfrak{J}(u_1,\dots,u_{i-1},q_i) \right]$$

où

$$\mathfrak{F}(s_1,\dots,s_{i-1},s_i) \quad = \quad \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_1} h(n^{-1}s_1,\dots,n^{-1}s_i,n^{-1}u_{i+1},\dots,n^{-1}u_k)$$
$$\mathfrak{f}(B^1_{s_1} + \dots + B^i_{s_i} + B^{i+1}_{u_{i+1}} \dots + B^k_{u_k}).(dB^{i+1}_{u_{i+1}} ;\dots; dB^k_{s_k})$$

$\mathfrak{f}$ étant une fonction de $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ qui s'exprime au moyen des dérivées partielles de Φ, et on a des formules analogues pour $\mathfrak{G},\mathfrak{H},\mathfrak{J}$.

L'expression ci-dessus fait apparaitre des produits de quatre intégrales stochastiques multiples dont il faut évaluer l'espérance. Pour cela nous donnons un dernier lemme:

Lemme 11:

Soit B un mouvement Brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $f_i(t,x)$: $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ des fonctions mesurables bornées, à support compact et de classe $\mathscr{C}^\infty$ en x; on a, (en utilisant la notation ∇ pour désigner le gradient par rapport à la variable x) :

$$E\left[\int_0^s f_1(v,B_v)dB_v \int_0^s f_2(v,B_v)dB_v \int_0^s f_3(v,B_v)dB_v \int_0^s f_4(v,B_v)dB_v \right] =$$
$$= E\left[\int_0^s <f_1,f_3>(v,B_v)dv \int_0^v <f_2(r,B_r),f_4(r,B_r)>dr \; + \right.$$
$$\int_0^s dv \int_0^v dr \int_0^r dq <<<\nabla\nabla f_1,f_3>(v,B_v),f_2(r,B_r)>f_4(q,B_q)> +$$
$$\int_0^s dv \int_0^v dr \int_0^r dq <<<\nabla f_1,\nabla f_3>(v,B_v),f_2(r,B_r)>f_4(q,B_q)> +$$
$$\left.\int_0^s dv \int_0^v dr \int_0^r dq <<<\nabla f_1,f_3>(v,B_v),\nabla f_2(r,B_r)>f_4(q,B_q)>\right] \quad + \text{ tous les termes}$$

obtenus à partir de ceux-là par permutation de (1,2,3,4).

preuve:

On utilise la formule d'Itô et le lemme 10. □

Le lemme 11 permet donc de conclure que

$$E\left[\int_0^s f_1(v,B_v)dB_v \int_0^s f_2(v,B_v)dB_v \int_0^s f_3(v,B_v)dB_v \int_0^s f_4(v,B_v)dB_v\right]$$

est une somme de termes du type:

$$E\Big[\int_0^s dv\int_0^v dr \quad g_1g_3(v,B_v)\ g_2g_4(r,B_r) \ +$$
$$\int_0^s dv\int_0^v dr\int_0^r dq \quad g_1g_3(v,B_v)\ g_2(r,B_r)\ g_4(q,B_q)\Big]$$

où les $g_i(s,x)$ sont des fonctions mesurables bornées, à support compact et de classe $\mathscr{C}^\infty$ en x, s'exprimant à l'aide des dérivées partielles en x des composantes des f_i

Si on applique ce lemme à l'expression

$$E\Big[\ \mathfrak{J}(s_1,\dots,s_{i-1},v_i)\ \ \mathfrak{G}(u_1,\dots,u_{i-1},v_i)\ \ \mathfrak{H}(s_1,\dots,s_{i-1},r_i)\ \ \mathfrak{J}(u_1,\dots,u_{i-1},q_i)\ \Big]$$

on peut remplacer successivement les intégrales stochastiques par rapport à chaque B^h, $h\geq i+1$, dans l'espérance par des intégrales déterministes. Ceci fait apparaitre des intégrales multiples en temps par rapport aux différents mouvements Browniens qui sont soit des intégrales doubles soit des intégrales triples.

Quitte à faire une permutation de $1,\dots,k$, on peut supposer que les intégrales triples interviennent pour les (k-j) derniers mouvements Browniens ($i\leq j$), et alors le terme s'écrit:

$$4n^{-1}\int_0^{nt} ds_1\int_0^{s_1} du_1\int_0^{s_1} ds_2\int_0^{s_2} du_2\dots\int_0^{s_1} ds_{j-1}\int_0^{s_{j-1}} du_{j-1}\int_0^{s_1} ds_j\int_0^{s_j} dr_j\int_0^{r_j} du_j\dots$$
$$\dots\int_0^{s_1} ds_k\int_0^{s_k} dr_k\int_0^{r_k} du_k \quad H(n^{-1}(\sigma,\tau,\upsilon,\nu))$$
$$E\Big[f_1(B^1_{\sigma_1}+\dots+B^k_{\sigma_k})f_2(B^1_{\tau_1}+\dots+B^k_{\tau_k})f_3(B^1_{\upsilon_1}+\dots+B^k_{\upsilon_k})f_4(B^1_{\nu_1}+\dots+B^k_{\nu_k})\Big]$$

où σ_h (resp. τ_h, υ_h, ν_h) peut prendre les valeurs u_h ou s_h si $h<j$ et u_h, r_h, ou s_h si $h\geq j$, et H est une expression faisant intervenir la fonction h.

Dans cette expression, les f_i s'expriment à l'aide des dérivées partielles des composantes de Φ.

De plus, pour $h\leq i$, chaque $B^h_{s_h}$ apparait dans deux des quatre fonctions f_1,f_2,f_3,f_4; $B^h_{u_h}$ apparaissant dans les deux autres si $h<j$, et si $h\geq j$, ce sont $B^h_{u_h}$ et $B^h_{r_h}$ qui apparaissent dans les deux autres fonctions.

On va montrer que l'expression ci-dessus tend vers 0 et pour cela, comme les f_i sont à support compact, on peut les remplacer par $f(x) = K\ e^{-1/2|x|^2}$

Tout d'abord si g est ≥ 0

$$E[\int_u^{nt} g(B_s)ds] \leq \int dx\, E[g(x+B_u)] \int_0^{nt} p_s(x)\, ds = \int dx\, E[g(x+B_u)]\, \kappa_{nt}(x)$$

d'autre part, par hypothèse, $h \leq K$

Ceci entraine que le terme peut être majoré par

$$Kn^{-1} \int_0^{nt} du_1 \int_0^{\infty} du_2 \ldots \int_0^{\infty} du_k \int \ldots \int dx_i \ldots dx_k\; dy_j \ldots dy_k$$

$$\kappa_{nt}(x_i) \ldots \kappa_{nt}(x_k)\quad \kappa_{nt}(y_j) \ldots \kappa_{nt}(y_k)$$

$$E\Big[f_1(B^1_{u_1} + \ldots + B^k_{u_k} + x_\sigma + y_\sigma)\; f_2(B^1_{u_1} + \ldots + B^k_{u_k} + x_\tau + y_\tau)$$

$$f_3(B^1_{u_1} + \ldots + B^k_{u_k} + x_\upsilon + y_\upsilon)\; f_4(B^1_{u_1} + \ldots + B^k_{u_k} + x_\nu + y_\nu)\Big]$$

où $x_\sigma = \sum_{h/\sigma_h = s_h} x_h$ et $y_\sigma = \sum_{h/\tau_h = r_h} y_h$

avec des formules analogues pour τ, υ, ν.

D'après les remarques précédentes, chaque x_h apparait dans deux des fonctions $f_1, \ldots, f_4$ et chaque y_h apparait dans trois d'entre elles.

On a $\int_0^{nt} du_1 \int_0^{\infty} du_2 \ldots \int_0^{\infty} du_k\; p_{u_1 + \ldots + u_k}(x) \leq K\, n^{1/2}$

On en déduit que l'expression au-dessus peut se majorer par

$$Kn^{-1/2} \int \ldots \int dx_i \ldots dx_k\; dy_j \ldots dy_k\; \kappa_{nt}(x_i) \ldots \kappa_{nt}(x_k)\quad \kappa_{nt}(y_j) \ldots \kappa_{nt}(y_k)$$

$$f_1(x + x_\sigma + y_\sigma)\; f_2(x + x_\tau + y_\tau)\; f_3(x + x_\upsilon + y_\upsilon)\; f_4(x + x_\nu + y_\nu)$$

Comme dit précédemment, on peut majorer chaque fonction f_l par $K\, e^{-1/2|x|^2}$

On va montrer que l'intégrale ci-dessus est bornée en n.

On a:

$$\kappa_{nt}(x) = K \int e^{i\langle x, u\rangle}\, |u|^{-2}\, (1 - e^{-1/2|u|^2 nt})\, du = \int e^{i\langle x, u\rangle}\, \hat{\kappa}_{nt}(u)\, du$$

$$e^{-1/2|x|^2} = K \int e^{i\langle x, \rho\rangle}\, e^{-1/2|\rho|^2}\, d\rho$$

L'intégrale à évaluer s'écrit:

$$\int dx \int \ldots \int dx_i \ldots dx_k\; dy_j \ldots dy_k \int \ldots \int du_i \ldots du_k\; dv_j \ldots dv_k \int \ldots \int d\rho_1 \ldots d\rho_4$$

$$\exp i\big(\Sigma\langle u_l, x_l\rangle + \Sigma\langle v_l, y_l\rangle + \langle \rho_1, x + x_\sigma + y_\sigma\rangle + \langle \rho_2, x + x_\tau + y_\tau\rangle +$$

$$\langle \rho_3, x + x_\upsilon + y_\upsilon\rangle + \langle \rho_4, x + x_\nu + y_\nu\rangle\big)$$

$$\hat{\kappa}_{nt}(u_i)\dots\hat{\kappa}_{nt}(u_k)\ \hat{\kappa}_{nt}(v_j)\dots\hat{\kappa}_{nt}(v_k)\quad e^{-1/2(|\rho_1|^2+\dots+|\rho_4|^2)}$$

Dans cette expression nous effectuons l'intégration en dx, dx_1, dy_1 en utilisant la formule $\int e^{i<x,u>}\,dx = K\,\delta_0(u)$.

Ceci introduit les relations suivantes:

$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4 = 0$, $\rho_l+\rho_m = -u_h$ si x_h apparait dans f_l et f_m et $v_h = \rho_l$ si y_h n'apparait pas dans la fonction f_l.

Il en résulte que l'intégrale peut s'écrire, en choisissant comme variables indépendantes ρ_1, ρ_2, et ρ_3,

$$K\iiint d\rho_1\,d\rho_2\,d\rho_3\quad e^{-1/2(|\rho_1|^2+|\rho_2|^2+|\rho_3|^2+|\rho_1+\rho_2+\rho_3|^2)}$$

$$\hat{\kappa}_{nt}(\rho_1+\rho_2)^{\varepsilon_{12}+\varepsilon_{34}}\ \hat{\kappa}_{nt}(\rho_1+\rho_3)^{\varepsilon_{13}+\varepsilon_{24}}\ \hat{\kappa}_{nt}(\rho_2+\rho_3)^{\varepsilon_{14}+\varepsilon_{23}}$$

$$\hat{\kappa}_{nt}(\rho_1)^{\delta_1}\ \hat{\kappa}_{nt}(\rho_2)^{\delta_2}\ \hat{\kappa}_{nt}(\rho_3)^{\delta_3}\ \hat{\kappa}_{nt}(\rho_1+\rho_2+\rho_3)^{\delta_4}$$

où l'on a posé:

ε_{uv} = nombre de x_h qui apparaissent à la fois dans f_u et f_v

δ_u = nombre de y_h qui n'apparaissent pas dans f_u

Remarquons que $\Sigma\varepsilon_{uv} = k-i+1$ et $\Sigma\delta_u = k-j+1$

comme $\hat{\kappa}_{nt}(z) \le |z|^{-2}$ cette intégrale est majorée par

$$\int_{|\rho_1|<1}\int_{|\rho_2|<1}\int_{|\rho_3|<1} d\rho_1\,d\rho_2\,d\rho_3\ |\rho_1|^{-2\delta_1}\ |\rho_2|^{-2\delta_2}\ |\rho_3|^{-2\delta_3}\ |\rho_1+\rho_2+\rho_3|^{-2\delta_4}$$
$$|\rho_1+\rho_2|^{-2(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{34})}\ |\rho_1+\rho_3|^{-2(\varepsilon_{13}+\varepsilon_{24})}\ |\rho_2+\rho_3|^{-2(\varepsilon_{14}+\varepsilon_{23})}$$

finalement on vérifie facilement à l'aide des propriétés des ε et des δ que l'intégrale ci-dessus converge.

REFERENCES:

[1] E.B. Dynkin : Additive functionals of several time-reversible Markov processes. *J. Funct. Anal.*, **42**, *p 64-101 (1981).*

[2] S.N. Evans : Potential theory for a family of several Markov Processes. *Ann. de l'Inst. Henri Poincaré*, **23**, *p 499-530, (1987).*

[3] P.J. Fitzsimmons, T.S. Salisbury : Capacity and energy for multiparameter Markov processes. *preprint.*

[4] D. Geman, J.Horowitz, J. Rosen : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. *Ann. Prob.* **12**, *p 86-107 (1984).*

[5] G. Kallianpur, H. Robbins : Ergodic property of the Brownian motion process. *Proc Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **39**, *p 525-533 (1953).*

[6] Y. Kasahara, S. Kotani : On limit processes for a class of additive functionals of recurrent diffusion processes. *Z. Wahrsch. verw. Gebiete* **49**, *p 133-153 (1979).*

[7] J.F. Le Gall : Propriétés d'intersection des marches aléatoires II. Etude des cas critiques. *Comm. Math. Phys.* **104**, *p 509-528 (1986).*

[8] J.F. Le Gall : Sur le temps local d'intersection du mouvement Brownien plan et la méthode de renormalisation de Varadhan. *Séminaire de Probabilités XIX, Lecture notes in Mathematics n°1123, p 314-332 (1985)*

[9] J.F. Le Gall : Sur la saucisse de Wiener et les points multiples du Mouvement Brownien. *Ann. Prob.,* **14**, *p 1219-1244. (1986).*

[10] Mountford : An extension of a result of Kahane using Rosen's local time of intersection *Stochastics* **23**, *4, p 449-464 (1988).*

[11] G.C. Papanicolaou, D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan : Martingale approach to some limit theorems. *Duke Univ. Math. Ser. III, Statistical Mechanics and Dynamical Systems. (1977).*

[12] D.L. Burkholder : Sharp inequalities for martingales and stochastic integrals. *Colloque Paul Lévy, Astérisque n°157-158, p 75-94. (1988).*

[13] J. Rosen : Tanaka's formula for multiple intersections of planar Brownian motion. *Stoch. Proc. and Appl.,* **23**, *p 131-141 (1986).*

[14] S. Weinryb, M. Yor : Le mouvement Brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$ comme limite centrale de temps locaux d'intersection. *Séminaire de Probabilités XXII, Lecture notes in Mathematics n° 1321, p 225-248 (1988).*

[15] M. Yor : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen. *Séminaire de Probabilités XIX, Lecture notes in Mathematics n°1123, p 332-349 (1985).*