SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

RÉMI LÉANDRE

PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur le développement d'une diffusion en chaos de Wiener

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 161-164

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__161_0>

SUR LE DEVELOPPEMENT D'UNE DIFFUSION EN CHAOS DE WIENER

par R. Léandre et P.A. Meyer

1. Introduction

Cette note fait suite à deux articles de Hu–Meyer, publiés dans le volume précédent du *Séminaire*. Elle peut être lue indépendamment (aux motivations près). Nous ne prétendons d'ailleurs pas donner de résultats définitifs, mais seulement un rapport sur l'état de la question à l'Automne 88, présenté par nous au Colloque d'Analyse Stochastique à Oberwolfach. Notre exposé a amené D. Nualart à une démonstration plus directe d'un résultat voisin, que l'on trouvera dans ce même volume.

Considérons une équation différentielle stochastique très régulière (coefficients C^∞ à dérivées de tous ordres bornées), avec condition initiale $X_0 = x$

$$dX_t^i = a_\lambda^i(X_t)\,dB_t^\lambda + a_0^i(X_t)\,dB_t^0 \tag{1}$$

Les indices $i = 1, \ldots, d$ servent à désigner les composantes de la solution (qui pourraient être aussi des coordonnées locales dans une variété), tandis que les indices $\lambda \in \{1, \ldots, \nu\} = N$ identifient les semimartingales directrices : $dB_t^0 = dt$ par convention, les processus B_t^λ sont des mouvements browniens standard, et d est une différentielle, soit au sens d'Ito, soit au sens de Stratonovitch. L'une des motivations des articles de Hu–Meyer était l'idée de *modifier les paramètres de variance*, en vue de l'extension éventuelle à des variances complexes (intégrales de Feynman). En particulier, le cas limite de variance nulle n'est pas trivial, et doit être conçu comme l'équation différentielle ordinaire avec un terme de contrôle $h \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^N)$

$$\dot{x}_t^i = a_\lambda^i(x_t)\,h_t^\lambda + a_0^i(x_t)\,. \tag{2}$$

Développons la solution de (1) en chaos de Wiener sous la forme

$$h\circ X_\tau = \sum_{m,\alpha} \int_{s_1 < \ldots < s_m < \tau} F(x, s_1, \alpha_1, \ldots, s_m, \alpha_m, \tau, h)\, dB_{s_1}^{\alpha_1} \ldots dB_{s_m}^{\alpha_m} \tag{3}$$

où α est une application de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, N\}$. Dans cette note, nous allons indiquer une formule explicite de calcul de ces coefficients, et montrer qu'ils possèdent d'excellentes propriétés de régularité en $(s_1, \ldots, s_n)$. En particulier, ces coefficients possèdent des limites sur les diagonales. Ceci est très important pour le problème des changements de variance, car les formules permettant de passer des coefficients de Wiener relatif à une variance donnée aux coefficients relatifs à une autre variance font intervenir les traces sur les diagonales, de même que les formules permettant de passer des coefficients d'Ito aux coefficients de Stratonovich. Dans le travail de Hu–Meyer, ces questions n'étaient abordées qu'en dimension 1.

2. La formule d'Isobe–Sato

Soit une v.a. $f \in L^2$, admettant des coefficients de Wiener $F(s_1, \alpha_1, \ldots, s_n, \alpha_n)$ (les notations sont les mêmes que plus haut, mais f est une v.a. générale, de sorte que la mention de τ, x, h a disparu). On obtient ces coefficients par la relation formelle

$$F(s_1, \alpha_1, \ldots, s_n, \alpha_n) ds_1 \ldots ds_n = \mathbb{E}[f dB_{s_1}^{\alpha_1} \ldots dB_{s_n}^{\alpha_n}] \ , \tag{4}$$

qui exprime simplement la propriété d'isométrie des intégrales multiples d'Ito, et peut se transformer en une formule rigoureuse de dérivation donnant le coefficient p.p. au sens de Lebesgue. Dans le cas des équations différentielles stochastiques, on aboutit ainsi à la formule suivante. Pour $\lambda = 1, \ldots, N$ désignons par A_λ le champ de vecteurs de composantes a_λ^i, considéré comme opérateur différentiel $(\sum_i a_\lambda^i D_i)$ – nous n'utilisons pas les coefficients a_0^i, qui ne s'interprètent comme les composantes d'un champ de vecteurs que si l'équation est prise au sens de Stratonovitch. Désignons par (P_t) le semi–groupe de transition du processus de Markov associé à l'équation (1). Alors on a la *formule d'Isobe-Sato*

$$\begin{aligned} &F(x, s_1, \alpha_1, \ldots, s_m, \alpha_m, \tau, h) = \\ &\qquad \int P_{\tau - s_1}(, dy_1) A_{\alpha_1} P_{s_2 - s_1}(y_1, dy_2) \ldots A_{\alpha_m} P_{\tau - s_m}(y_m, h) \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dans sa note sur le même sujet, D. Nualart utilise une autre évaluation des coefficients, au moyen des opérateurs de dérivation sur l'espace de Wiener, et obtient alors une démonstration très simple de leur continuité.

3. Propriétés de régularité des coefficients

Nous allons généraliser notre problème, en étudiant une expression du type d'Isobe-Sato, mais dans laquelle les champs de vecteurs A_λ sont remplacés par des opérateurs différentiels d'ordre arbitraire sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, portant sur les deux variables

$$A_\lambda = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} c_{\alpha,\beta}^\lambda(x, y) \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} \tag{6}$$

où α, β sont des multi–indices, et les coefficients $c_{\alpha,\beta}^\lambda$ sont C^∞, bornés ainsi que toutes leurs dérivées. Nous posons ensuite

$$\int A_\lambda P_t(x, dy) h(y) = \sum_{\alpha,\beta} \int \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} P_t(\, x \,, c_{\alpha,\beta}^\lambda(x, \cdot)(-1)^{|\beta|} \frac{\partial^\beta h}{\partial y^\beta}\,) \,.$$

Il y a ici une intégration par parties implicite : si l'on avait $P_t(x, dy) = p_t(x, y)\, dy$ avec une densité C^∞, l'expression précédente correspondrait à l'opération de A_λ sur les deux variables de la densité. Nous nous donnons encore un opérateur différentiel A_0 du même type, et nous introduisons la fonction

$$G(x, s_1, \ldots, s_m, t, h) = \int A_0 P_{s_1}(x, dy_1) \int A_1 P_{s_2 - s_1}(y_1, dy_2) \\ \ldots \int A_m P_{t-s_m}(y_m, dy)\, h(y) \,. \qquad (7)$$

Les coefficients (5) sont des expressions du type (7), avec des opérateurs qui opèrent seulement sur la première variable. Toutefois, les dérivations par rapport à la seconde variable apparaissent dès que l'on intègre par parties. Notre théorème principal est alors le suivant

THÉORÈME. *Si h est C^∞ et admet des dérivées bornées de tous ordres, la fonction $G(x, s_1, \ldots, s_m, t, h)$, initialement définie sur le simplexe ouvert $s_1 < \ldots < s_m < t$, admet un prolongement C^∞ au simplexe fermé $s_1 \leq \ldots \leq s_m \leq t$.*

Une variante (que nous ne démontrerons pas en détail) concerne le cas où l'on est sous les hypothèses de Hörmander, et où les noyaux $P_t(x, dy)$ admettent donc des densités C^∞ $p_t(x, y)$. Dans ce cas, on peut aussi définir les "densités" $G(x, s_1, \ldots, s_m, t, y)$, et celles-ci sont également prolongeables en fonctions C^∞ sur le simplexe fermé.

La démonstration du théorème repose sur le lemme suivant, dans lequel on désigne par $X_t(x, \omega)$ le flot de l'équation différentielle stochastique (1). On sait que ce flot dépend de manière C^∞ de la variable x, et nous désignerons par $D^\alpha X_t(x)$ la dérivée partielle d'ordre α correspondante. Ces dérivées partielles sont des v.a. admettant des moments de tous les ordres, uniformément bornés en x.

LEMME. *On peut représenter la fonction $G(x, s_1, \ldots, s_m, t, h)$ (7) comme espérance d'un polynôme en les fonctions*

—$f(X_{s_j}(x), X_{s_{j+1}}(x))$, où f parcourt l'ensemble des dérivées partielles des coefficients $c^\lambda_{\alpha,\beta}$;

—$D^\alpha X_{s_{j+1}}(X_{s_j})$ et $D^\alpha f(X_t)$.

DEMONSTRATION. Nous allons d'abord traiter trois cas élémentaires, pour que le lecteur se rende compte de l'écriture. Nous avons d'abord le cas où l'opérateur différentiel est de degré 0. Par exemple

$$\int c_0(x, y_1)\, P_{s_1}(x, dy_1)\, c_1(y_1, y)\, P_{t-s_1}(y_1, dy)\, h(y)$$

s'exprime comme l'espérance

$$\mathbb{E}[c_0(X_0(x), X_{s_1}(x))\, c_1(X_{s_1}(x), X_t(x))\, h(X_t(x))] \,.$$

Ensuite, considérons le cas de

$$\int \frac{\partial}{\partial x_i}(c_0(x, y)\, P_t(x, dy))\, h(y) \quad \text{et} \quad \int c_0(x, y) \frac{\partial}{\partial y_i} P_t(x, dy)\, h(y) \,.$$

Le second est trivial, la dérivation passant sur h. Quant au premier, il vaut

$$\mathbb{E}[\ \frac{\partial}{\partial x_i}(c_0(X_0(x), X_t(x))\, h(X_t(x))\,)\ ]$$

les dérivations portant sur x, d'où trois termes, par exemple

$$\mathbb{E}[\ \frac{\partial c_0}{\partial y_i}(X_0(x), X_t(x))\, D_i X_t(x)\, h(X_t(x))\,]\ .$$

Le raisonnement qui a permis de traiter ces cas simples est entièrement général, et se met en forme comme une récurrence sur le degré total de l'opérateur différentiel. Chaque fois que l'on augmente le degré d'une unité, on ajoute quelque part une dérivée $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ou $\frac{\partial}{\partial y_i}$ portant sur un opérateur du semi-groupe. Si la dérivée $\frac{\partial}{\partial x_i}$ porte sur le premier terme ou la dérivée $\frac{\partial}{\partial y_i}$ sur le dernier, le raisonnement est exactement comme ci-dessus. Sinon, on utilise la propriété de Markov du flot.

Ce lemme étant établi, revenons à la formule d'Isobe-Sato. Il est d'abord clair que les coefficients sont des fonctions continues sur le simplexe fermé. D'autre part, l'équation de la chaleur permet de calculer les dérivées de tous ordres par rapport aux s_i sur le simplexe ouvert, et de leur appliquer à nouveau le lemme, qui montre que toutes ces dérivées existent et sont continues sur le simplexe fermé. Cela démontre le théorème.