PAUL-ANDRÉ MEYER

# Éléments de probabilités quantiques. X. Approximation de l'oscillateur harmonique (d'après L. Accardi et A. Bach)

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 23 (1989), p. 175-182
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__175_0>

Eléments de Probabilités Quantiques. X

# APPROXIMATION DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE ( d'après L. ACCARDI et A. BACH )

par P.A. Meyer

Cet exposé est consacré à un "théorème de de Moivre-Laplace non commutatif" qui précise de manière très intéressante l'idée intuitive d'approximation de l'espace de Fock par le "bébé Fock" (*i.e.* par un système fini de spins qui commutent). L'article d'Accardi et Bach auquel ce théorème est emprunté, "The Harmonic Oscillator as quantum central limit of Bernoulli processes" (à paraître dans ZW) contient plus de résultats que nous n'en présentons ici, et en particulier des résultats qui se rapprochent davantage d'un vrai théorème limite central, ou d'un principe d'invariance non commutatif. D'autre part, deux articles sur le théorème limite central sont encore en préparation, par Accardi–Bach et Accardi–Liu.

Des résultats très voisins (mais établis par une méthode différente) figurent dans un article de K.R. Parthasarathy "The passage from random walk from diffusion in quantum probability", à paraître dans *Sankhyā*.

Je remercie vivement L. Accardi de nous avoir exposé à Strasbourg une grande partie de son travail avec A. Bach.

## NOTATIONS

**Le spin.** Nous désignons par $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert de dimension 2 $L^2(\mu)$, où $\mu$ attribue la masse $1/2$ à chacun des deux points $\pm 1$ de la droite. Cet espace a deux éléments de base, les fonctions 1 (appelée <u>vecteur vide</u> et notée de préférence $\mathbf{1}$ ) et $\mathbf{x}$. Nous distinguons tout spécialement les trois matrices

$$b^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad b^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad b^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

L'opérateur <u>anti</u>adjoint le plus général $g$ tel que $<\mathbf{1}, g\mathbf{1}> = 0$ s'écrit alors

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ z & 2i\lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \zeta = \bar{z} \text{ et } \lambda \text{ réel.} \tag{1}$$

Notre premier travail consistera à calculer l'opérateur unitaire $e^g$ : lorsque $\lambda = 0$, cet opérateur est <u>l'opérateur de Weyl élémentaire</u> $w(z) = \exp(zb^+ - \bar{z}b^-)$. Pour $\lambda \neq 0$ nous le noterons $w(z, \lambda)$. Les vecteurs $\psi(z) = w(z)\mathbf{1}$ sont appelés <u>vecteurs cohérents élémentaires</u>.

**Systèmes de spins.** Nous formons $n$ copies indépendantes de l'espace précédent, autrement dit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}^{\otimes n}$, avec son vecteur vide $\mathbf{1}^{\otimes n}$ noté $\mathbf{1}_n$ ou encore simplement $\mathbf{1}$. Etant donné un opérateur $h$ sur $\mathcal{H}$, nous pouvons le recopier sur

$\mathcal{H}_n$ en position $1,\ldots,n$ : ainsi $h_1$ désigne $h\otimes I\otimes\ldots\otimes I$ et $h_n$ $I\otimes\ldots\otimes I\otimes h$. Les probabilités classiques suggèrent de faire des normalisations en $\sqrt{n}$ pour un théorème limite central, aussi poserons nous

$$B_n^{\pm}=\frac{b_1^{\pm}+\ldots+b_n^{\pm}}{\sqrt{n}} \quad ;$$

$$W_n(z)=w(z/\sqrt{n})_1\otimes\ldots\otimes w(z/\sqrt{n})_n=\exp(zB_n^+-\bar{z}B_n^-) \quad ;$$

$$\psi_n(z)=W_n(z)\mathbf{1}=(\psi_n(z))^{\otimes n} .$$

Nous n'avons encore rien décidé quant à $B_n^{\circ}$, ni quant aux $W_n(z,\lambda)$. Les objets qui viennent d'être définis s'appellent les opérateurs de Weyl et vecteurs cohérents <u>discrets</u>.

**L'oscillateur harmonique.** Ici nous donnerons moins de détails, parce que le sujet a été abondamment traité dans les exposés antérieurs. Les vecteurs cohérents forment dans ce cas un ensemble total de vecteurs $\psi(z)$ possédant la propriété

$$<\psi(u),\psi(v)>=e^{-(|u|^2+|v|^2)/2}e^{\bar{u}v} .$$

(On ne confondra pas ces vecteurs cohérents de norme 1 avec les vecteurs exponentiels des exposés antérieurs, qui sont d'espérance 1 dans l'état vide). Le vecteur vide est $\mathbf{1}=\psi(0)$. Les opérateurs d'annihilation (de création, de nombre) sont définis par $a^-\psi(z)=z\psi(z)$ ($a^+$ se définit par passage à l'adjoint et $a^{\circ}=a^+a^-$). Les opérateurs de Weyl $W(z)$ sont donnés formellement par $W(z)=\exp(za^+-\bar{z}a^-)$. D'autre part, on a

$$W(z)\psi(u)=e^{i\,\Im m<z,u>}\psi(u+z)$$

(la notation $<z,u>$ représente simplement $\bar{z}u$ !) et plus généralement, on définit l'opérateur unitaire $W(z,\lambda)$ par

$$W(z,\lambda)\psi(u)=e^{i\,\Im m<z,e^{i\lambda}u>}\psi(e^{i\lambda}u+z) .$$

Le problème est d'examiner en quel sens on peut dire que le système fini de spins "tend" vers l'oscillateur harmonique lorsque $n$ devient grand. Ce problème peut être posé de diverses manières. En probabilités classiques, on peut dire qu'une loi binômiale converge vers une gaussienne, on peut aussi dire qu'un cheminement aléatoire tend vers un mouvement brownien. Nous laisserons de côté dans cet exposé le second point de vue, bien qu'il soit traité par Accardi et Bach, et fasse aussi l'objet du travail récent de K.R. Parthasarathy cité au début de l'exposé. Sur le premier point de vue on peut tout de suite dire des choses évidentes, connues depuis les débuts de la mécanique quantique. Par exemple, la relation de commutation $[b^-,b^+]=I-2b^{\circ}$ nous donne immédiatement

$$[\sqrt{n}B_n^-,\sqrt{n}B_n^+]=nI-\sum_{k=1}^{k=n}b_k^{\circ}$$

Divisant par $n$ , il est intuitif que cette relation "tend vers" la relation $[a^-,a^+]=I$. Bien des remarques de ce genre figurent dans la littérature. Cependant, l'article d'Accardi-Bach semble être le premier qui englobe à la fois les trois opérateurs fondamentaux, et dans tous les états sur l'espace probabilisé du spin.

## Quelques calculs

a) Nous partons de la formule (où $g$ est la matrice (1))

$$g^2 = \begin{pmatrix} -z\zeta & -2i\lambda\zeta \\ 2i\lambda z & -z\zeta - 4\lambda^2 \end{pmatrix} = -z\zeta I + 2i\lambda g$$

(cette relation peut aussi se déduire du théorème de Hamilton-Cayley). Faisons alors le changement de variables suivant, en supposant pour commencer que le dénominateur est non nul

$$j = \frac{g - i\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + z\zeta}} \quad ; \quad g = i\lambda + j\sqrt{\lambda^2 + z\zeta}$$

On a $j^2 = -I$, et la formule d'Euler nous donne

$$e^g = e^{i\lambda}(\cos\sqrt{\lambda^2 + z\zeta} + j\sin\sqrt{\lambda^2 + z\zeta})$$

et alors, en remplaçant $j$ par sa valeur

$$(2) \qquad e^g = e^{i\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda^2 + z\zeta} + \frac{\sin\sqrt{\lambda^2 + z\zeta}}{\sqrt{\lambda^2 + z\zeta}}(g - i\lambda)\right)$$

expression qui est encore vraie si $\lambda^2 = -z\zeta$ avec la convention habituelle $\frac{\sin 0}{0} = 1$. Il y a quelque avantage à calculer avec des matrices générales du type (1) plutôt que sur les opérateurs de Weyl, comme nous le verrons plus loin. Remarquons d'autre part que l'emploi des racines carrées complexes ne présente aucun danger : les fonctions $\cos\sqrt{z}$ et $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ sont entières.

b) Application aux opérateurs de Weyl

Prenons $\lambda = 0$, $\zeta = \bar{z}$ et $|z| = r$, nous obtenons

$$w(z) = \cos r + \frac{\sin r}{r}Z \quad \text{où } Z = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{z} \\ z & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Il en résulte

$$\psi(z) = w(z)\mathbf{1} = \cos r\mathbf{1} + \frac{\sin r}{r}z\mathrm{x}$$

on trouve alors

$$<\psi(u), \psi(v)> = \cos|u|\cos|v| + \frac{\sin|u|}{|u|}\frac{\sin|v|}{|v|}\bar{u}v$$

et si l'on remplace $z$ par $z/\sqrt{n}$ on obtient (le symbole $\sim$ signifiant que l'on ne garde que le terme principal)

$$(3) \qquad \psi(z/\sqrt{n}) \sim (1 - \frac{|z|^2}{2n})\mathbf{1} + \frac{z}{\sqrt{n}}\mathrm{x} .$$

et sans aucune difficulté

$$\lim_n <\psi_n(u), \psi_n(v)> = <\psi(u), \psi(v)>$$

qui est déjà une indication de convergence vers l'oscillateur harmonique.

c) Voici un résultat important d'Accardi-Bach : *Pour toute famille finie de nombres complexes* $u, z_1, \ldots, z_k, v$ *, l'élément de matrice*

$$<\psi_n(u), W_n(z_1)\ldots W_n(z_k)\psi_n(v)>$$

*tend vers l'élément de matrice correspondant pour l'osc. harmonique*

$$<\psi(u), W(z_1)\ldots W(z_k)\psi(v)> .$$

Sous cette forme, on ne perd aucune généralité en calculant des éléments de matrice sur le vecteur vide $\mathbf{1}$. En effet, il suffit d'ajouter $W_n(-u) = W_n^*(u)$ et $W_n(v)$ à la collection des opérateurs de Weyl pour atteindre le cas général.

Ayant fait cela, on a intérêt à quitter les opérateurs unitaires, et à remplacer les opérateurs de Weyl $w(z) = \exp(zb^+ - \bar{z}b^-)$ par les opérateurs $\omega(z,\zeta) = \exp(zb^+ - \zeta b^-)$, et les $W_n(z)$, $W(z)$ par les opérateurs correspondants $\Omega_n(z,\zeta) = \exp(zB_n^+ - \zeta B_n^-)$, $\Omega(z,\zeta) = \exp(za^+ - \zeta a^-)$. En effet, nous aurons ici affaire à des fonctions <u>entières</u> des variables complexes $z_1, \zeta_1, \ldots, z_k, \zeta_k$ et nous pourrons (après avoir borné ces fonctions de manière simple) dériver autant de fois que nous le voudrons notre passage à la limite. Mais alors, nous obtiendrons un résultat de convergence des éléments de matrice (relatifs à $\mathbf{1}$ ou aux vecteurs cohérents) de polynômes quelconques en les $B_n^\pm$ vers ceux des polynômes correspondants en les $a^\pm$.

Nous commençons par remarquer que l'élément de matrice

$$<\mathbf{1}, \Omega_n(z_1,\zeta_1)\ldots\Omega_n(z_k,\zeta_k)\mathbf{1}>$$

est égal à

$$<\mathbf{1}, \omega(z_1/\sqrt{n}, \zeta_1/\sqrt{n})\ldots\omega(z_k/\sqrt{n}, \zeta_k/\sqrt{n})\mathbf{1}>^n .$$

Or nous avons évalué plus haut

$$\omega(z,\zeta) \sim \begin{pmatrix} 1 - \frac{z\zeta}{2n} & \frac{-\zeta}{\sqrt{n}} \\ \frac{z}{\sqrt{n}} & 1 - \frac{z\zeta}{2n} \end{pmatrix}$$

Prenons un exemple immédiat :

$$<\psi(u/\sqrt{n}), w(z/\sqrt{n})\psi(v/\sqrt{n})> \sim 1 - \frac{|u|^2 + |v|^2 + |z|^2 + 2\bar{z}v}{2n} + \frac{2\bar{u}(z+v)}{2n}$$

et lorsqu'on élève à la puissance $n$ et que l'on passe à la limite on obtient bien $<\psi(u), W(z)\psi(v)> = e^{i\,\Im m(\bar{z}v)}<\psi(u), \psi(z+v)>$. Le cas des produits multiples exige une mise en forme un peu plus lourde, mais ne pose pas de vrais problèmes.

## A propos de l'opérateur de nombre

Nous arrivons maintenant à une question un peu plus inattendue : comment faut il définir $c_n$ pour que

$$B_n^{\circ} = \frac{b_1^{\circ} + \ldots + b_n^{\circ}}{c_n}$$

soit tel que les élts. de matrice $<\psi_n(u), e^{i\lambda B_n^{\circ}} \psi_n(v)>$ convergent vers $<\psi(u), e^{i\lambda a^{\circ}} \psi(v)>$ ? La réponse est que $c_n = 1$ convient.

Ce phénomène est tout à fait curieux du point de vue classique : une v.a. d'espérance nulle et de variance finie ne doit elle pas être normalisée par $\sqrt{n}$ ? Ici, dans l'état vide l'opérateur de nombre fait mieux que d'avoir une variance finie : sa variance est *nulle*, et c'est pour cela qu'aucune normalisation n'est nécessaire.

Pour voir que $c_n = 1$ convient, commençons par un cas très simple et calculons l'élt. de matrice $<\psi(u/\sqrt{n}), e^{i\lambda b^{\circ}} \psi(v/\sqrt{n})> = \mu$ ; comme $(b^{\circ})^2 = b^{\circ}$, on a $e^{i\lambda b^{\circ}} = I + (e^{i\lambda} - 1) b^{\circ}$, donc

$$\mu \sim 1 - \frac{|u|^2}{2n} - \frac{|v|^2}{2n} + e^{i\lambda} \frac{\bar{u} v}{n} .$$

D'autre part, $e^{i\lambda a^{\circ}} \psi(v) = \psi(e^{i\lambda} v)$, et on obtient bien le même résultat.

On remarquera que l'opérateur $e^{i\lambda b^{\circ}}$ reste fixe loin de $I$, mais que l'élément de matrice de cet opérateur entre les vecteurs $\psi(u/\sqrt{n})$ et $\psi(v/\sqrt{n})$ tend vers 1.

Il est alors naturel d'introduire les opérateurs de Weyl $W_n(z, \lambda)$, et de se demander si leurs éléments de matrice sur les vecteurs cohérents discrets $\psi_n(u)$ tendent vers les éléments de matrice, sur les vecteurs cohérents $\psi(u)$ correspondants, des opérateurs $W(z, \lambda)$...ou peut être (c'est ce que montrera l'expérience) d'autres opérateurs de Weyl. Plus généralement, il y aurait lieu 1) d'étudier la convergence d'opérateurs $\Omega_n(z, \zeta, \lambda)$, fonctions entières de trois paramètres complexes, et se réduisant aux précédents pour $\zeta = \bar{z}$ et $\lambda$ réel ; 2) de se poser les mêmes problèmes pour les éléments de matrices de produits finis de tels opérateurs. Comme nous ne savons démontrer le résultat que par un calcul barbare, nous nous abstiendrons de développer ces questions.

L'expression que nous avons à calculer est

$$\lim_n \left(<\psi(u/\sqrt{n}), \exp(2i\lambda b^{\circ} + k/\sqrt{n}) \psi(v/\sqrt{n})>\right)^n \tag{4}$$

où nous avons posé

$$k = \begin{pmatrix} 0 & -\zeta \\ z & 0 \end{pmatrix} .$$

Nous allons déduire cela de la formule (2). Posons aussi pour simplifier l'écriture

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \frac{z\zeta}{n}} \sim \lambda + \frac{z\zeta}{2\lambda n} .$$

La matrice $\exp(2i\lambda b^0 + k/\sqrt{n})$ s'écrit

$$e^{i\lambda}\begin{pmatrix} \cos\alpha - i\lambda\frac{\sin\alpha}{\alpha} & -\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\zeta}{\sqrt{n}} \\ \frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{z}{\sqrt{n}} & \cos\alpha + i\lambda\frac{\sin\alpha}{\alpha} \end{pmatrix} .$$

Ensuite, $\cos\alpha \sim \cos\lambda - \sin\lambda\frac{z\zeta}{2\lambda n}$ et

$$\lambda\frac{\sin\alpha}{\alpha} \sim \sin\lambda + \cos\lambda\frac{z\zeta}{2\lambda n} - \sin\lambda\frac{z\zeta}{2n\lambda^2} .$$

Reste donc comme terme principal

$$(5) \qquad M_n(z,\zeta,2\lambda) \sim e^{i\lambda}\begin{pmatrix} e^{-i\lambda} - i\frac{z\zeta}{2\lambda n}(e^{-i\lambda} - \frac{\sin\lambda}{\lambda}) & -\frac{\sin\lambda}{\lambda}\frac{\zeta}{\sqrt{n}} \\ \frac{\sin\lambda}{\lambda}\frac{z}{\sqrt{n}} & e^{i\lambda} + i\frac{z\zeta}{2\lambda n}(e^{i\lambda} - \frac{\sin\lambda}{\lambda}) \end{pmatrix}$$

Bien entendu, pour examiner une convergence de fonctions entières, il aurait fallu regarder un peu plus que les termes principaux, et contrôler les restes. Une remarque : dans un développement d'exponentielle comme celui-ci, on peut être tenté d'évaluer le terme principal par la formule de Campbell-Hausdorff au premier ordre (qui fait intervenir les matrices $\mathrm{ad}^m_{b^0} k$, faciles à calculer explicitement). Cette série ne suffit pas, comme le montre le cas où $\lambda = 0$, où elle se réduit à $e^{k/\sqrt{n}} \sim I + k/\sqrt{n}$, alors que le résultat exige le terme du second ordre.

Pour $\lambda = 0$, la matrice (5) redonne le terme principal de $w(z)$ obtenu plus haut, ce qui constitue une bonne vérification, sans laquelle on n'aurait pas d'espoir d'obtenir une convergence de fonctions entières.

Le problème qui nous est posé est celui de la convergence d'éléments de matrice

$$<\psi_n(u), M_n(z_1,\zeta_1,2\lambda_1)\dots M_n(z_k,\zeta_k,2\lambda_k)\psi_n(v)>^n$$

(tout est fixe sauf $n$) vers des éléments de matrice

$$<\psi(u), M(z_1,\zeta_1,2\lambda_1)\dots M(z_k,\zeta_k,2\lambda_k)\psi(v)>$$

où les opérateurs $M(z,\zeta,2\lambda)$ sont, on l'espère, des fonctions simples des opérateurs de Weyl de l'oscillateur harmonique. Nous allons traiter le cas où $k = 1$, mais en principe le développement limité à l'ordre 1 d'un produit fini de matrices ne dépasse pas les capacités humaines.

Passons donc au calcul explicite des éléments de matrice (4) (avant exponentiation) : ceux-ci valent à $o(1/n)$ près

$$1 - \frac{|v|^2}{2n} - \frac{|u|^2}{2n} - \frac{z\zeta}{2n}\frac{i}{\lambda}(1 - e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda}) - \frac{\zeta v}{n}e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \frac{\bar{u}z}{n}e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + e^{2i\lambda}\frac{\bar{u}v}{n}$$

et après passage à la limite, l'élément de matrice est l'exponentielle de

$$-\frac{|v|^2}{2} - \frac{|u|^2}{2} - \frac{z\zeta}{2}\frac{i}{\lambda}(1 - e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda}) + (\bar{u}z - \zeta v)e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \bar{u}ve^{2i\lambda} .$$

Posons $e^{2i\lambda}v = w$, et prenons $\zeta = \bar{z}$ : cela devient

$$-\frac{|w|^2}{2} - \frac{|u|^2}{2} - \frac{|z|^2}{2}\frac{i}{\lambda}(1 - e^{i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda}) + \bar{u}z\frac{\sin\lambda}{\lambda}e^{i\lambda} - \bar{z}we^{-i\lambda}\frac{\sin\lambda}{\lambda} + \bar{u}w .$$

Comparons avec $<\psi(u), W(Z, 2\lambda)\psi(v)>$, qui est l'exponentielle de

$$-\frac{|w|^2}{2} - \frac{|u|^2}{2} - \frac{|Z|^2}{2} + \bar{u}w - \bar{Z}w + \bar{u}Z .$$

Nous voyons que les expressions sont très voisines si l'on prend

$$Z = z\frac{\sin\lambda}{\lambda}e^{i\lambda}$$

et que l'on a en fait

$$\begin{aligned} &\lim_n <\psi_n(u), W_n(z, 2\lambda)\psi_n(v)> = \\ (6)\qquad &= e^{-f(\lambda)|z|^2/2} <\psi(u), W(z\frac{\sin\lambda}{\lambda}e^{i\lambda}, 2\lambda)\psi(u)> \end{aligned}$$

avec $f(\lambda) = \frac{i}{\lambda}(1 - \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda})$ qui est un pur facteur de phase. Finalement

$$M(z, \bar{z}, 2\lambda) = e^{-\frac{i}{\lambda}(1 - \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda})|z|^2/2} W(z\frac{\sin\lambda}{\lambda}e^{i\lambda}, 2\lambda) . \tag{7}$$

Et maintenant, voici une conséquence assez inattendue : $M(z, \bar{z}, 2\lambda$ est la "limite en loi" de $M_n(z, \bar{z}, 2\lambda) = \exp(zB_n^+ - \bar{z}B_n^- + 2i\lambda B_n^\circ)$, donc on s'attend à avoir formellement $M(z, \bar{z}, 2\lambda) = \exp(za^+ - \bar{z}a^- + 2i\lambda a^\circ)$ ; autrement dit, $M(tz, t\bar{z}, 2t\lambda)$ doit être un groupe unitaire à un paramètre dont on connaît le générateur. Ceci est un énoncé qui ne fait plus intervenir aucun passage à la limite et qui est susceptible de vérification sur l'expression explicite des opérateurs $W(z, 2\lambda)$. Un calcul ennuyeux, mais élémentaire, montre qu'il en est bien ainsi.

Quelle est la signification de ce résultat? De même que la représentation de Weyl classique est une représentation unitaire projective du groupe additif $\mathbb{C}$ et une vraie représentation unitaire du groupe nilpotent de Heisenberg, nous venons de partir d'une représentation unitaire projective du groupe des déplacements de $\mathbb{C}$, pour construire une vraie représentation unitaire d'un groupe de Lie résoluble, dont l'algèbre de Lie a quatre générateurs $I$, $a^+$, $a^\circ$, $a^-$ tels que

$$[a^-, a^+] = I , \ [a^\circ, a^+] = a^+ , \ [a^\circ, a^-] = -a^- .$$

Bien entendu, ce résultat doit être "connu", mais c'est une suggestion amusante du théorème limite central d'Accardi-Bach.

Il est susceptible d'une interprétation probabiliste : calculons la fonction caractéristique de la v.a. (opérateur autoadjoint) $H(z, \bar{z}, \lambda) = za^+ + \bar{z}a^- + 2\lambda a^\circ$ dans l'état $\psi(v)$. Comme on a

$$M(tz, t\bar{z}, 2t\lambda) = \exp(itH(z, \bar{z}, \lambda)),$$

cette fonction caractéristique vaut

$$<\psi(v), M(tz, t\bar{z}, 2t\lambda)\psi(v)> = M(tz, t\bar{z}, 2t\lambda) =$$
$$= \exp\Big(\big|\tfrac{z}{2\lambda} + iv\big|^2 (e^{2i\lambda t} - 1) - it\frac{|z|^2}{2\lambda}\Big) .$$

On reconnaît là la fonction caractéristique d'une loi de Poisson décalée, portée par l'ensemble $\{4n\lambda - |z|^2/2\lambda\}_{n\in\mathbb{N}}$ , et dont l'intensité est $|\frac{z}{2\lambda} + iv|^2$. Je dois cette remarque à K.R. Parthasarathy.

Eléments de Probabilités Quantiques XI

# CARACTERISATION DES LOIS DE BERNOULLI QUANTIQUES d'après K.R. PARTHASARATHY

par P.A. Meyer

1 Le but de cet exposé est de présenter une note de Parthasarathy, intitulée "What is a Bernoulli trial in quantum probability", qui montre comment on peut justifier à partir d'axiomes simples de nature probabiliste l'apparition d'algèbres de Clifford en probabilités quantiques. La démonstration que nous donnons ici est différente de celle de Parthasarathy, et un peu plus courte.

Voici l'idée générale. Nous considérons un espace vectoriel *réel* $\mathcal{B}$ de dimension finie, dont les éléments sont appelés *variables aléatoires*. Chaque élément $X$ de $\mathcal{B}$ doit pouvoir être interprété come une v.a. de Bernoulli (*i.e.* une v.a. prenant au plus deux valeurs) au sens classique, et en particulier nous voudrions pouvoir définir les *puissances* de la v.a. $X$ (qui seront des éléments de $\mathcal{B}$ : les puissances d'une v.a. de Bernoulli sont des combinaisons linéaires de celle-ci et de $1$, v.a. de Bernoulli constante) et prendre *l'espérance* de ces puissances. Il se trouve qu'en fait nous n'aurons besoin que du *carré* de ces v.a.. Nous imposons donc les axiomes suivants

*1) Il est donné sur $\mathcal{B}$ une forme linéaire $\mu$, représentant l'espérance.*

*2) Il est donné un élément $\mathbf{1}$ de $\mathcal{B}$, tel que $\mu(\mathbf{1}) = 1$.*

*3) Il est donné sur $\mathcal{B}$ une application bilinéaire symétrique $(X,Y) \longmapsto C(X,Y) \in \mathcal{B}$, et l'on pose $C(X,X) = X^2$. On impose les propriétés suivantes :* a) $C(\mathbf{1},X) = X$ *pour tout* $X \in \mathcal{B}$ ; *b)* $\mu(X^2) > 0$ *pour tout* $X \neq 0$.

Cette application bilinéaire a été inspirée à Parthasarathy par le célèbre travail de Jordan–Wigner à l'origine des "algèbres de Jordan", où les axiomes imposés à cette application sont les propriétés de $(X,Y) \longmapsto \frac{1}{2}(XY + YX)$ dans une algèbre associative. En particulier, il est imposé à cette application une forme restreinte d'associativité *qui ne sera pas utilisée ici.*

Nous définissons les puissances de $X$ par récurrence : $X^0 = \mathbf{1}$, $X^{n+1} = C(X, X^n)$. Nous pouvons alors définir $P(X) \in \mathcal{B}$ pour tout polynôme réel, et nous imposons le dernier axiome

*4) Pour tout $X \in \mathcal{B}$ il existe une loi de Bernoulli $\theta_X$ (une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$ dont le support admet au plus deux points) telle que l'on ait*

$$\mu(P(X)) = \int P(t)\, d\theta_X(t)$$

*pour tout polynôme réel $P(t)$ sur $\mathbb{R}$.*

Le problème consiste à décrire complètement la structure de $\mathcal{B}$. On va montrer que $\mathcal{B}$ peut s'interpréter comme la somme des "chaos" d'ordres 0 et 1 d'une algèbre de Clifford réelle dont $\mathbf{1}$ est l'élément unité, de sorte que $C(X,Y) = \frac{1}{2}(XY + YX)$. Nous décrirons aussi la "loi de probabilité" $\mu$. Ainsi les algèbres de Clifford apparaissent naturellement dès que l'on introduit l'idée (tout à fait surprenante en probabilités classiques) d'un *espace vectoriel* de v.a. de Bernoulli.

Nous n'utiliserons de l'axiome 4) que la conséquence suivante : il existe un polynôme du second degré $P(t) = t^2 - at - b$ nul sur le support de $\theta_X$. On a alors $\mu(P(X)^2) = 0$, donc $P(X) = 0$ d'après l'axiome 3), et finalement $X^2 = b\mathbf{1} + aX$ dans $\mathcal{B}$.

**2** Précisons un peu cette dernière remarque. Soit $X$ une v.a. de Bernoulli au sens classique : $X$ prend les valeurs $\alpha$ et $\beta$ avec les probabilités $p$, $q$ respectivement. Nous allons décrire la loi de $X$ au moyen de trois paramètres : $m$ la moyenne, $\sigma^2$ la variance, et $\tau$ que nous allons définir à présent. Nous ramenons d'abord la moyenne à $0$ (alors on peut poser $\alpha \leq 0 \leq \beta$, $\alpha = -cq$, $\beta = cp$ avec $c \geq 0$, $\sigma^2 = c^2pq$), et soit $Y = X^2 - \sigma^2$ ; c'est une nouvelle v.a. de Bernoulli de moyenne nulle, et on vérifie aisément qu'elle est proportionnelle à $X$ : $Y = 2\tau X$, avec $2\tau = c(p-q)$. de sorte que $X^2 = \sigma^2 + Y = \sigma^2 + 2\tau X$. Si l'on rétablit la moyenne $m$, on a décrit explicitement le polynôme $P(t)$ mentionné plus haut

$$P(t) = (t-\alpha)(t-\beta) = (t-m)^2 - 2\tau(t-m) - \sigma^2 . \tag{1}$$

Si l'on connaît $m$, $\sigma$ et $\tau$ il est facile de vérifier que la loi est entièrement déterminée.

**3** Revenons à $\mathcal{B}$ et posons $(X,Y) = \mu(C(X,Y))$, ce qui définit sur $\mathcal{B}$ une structure euclidienne telle que $\mu(X) = (\mathbf{1}, X)$. Décomposons $\mathcal{B} = \mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathcal{B}'$. Sur ce dernier espace, sachant qu'il existe une relation $X^2 = b\mathbf{1} + aX$ d'après l'axiome 4), nous pouvons écrire

$$X^2 = (X,X)\mathbf{1} + 2\tau(X)X , \tag{2}$$

où le scalaire $\tau(X)$ est uniquement déterminé si $X \neq 0$. Nous poserons $\tau(0) = 0$ pour avoir une fonction homogène de degré $1$. Il est clair sur (2) que la fonction $(X,Y) \longmapsto \tau(X+Y)(X+Y) - \tau(X)X - \tau(Y)Y$ est bilinéaire sur $\mathcal{B}'$, et il est facile d'en déduire que $\tau$ est une forme linéaire sur $\mathcal{B}'$, qui peut s'écrire $\tau(X) = (\tau, X)$ avec $\tau \in \mathcal{B}'$. Autrement dit, on a pour $X \in \mathcal{B}'$

$$X^2 = (X,X)\mathbf{1} + 2(\tau, x)X . \tag{3}$$

Supposons d'abord que $\tau = 0$. Ceci est l'expression du carré dans le premier "chaos" de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}$ construite sur l'espace euclidien réel $\mathcal{B}'$, $(\cdot,\cdot)$. Quant à l'espérance, elle vaut $\mu(Y) = (\mathbf{1}, Y)$ sur $\mathcal{B}$.

Passons au cas où $\tau \neq 0$. Pour $Y \in \mathcal{B}$, posons $Y = m\mathbf{1} + X$, $X \in \mathcal{B}'$ de sorte que $m = (Y, \mathbf{1})$. Soit $\varphi = \mathbf{1} + \tau \in \mathcal{B}$ ; il est facile de vérifier que

$$Y^2 = 2(\varphi, Y)Y + [(Y,Y) - 2(\varphi, Y)(Y, \mathbf{1})]\,\mathbf{1} . \tag{4}$$

Soit $\mathcal{B}''$ l'image de $\mathcal{B}'$ par l'opérateur $AZ = Z - (\varphi, Z)\mathbf{1}$. C'est un supplémentaire (non orthogonal dans $\mathcal{B}$)) de l'espace $\mathbb{R}\mathbf{1}$, et pour $Z \in \mathcal{B}''$ on a $Z^2 = (Z,Z)\mathbf{1}$. Modifions alors la structure euclidienne sur $\mathcal{B}$, sans changer de notation, en le remplaçant par la somme directe $\mathbb{R}\mathbf{1} \oplus \mathcal{B}''$. Nous pouvons interpréter alors $\mathcal{B}$ comme la somme des "chaos" d'ordre

$0$ et $1$ de l'algèbre de Clifford construite sur $\mathcal{B}''$, la fonction bilinéaire $C(X,Y)$ valant $\frac{1}{2}(XY+YX)$. En revanche, l'espérance ne vaut plus $\mu(X)=(\mathbf{1},X)$ pour le nouveau produit scalaire, mais elle est de la forme $\mu(X)=(\mu,X)$ pour un certain vecteur $\mu\in\mathcal{B}$ de la forme $\mu=\mathbf{1}+\lambda$, où $\lambda\in\mathcal{B}''$ est de norme $<1$ afin de réaliser l'axiome 3b).