

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA

K. HAMZA

La propriété de représentation prévisible dans la filtration naturelle d'un ensemble régénératif

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 23 (1989), p. 131-138

http://www.numdam.org/item?id=SPS_1989__23__131_0

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**LA PROPRIETE DE REPRESENTATION PREVISIBLE DANS LA
FILTRATION NATURELLE D'UN ENSEMBLE REGENERATIF**

par J. AZEMA et K. HAMZA

1. Notations et Rappels.

Les notations sont celles de [1]. Rappelons les plus importantes ; on notera :

- Ω l'espace canonique des fermés de \mathbb{R}_+ de mesure de Lebesgue nulle.
- $g_t(\omega) = \sup\{s ; s < t, s \in \omega\}$ $g_t^+(\omega) = \sup\{s ; s \leq t, s \in \omega\}$
 $d_t(\omega) = \inf\{s ; s > t, s \in \omega\}$
- $H = \{t, \omega \mid g_t^+(\omega) = t\}$
- $(\underline{F}_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ la filtration naturelle (rendue continue à droite et complétée) engendrée par le processus (g_t^+) . H est alors un fermé aléatoire optionnel.
- G (resp. D) l'ensemble des extrémités gauches (resp. droites) des intervalles contigus à H .

Soit P une probabilité sur $(\Omega, \underline{F}_\infty)$; il existe

- Un processus croissant optionnel localement intégrable (ℓ_t) porté par H
- Un noyau optionnel $N(t, dx)$ vérifiant
$$\int_{]0, \infty[} (1 - e^{-x}) N_t(dx) = 1$$

tels que l'on ait, pour tout processus (Z_t) optionnel borné et pour toute fonction φ borélienne bornée sur $\bar{\mathbb{R}}_+$

$$(1) \quad E \left[\sum_{s \in G} Z_s \varphi(d_s - s) \right] = E \left[\int_0^\infty Z_s N(s, \varphi) d\ell_s \right].$$

On dira que (ℓ_t) est un temps local et (N_t) un noyau de Lévy pour H .

Quand H est régénératif le noyau de Lévy se réduit à une mesure $N(dx)$ qui n'est pas autre chose que la mesure de Lévy du subordonateur (σ_t) inverse de (ℓ_t) . H est parfait si et seulement si N est de masse totale infinie, ce que nous supposons dans la suite ; (ℓ_t) est alors continu.

Plaçons nous dans le cas régénératif et posons $\tilde{N}(x) = N]x, \infty[$; \tilde{N} est décroissante continue à droite et peut s'annuler quand N est à support compact ; on notera $b = \inf\{x ; \tilde{N}(x) = 0\}$. On sait construire une sous-martingale locale admettant pour processus croissant le temps local (ℓ_t) ; rappelons de quoi il s'agit. Dans les cas usuels (en particulier quand la mesure de Lévy est diffuse) on posera simplement

$$Y_t = \frac{1}{\tilde{N}(t-g_t^+)} \quad \mu_t = Y_t - \ell_t$$

et le théorème (9.9) de [1] nous assure que (μ_t) est une martingale locale. Dans le cas général, on introduit la partie prévisible contenue dans D

$$D_p = \{t \in D \mid t-g_t = b\}$$

qui est non évanescence si $N\{b\} = \tilde{N}_-(b) \neq 0$; on pose

$$\bar{Y}_t = Y_t + \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} Y_{s-} \quad \mu_t = \bar{Y}_t - \ell_t$$

et l'on sait que (μ_t) est une martingale locale. Nous nous proposons de montrer dans la suite que (μ_t) possède la propriété de représentation prévisible.

2. Nous commencerons par un résultat que nous énoncerons dans un cadre plus général ; dans ce paragraphe (\underline{G}_t) désigne une filtration vérifiant les conditions habituelles, H un fermé aléatoire contenant 0 ; on suppose que (\underline{G}_t) vérifie la propriété suivante.

(2) Si T est un temps d'arrêt et Y une variable aléatoire \underline{G}_T -mesurable bornée, il existe un processus prévisible borné (Z_t) tel que

$$Y 1_{\{g_T^+ < T\}} = Z_{g_T} 1_{\{g_T^+ < T\}}.$$

Sous ces hypothèses, nous allons voir qu'il n'existe pas de martingale locale non triviale s'annulant sur H ; plus précisément.

(3) PROPOSITION : Soit σ un temps d'arrêt ; toute martingale locale s'annulant sur $H \cap [0, \sigma]$ est nulle sur $[0, \sigma]$.

(4) COROLLAIRE : Si σ est prévisible, toute martingale locale s'annulant sur $H \cap [0, \sigma[$ est nulle sur $[0, \sigma[$.

Démonstration : Soit (ξ_t) est une martingale locale nulle sur $H_\sigma = H \cap [0, \sigma]$; appelons $g_t^\sigma = \sup\{s < t ; s \in H_\sigma\}$ et (Z_t) un processus prévisible borné ;

l'égalité $Z_{g_t^\sigma} \xi_{t \wedge \sigma} = Z_{g_{t \wedge \sigma}} \xi_{t \wedge \sigma}$ et la formule classique de balayage

d'Azéma-Yor (Cf. [8]) montrent que $\left[Z_{g_{t \wedge \sigma}} \xi_{t \wedge \sigma} \right]$ est une martingale locale

s'annulant à l'origine ; de plus, un temps d'arrêt S réduisant (ξ_t) réduit également cette martingale locale, de sorte qu'on peut écrire

$$E \left[Z_{g_{t \wedge \sigma \wedge S}} \xi_{g_{t \wedge \sigma \wedge S}} \right] = 0.$$

Désignons alors par Y une variable aléatoire bornée $\underline{G}_{t \wedge \sigma \wedge S}$ -mesurable et par (Z_t) un processus prévisible borné qui lui est associé par l'hypothèse (2) ; on peut écrire

$$E \left[\xi_{t \wedge \sigma \wedge S} Y \right] = E \left[\xi_{t \wedge \sigma \wedge S} Z_{g_{t \wedge \sigma \wedge S}} \right] = 0,$$

ce qui entraîne $\xi_{t \wedge \sigma \wedge S} = 0$ p.s. ; le résultat en découle facilement.

3. Dans ce paragraphe, nous allons introduire une classe de martingales locales qui nous seront utiles ; les hypothèses seront les suivantes dans le cadre du paragraphe 1. P sera une probabilité (non nécessairement régénérative) sur $(\Omega, \underline{F}_\infty)$. Nous supposons que G évite les temps d'arrêt ce qui, nous le savons, (Cf. [1]), entraîne la continuité du temps local ainsi que la propriété suivante du noyau de Lévy : pour presque tout ω , quelque soit t appartenant à $G(\omega)$, on a $N(t, \omega, \bar{R}_+^*) = \infty$.

Quitte à remplacer (N_t) par sa projection prévisible, on peut supposer le noyau de Lévy prévisible, si bien que le processus paramétré $\tilde{N}(t, x) = N(t,]x, \infty])$ sera prévisible, ainsi que le processus $b_t = \inf\{x ; \tilde{N}(t, x) = 0\}$. Nous adopterons les notations suivantes :

$$D_p = \left\{ (t, \omega) \in D \mid t - g_t(\omega) = b_{g_t}(\omega) \right\}.$$

Si φ est un processus paramétré prévisible ≥ 0 , on posera

$$U\varphi(t, x) = \frac{1}{\tilde{N}(t, x)} \int_{]x, \infty]} \varphi(t, y) N(t, dy) ; U_t\varphi = U\varphi(g_t^+, t - g_t^+) 1_{H^c}(t)$$

$$W\varphi(t, x) = \frac{1}{\tilde{N}(t, x)} \int_{]0, x]} \varphi(t, y) N(t, dy) ; W_t\varphi = W\varphi(g_t^+, t - g_t^+) 1_{H^c}(t).$$

\mathcal{N}_{loc} désignera l'ensemble des processus paramétrés prévisibles tels que

$$\int_0^\infty \varphi(t, y) N(t, dy) \quad (\text{que l'on notera aussi } N(t, \varphi)) \quad \text{définisse un processus}$$

localement borné (nécessairement prévisible).

Il résulte facilement de la formule (1) (Cf. [7]) que le processus

$$\Gamma_t^\varphi = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \varphi(g_s, s-g_s) + U_t \varphi - \int_0^t N(s, \varphi) d\ell_s$$

est une martingale locale, quelque soit φ dans \mathcal{N}_{loc} .

Rappelons enfin la définition de la sous-martingale d'équilibre (\bar{Y}_t) de H :

on pose $Y_t = \frac{1}{\tilde{N}(g_t^+, t-g_t^+)} 1_{H^c}(t)$, $\bar{Y}_t = Y_t + \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D_p}} Y_{s-}$ et l'on sait que

$\mu_t = \bar{Y}_t - \ell_t$ est une martingale locale.

(5) PROPOSITION : Soit φ un processus paramétré de \mathcal{N}_{loc} ; le processus

$$\Lambda_t^\varphi = \sum_{\substack{s \leq t \\ s \in D-D_p}} \varphi(g_s, s-g_s) - W_t \varphi - \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} W_{s-} \varphi$$

est une martingale locale appartenant au sous-espace stable engendré par (μ_t) .

Démonstration : Appliquant la formule du balayage au processus prévisible

$(N(g_t, \varphi))$ et à la semi-martingale (Y_t) , on obtient

$$N(g_t^+, \varphi) Y_t = N(g_t, \varphi) Y_t = \int_0^t N(g_s, \varphi) dY_s (d\mu_s + d\ell_s) - \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} N(g_s, \varphi) Y_{s-}.$$

Éliminons le temps local en faisant intervenir Γ_t^φ : il vient

$$\Gamma_t^\varphi - \int_0^t N(g_s, \varphi) d\mu_s = \sum_{\substack{s \in D \\ s \leq t}} \varphi(g_s, s-g_s) - W_t \varphi - \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} N(g_s, \varphi) \frac{1}{N(g_s, \{b_{g_s}\})}.$$

Le dernier terme du second membre peut encore s'écrire

$$\sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} (\varphi(s-g_s) + W_{s-} \varphi) \text{ d'où l'égalité } \Lambda_t^\varphi = \Gamma_t^\varphi - \int_0^t N(g_s, \varphi) d\mu_s.$$

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que (Λ_t^φ) est purement discontinue, et que ses sauts ne peuvent se produire qu'aux instants de sauts de (μ_t) (en particulier elle ne saute pas en D_p).

Nous terminerons ce paragraphe par deux petits résultats techniques

(6) PROPOSITION : Soit φ un processus paramétré optionnel satisfaisant aux

conditions suivantes :

a) $\forall t, t \rightarrow \varphi(t, x)$ est continue à droite

b) $(\varphi(g_t^+, t-g_t^+))_{t \geq 0}$ est un processus évanescent.

Alors, pour presque tout ω , $\varphi(t, y) = 0$ quelque soit t dans G et $y < b_t$.

Démonstration : Soit T un temps d'arrêt tel que $[[T]] \subset H^c$; montrons d'abord

que $P[\varphi(g_T^+, y) \neq 0 ; y < b_{g_T} ; T < \infty] = 0$ quelque soit $y \geq 0$.

Pour cela, notons Γ l'événement de \underline{F}_T figurant à l'intérieur du crochet et calculons

$$(7) \quad P[d_T - g_T^+ > y ; \Gamma] = E \left[\frac{\tilde{N}(g_T^+, (T-g_T^+) \vee y)}{\tilde{N}(g_T^+, T-g_T^+)} ; \Gamma \right].$$

Appelant S la variable aléatoire $g_T^+ + y$, on a l'égalité $\varphi(g_T^+, y) = \varphi(g_S^+, S-g_S^+)$

sur l'événement $\{d_T - g_T^+ > y\}$ de sorte que le premier membre de (7) est

nul ; au second membre, on remarque que la variable aléatoire $\tilde{N}(g_T^+, (T-g_T^+) \vee y)$

est strictement positive sur Γ , ce qui entraîne $P(\Gamma) = 0$. On applique alors

ce qui vient d'être montré aux temps d'arrêt T_k^n définis par récurrence par

$$T_k^0 = \inf\{t ; t-g_t^+ \geq \frac{1}{k}\} \dots \dots \dots T_k^{n+1} = \inf\{t > d_{T_k^n} ; t-g_t^+ \geq \frac{1}{k}\}$$

et l'on montre que

$$P[\exists t \in G ; \varphi(t, g) \neq 0, y < b_t] = 0 \text{ quelque soit } y \geq 0.$$

Il suffit alors pour obtenir le résultat de faire décrire à y l'ensemble \mathbb{Q}_+ puis d'utiliser la continuité à droite en x de φ .

(7) PROPOSITION : Soit P' une probabilité équivalente à P ; on peut affirmer (avec des notations évidentes) que les processus $b_{g_t^+}^{-1} 1_{\{g_t^+ < t\}}$ et

$b_{g_t^+}^{-1} 1_{\{g_t^+ < t\}}$ sont indistingables ; en particulier D_p et D'_p sont indistingables.

Démonstration : Soit T un temps d'arrêt tel que $[[T]] \subset H^c$; on aura

$$P[d_T - g_T^+ > b_{g_T^+} ; T < \infty] = 0 = P'[d_T - g_T^+ > b_{g_T^+} ; T < \infty] = E' \left[T < \infty ; \frac{\tilde{N}'(g_T^+, b_{g_T^+})}{\tilde{N}(g_T^+, T-g_T^+)} \right].$$

Cela entraîne $\tilde{N}' \left(g_T^+, b_{g_T^+} \right) = 0$ p.s. sur $\{T < \infty\}$; on a donc, sur ce même

événement, $b_{g_T^+} \geq b'_{g_T^+}$, l'inégalité inverse s'obtenant en échangeant les rôles de P et P' .

4. La propriété de représentation prévisible pour un ensemble régénératif.

Dans ce paragraphe Ω est muni d'une probabilité P sous laquelle H est régénératif ; on supposera que N est de masse totale infinie.

(8) THEOREME : Soit (M_t) une martingale locale respectivement à la filtration (\underline{F}_t) ; il existe un processus (Z_t) prévisible unique tel que

$$a) \left[\int_0^t Z_s^2 d[\mu, \mu]_s \right]^{1/2} \text{ définit un processus croissant localement intégrable}$$

grable

$$b) M_t = M_0 + \int_0^t Z_s d\mu_s.$$

Démonstration : Nous utiliserons la méthode inaugurée par Dellacherie dans les cas Brownien et Poissonien. Tout revient à montrer ([5] corollaire 4.12) que toute martingale bornée (M_t) orthogonale à (μ_t) est constante ; on peut même se limiter aux martingales minorées par un réel > 0 ; les probabilités P et $P' = M_\infty P$ sont alors équivalentes : il s'agit de montrer que $P' = P$; pour cela, nous établirons que, sous P' , H admet encore N comme noyau de Lévy ([1] (8.1) et (8.3)).

Soit $h \in \mathcal{M}_{loc} \cap \mathcal{M}'_{loc}$; (Λ_t^h) , qui est une martingale locale sous P , l'est aussi sous P' d'après le théorème de Girsanov, si bien que

$$\Lambda_t^h - \Lambda_t'^h = W_t^h - W_t'^h + \sum_{\substack{s \in D_p \\ s \leq t}} W_{s-}^h - W_{s-}'^h \text{ est une martingale sous } P'.$$

Désignons par $(\sigma_n)_{n \geq 1}$ la suite des débuts successifs de l'ensemble aléatoire prévisible discret D_p ; $(\Lambda_t^h - \Lambda_t'^h)$ est nulle sur $H \cap [0, \sigma_1[$; d'après (4) elle est nulle sur $[0, \sigma_1[$; mais elle ne saute pas en σ_1 et est par conséquent nulle sur $H \cap [0, \sigma_2[$ etc...

On montre ainsi de proche en proche que $W_t^h = W_t'^h$. Utilisant maintenant la proposition (6), il en résulte que $Wh(t, x) = W'h(t, x)$ quelque soit $t \in G$ et $x < b_t$; il ne reste plus qu'à choisir convenablement h . Si φ est une

fonction borélienne bornée sur \mathbb{R}_+ , nous poserons :

$$a_t^n = \inf\{x ; \tilde{N}'(t, x) \leq n\} \quad h_{n,p}(t, x) = \begin{cases} 1 & \{x > a_t^n\} \\ 1 & \{a_t^n \geq \frac{1}{p}\} \end{cases} \varphi(x).$$

On vérifie sans peine que $h_{n,p} \in \mathcal{N}_{loc} \cap \mathcal{N}'_{loc}$; on a ainsi établi que $\forall t \in G,$

$$\forall x < b_t$$

$$\frac{1}{\tilde{N}(x)} \mathbb{1}_{\{a_t^n \geq \frac{1}{p}\}} \int_{a_t^n}^x \varphi(y) N(dy) = \frac{1}{\tilde{N}'(t, x)} \mathbb{1}_{\{a_t^n \geq \frac{1}{p}\}} \int_{a_t^n}^x \varphi(y) N'(t, dy)$$

Faisant tendre p puis n vers l'infini, on en déduit facilement que les

mesures $\frac{N(dy)}{\tilde{N}(x)}$ et $\frac{N'(t, dy)}{\tilde{N}'(t, x)}$ coïncident sur $[0, x]$ dès que $x < b$. Quelque

soit $t \in G$, $N'(t, dy)$ est donc proportionnelle à N ; mais, les deux mesures étant normalisées, $N'(t, dy) = N(dy)$ quelque soit $t \in G$.

Appelons alors Γ l'ensemble aléatoire $\{(s, \omega) \mid N_s(\varphi)(\omega) = N(\varphi)\}$; on a quelque soit le processus (Z_t) optionnel borné

$$\begin{aligned} E' \left[\sum_{s \in G} Z_s \varphi(d_s - s) \right] &= E' \left[\sum_{s \in G} Z_s \mathbb{1}_{\Gamma}(s) \varphi(d_s - s) \right] \\ &= E' \left[\int_0^\infty Z_s \mathbb{1}_{\Gamma}(s) d\ell'_s N'(s, \varphi) \right] = N(\varphi) E' \left[\int_0^\infty Z_s d\ell'_s \right] \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

(9) Remarque : Le théorème [6] de Jacod et Mémin permettrait d'arriver beaucoup plus vite à la conclusion. D'une manière plus générale, si l'on sait montrer que toute martingale (M_t) de la filtration (\mathbb{F}_t) est purement discontinue, l'étude faite en [1] sur l'accessibilité des temps d'arrêt permet d'affirmer que tout temps de saut de (M_t) est un temps de saut de (μ_t) .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AZEMA : *Sur les fermés aléatoires. Séminaire de Probabilités XIX, L.N. 1123, 1985. Springer.*
- [2] AZEMA-YOR : *Etude d'une martingale remarquable. (Dans ce volume).*
- [3] EMERY : *On the Azéma martingales. (Dans ce volume).*
- [4] HAMZA : *Thèse de 3ème cycle. A paraître.*
- [5] JACOD : *Calcul stochastique et problèmes de martingales. L.N. 714, Springer (1979).*
- [6] JACOD-MEMIN : *Un théorème de représentation de martingales pour les ensembles régénératifs. Séminaire de Probabilités X. L.N. 511. Springer (1976).*
- [7] MEYER-STRICKER-YOR : *Sur une formule de la théorie du balayage. Séminaire de Probabilité XIII. L.N. 721. Springer 1979.*

Jacques AZEMA

Kaïs HAMZA

Laboratoire de Probabilités

Unité associé au C.N.R.S. 224

4, place Jussieu - Tour. 56

75252 PARIS CEDEX 05