Séminaire de probabilités (Strasbourg)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Éléments de probabilités quantiques. XI. Caractérisation des lois de Bernoulli quantiques d'après K. R. Parthasarathy

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 183-185

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__183_0>

Eléments de Probabilités Quantiques XI

CARACTERISATION DES LOIS DE BERNOULLI QUANTIQUES d'après K.R. PARTHASARATHY

par P.A. Meyer

1 Le but de cet exposé est de présenter une note de Parthasarathy, intitulée "What is a Bernoulli trial in quantum probability", qui montre comment on peut justifier à partir d'axiomes simples de nature probabiliste l'apparition d'algèbres de Clifford en probabilités quantiques. La démonstration que nous donnons ici est différente de celle de Parthasarathy, et un peu plus courte.

Voici l'idée générale. Nous considérons un espace vectoriel *réel* $\mathcal{B}$ de dimension finie, dont les éléments sont appelés *variables aléatoires*. Chaque élément X de $\mathcal{B}$ doit pouvoir être interprété come une v.a. de Bernoulli (*i.e.* une v.a. prenant au plus deux valeurs) au sens classique, et en particulier nous voudrions pouvoir définir les *puissances* de la v.a. X (qui seront des éléments de $\mathcal{B}$: les puissances d'une v.a. de Bernoulli sont des combinaisons linéaires de celle-ci et de 1, v.a. de Bernoulli constante) et prendre *l'espérance* de ces puissances. Il se trouve qu'en fait nous n'aurons besoin que du *carré* de ces v.a.. Nous imposons donc les axiomes suivants

1) Il est donné sur $\mathcal{B}$ une forme linéaire μ, représentant l'espérance.

2) Il est donné un élément $\mathbf{1}$ de $\mathcal{B}$, tel que $\mu(\mathbf{1}) = 1$.

3) Il est donné sur $\mathcal{B}$ une application bilinéaire symétrique $(X,Y) \longmapsto C(X,Y) \in \mathcal{B}$, et l'on pose $C(X,X) = X^2$. On impose les propriétés suivantes : a) $C(\mathbf{1},X) = X$ pour tout $X \in \mathcal{B}$; b) $\mu(X^2) > 0$ pour tout $X \neq 0$.

Cette application bilinéaire a été inspirée à Parthasarathy par le célèbre travail de Jordan–Wigner à l'origine des "algèbres de Jordan", où les axiomes imposés à cette application sont les propriétés de $(X,Y) \longmapsto \frac{1}{2}(XY + YX)$ dans une algèbre associative. En particulier, il est imposé à cette application une forme restreinte d'associativité *qui ne sera pas utilisée ici.*

Nous définissons les puissances de X par récurrence : $X^0 = \mathbf{1}$, $X^{n+1} = C(X, X^n)$. Nous pouvons alors définir $P(X) \in \mathcal{B}$ pour tout polynôme réel, et nous imposons le dernier axiome

4) Pour tout $X \in \mathcal{B}$ il existe une loi de Bernoulli θ_X (une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont le support admet au plus deux points) telle que l'on ait

$$\mu(P(X)) = \int P(t)\, d\theta_X(t)$$

pour tout polynôme réel $P(t)$ sur $\mathbb{R}$.

Le problème consiste à décrire complètement la structure de $\mathcal{B}$. On va montrer que $\mathcal{B}$ peut s'interpréter comme la somme des "chaos" d'ordres 0 et 1 d'une algèbre de Clifford réelle dont $\mathbf{1}$ est l'élément unité, de sorte que $C(X,Y) = \frac{1}{2}(XY + YX)$. Nous décrirons aussi la "loi de probabilité" μ. Ainsi les algèbres de Clifford apparaissent naturellement dès que l'on introduit l'idée (tout à fait surprenante en probabilités classiques) d'un *espace vectoriel* de v.a. de Bernoulli.

Nous n'utiliserons de l'axiome 4) que la conséquence suivante : il existe un polynôme du second degré $P(t) = t^2 - at - b$ nul sur le support de θ_X. On a alors $\mu(P(X)^2) = 0$, donc $P(X) = 0$ d'après l'axiome 3), et finalement $X^2 = b\mathbf{1} + aX$ dans $\mathcal{B}$.

2 Précisons un peu cette dernière remarque. Soit X une v.a. de Bernoulli au sens classique : X prend les valeurs α et β avec les probabilités p, q respectivement. Nous allons décrire la loi de X au moyen de trois paramètres : m la moyenne, σ^2 la variance, et τ que nous allons définir à présent. Nous ramenons d'abord la moyenne à 0 (alors on peut poser $\alpha \leq 0 \leq \beta$, $\alpha = -cq$, $\beta = cp$ avec $c \geq 0$, $\sigma^2 = c^2pq$), et soit $Y = X^2 - \sigma^2$; c'est une nouvelle v.a. de Bernoulli de moyenne nulle, et on vérifie aisément qu'elle est proportionnelle à X : $Y = 2\tau X$, avec $2\tau = c(p-q)$. de sorte que $X^2 = \sigma^2 + Y = \sigma^2 + 2\tau X$. Si l'on rétablit la moyenne m, on a décrit explicitement le polynôme $P(t)$ mentionné plus haut

$$P(t) = (t-\alpha)(t-\beta) = (t-m)^2 - 2\tau(t-m) - \sigma^2 . \tag{1}$$

Si l'on connaît m, σ et τ il est facile de vérifier que la loi est entièrement déterminée.

3 Revenons à $\mathcal{B}$ et posons $(X,Y) = \mu(C(X,Y))$, ce qui définit sur $\mathcal{B}$ une structure euclidienne telle que $\mu(X) = (\mathbf{1}, X)$. Décomposons $\mathcal{B} = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathcal{B}'$. Sur ce dernier espace, sachant qu'il existe une relation $X^2 = b\mathbf{1} + aX$ d'après l'axiome 4), nous pouvons écrire

$$X^2 = (X,X)\mathbf{1} + 2\tau(X)X , \tag{2}$$

où le scalaire $\tau(X)$ est uniquement déterminé si $X \neq 0$. Nous poserons $\tau(0) = 0$ pour avoir une fonction homogène de degré 1. Il est clair sur (2) que la fonction $(X,Y) \longmapsto \tau(X+Y)(X+Y) - \tau(X)X - \tau(Y)Y$ est bilinéaire sur $\mathcal{B}'$, et il est facile d'en déduire que τ est une forme linéaire sur $\mathcal{B}'$, qui peut s'écrire $\tau(X) = (\tau, X)$ avec $\tau \in \mathcal{B}'$. Autrement dit, on a pour $X \in \mathcal{B}'$

$$X^2 = (X,X)\mathbf{1} + 2(\tau, x)X . \tag{3}$$

Supposons d'abord que $\tau = 0$. Ceci est l'expression du carré dans le premier "chaos" de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}$ construite sur l'espace euclidien réel $\mathcal{B}'$, $(\cdot,\cdot)$. Quant à l'espérance, elle vaut $\mu(Y) = (\mathbf{1}, Y)$ sur $\mathcal{B}$.

Passons au cas où $\tau \neq 0$. Pour $Y \in \mathcal{B}$, posons $Y = m\mathbf{1} + X$, $X \in \mathcal{B}'$ de sorte que $m = (Y, \mathbf{1})$. Soit $\varphi = \mathbf{1} + \tau \in \mathcal{B}$; il est facile de vérifier que

$$Y^2 = 2(\varphi, Y)Y + [(Y,Y) - 2(\varphi, Y)(Y, \mathbf{1})]\,\mathbf{1} . \tag{4}$$

Soit $\mathcal{B}''$ l'image de $\mathcal{B}'$ par l'opérateur $AZ = Z - (\varphi, Z)\mathbf{1}$. C'est un supplémentaire (non orthogonal dans $\mathcal{B}$)) de l'espace $\mathbb{R}\mathbf{1}$, et pour $Z \in \mathcal{B}''$ on a $Z^2 = (Z,Z)\mathbf{1}$. Modifions alors la structure euclidienne sur $\mathcal{B}$, sans changer de notation, en le remplaçant par la somme directe $\mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathcal{B}''$. Nous pouvons interpréter alors $\mathcal{B}$ comme la somme des "chaos" d'ordre

0 et 1 de l'algèbre de Clifford construite sur $\mathcal{B}''$, la fonction bilinéaire $C(X,Y)$ valant $\frac{1}{2}(XY + YX)$. En revanche, l'espérance ne vaut plus $\mu(X) = (\mathbf{1}, X)$ pour le nouveau produit scalaire, mais elle est de la forme $\mu(X) = (\mu, X)$ pour un certain vecteur $\mu \in \mathcal{B}$ de la forme $\mu = \mathbf{1} + \lambda$, où $\lambda \in \mathcal{B}''$ est de norme < 1 afin de réaliser l'axiome 3b).