Paul-André Meyer

Quasimartingales hilbertiennes, d'après Enchev

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 86-88
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__86_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

QUASIMARTINGALES HILBERTIENNES d'après ENCHEV

par P.A. Meyer

Le but de cette note est d'attirer l'attention sur un très joli résultat présenté dans un article à paraître d'O. Enchev. Cet article contient d'autres choses intéressantes, mais le théorème que je vais citer est étonnant par sa simplicité. Il n'est pas ''nouveau'', en ce sens qu'il s'agit d'un cas très particulier de résultats de Brooks et Dinculeanu sur les quasimartingales banachiques, mais le cas hilbertien mérite amplement d'être traité à part - on verra que la démonstration est presque plus simple que celle du cas réel !

Soit H un espace de Hilbert, et soit $(H_t)_{t\geq 0}$ une filtration hilbertienne, i.e. une famille croissante et continue à droite d'espaces de Hilbert (Enchev ne suppose pas la continuité à droite, mais nous le ferons ici pour simplifier). On peut sans inconvénient supposer que les H_t engendrent H, et convenir que $H_{0-}=\{0\}$. Le projecteur orthogonal sur H_t est noté E_t.

Une courbe (x_t) est dite *adaptée* si $x_t \in H_t$ pour tout t. Elle est *à variation finie* si les nombres

$$S^\tau = \sum_i \|x_{t_{i+1}} - x_{t_i}\| , \tag{1}$$

relatifs à toutes les subdivisions $\tau = (0 = t_0 < t_1 \cdots < t_n)$, sont uniformément bornés. D'autre part, on dit que (x_t) est une *martingale* si $E_s x_t = x_s$ pour $s<t$. Beaucoup de petits résultats sur les martingales s'étendent à la situation purement hilbertienne : continuité à droite et existence de limites à gauche en norme, existence d'une limite x_∞ fermant une martingale bornée.

Introduisons la *variation filtrée* d'une courbe adaptée (x_t) comme la borne supérieure des nombres

$$V^\tau = \sum_i \|E_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i})\| \tag{2}$$

relatifs à toutes les subdivisions τ. Par exemple, pour une martingale la variation filtrée se réduit à 0 . Si la variation filtrée est finie, on dit que la courbe est une *quasimartingale* au sens hilbertien. Nous nous bornerons ici aux quasimartingales continues à droite. Si $H = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}), H_t = L^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbf{P})$, où $(\mathcal{F}_t)$ désigne une filtration au sens usuel chez les probabilistes, toute quasimartingale au sens hilbertien est une quasimartingale au sens usuel, mais l'inverse n'est pas vrai, parce que la définition usuelle fait intervenir la norme L^1 au lieu de la norme L^2.

Le résultat d'Enchev est le suivant : *toute quasimartingale au sens hilbertien se décompose uniquement en la somme d'une martingale, et d'une courbe à variation finie, nulle en* 0, *adaptée à la famille* (H_{t-}).

Esquisse de la preuve. Soit $(t_k^n)_k$ la n$^{\text{ième}}$ subdivision dyadique de $\mathbf{R}_+$. Pour $t_k^n \le s \le t_{k+1}^n$ on pose

$$a_s^n = \sum\nolimits_{i<k} E_{t_i}(x_{t_{i+1}} - x_{t_i}).$$

On vérifie que ces courbes ont une variation totale majorée par la variation filtrée de (x_t). On utilise alors un argument de compacité faible et un procédé diagonal pour construire une suite $(n_k) \uparrow \infty$ telle que, pour tout nombre dyadique s, les $a_s^{n_k}$ convergent faiblement vers une limite a_s. La semi-continuité inférieure de la norme hilbertienne dans la topologie faible entraîne que la variation totale de $a(\cdot)$ sur les dyadiques est finie. On peut alors prolonger $a(\cdot)$ en une fonction continue à droite sur $\mathbf{R}_+$, sans perdre cette propriété.

On vérifie alors, comme dans la démonstration classique de Rao en probabilités, que $x(\cdot) - a(\cdot)$ est une martingale, et que a_t appartient à H_{t-} pour tout t.

C'est *l'unicité* qui est la chose étonnante : nous avons tant répété, dans le cas probabiliste, que l'adaptation à la famille $(\mathcal{F}_{t-})$ ne suffit pas à assurer la prévisibilité !

Soit donc (m_t) une martingale, nulle en 0, adaptée à (H_{t-}). Montrons que (m_t) ne peut être à variation finie au sens hilbertien sans être identiquement nulle. D'abord, pour tout s, $m_s - m_{s-}$ est orthogonal à H_{s-} : l'adaptation à (H_{t-}) entraîne donc que (m_t) est continue en norme. La fonction scalaire $f(t) = \|m_t\|^2$ est donc continue. Si $f(t) > 0$, il existe une subdivision (s_i) de $[0,t]$ telle que $0 \le i \le n+1$, $f(s_i) = if(t)/n$, donc

$$\sum\nolimits_i \|m_{t_{i+1}} - m_{t_i}\| = \sum\nolimits_i (f(t_{i+1}) - f(t_i))^{\frac{1}{2}}$$

est égal à $\sqrt{n} f(t)$, et m ne peut être à variation finie...

On voit admirablement ce qui se passe dans le cas du processus de Poisson (N_t) : $\|N_t - N_s\|_1$ est égal à $t-s$, mais $\|N_t - N_s\|_2$ est égal à $\sqrt{t-s}$.

Voici l'explication : si $a(t)$ est une courbe continue à variation finie à valeurs dans L^2, il existe un changement de temps *déterministe* qui la transforme en une courbe lispchitzienne, donc dérivable dans L^2 (ceci serait faux dans L^1 !) et intégrale de sa dérivée. Le processus $a(t)$ admet donc une version p.s. continue, donc prévisible. C. Stricker a fait remarquer que l'on peut aussi appliquer le lemme de Kolmogorov.

REFERENCE

O. ENCHEV. Hilbert space valued quasimartingales. *Boll. Unione Mat. Ital.*, à paraître.