YAO-ZHONG HU

Un nouvel exemple de distribution de Hida

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 82-84
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__82_0>

UN NOUVEL EXEMPLE DE DISTRIBUTION DE HIDA

par Yao-Zhong HU
Math. Research Institute, Academia Sinica, Wuhan (Chine)

Dans l'article de Meyer-Yan [2], on explique comment les distributions de Hida permettent formellement d'écrire les densités, par rapport à la mesure de Wiener, de mesures qui ne sont pas absolument continues. Les exemples connus de cette situation sont la "fonction δ de Donsker" qui représente formellement la densité du pont brownien, et la distribution qui représente la densité de la mesure de Wiener P_σ du mouvement brownien σX_t. Ces deux distributions ont été étudiées par Hida.

Dans le cas de la mesure P_σ , l'article Hu-Meyer [1] donne des détails supplémentaires : on explique comment à une fonctionnelle de Wiener f suffisamment régulière, donnée par son développement en chaos de Wiener, on peut associer une fonctionnelle f^σ du mouvement brownien σX_t, qui est en un certain sens "la même fonctionnelle" . Alors la distribution de Hida sur l'espace de Wiener est la forme linéaire $f \mapsto f_0^\sigma$ (le terme constant dans le développement de f^σ). La régularité imposée à f concerne l'existence de <u>traces</u> des fonctions $f_n(s_1,\dots,s_n)$ du développement de Wiener de f. Nous renvoyons le lecteur à l'article [1], qui figure dans le même volume du séminaire.

Dans cette note, nous allons remplacer la mesure P_σ par la mesure P^x du mouvement brownien standard issu du point $x \neq 0$. La discussion est plus simple que celle de P_σ . Elle est intéressante, parce qu'elle montre l'intérêt de considérer aussi des distributions portées par l'origine des coordonnées (cas exclu dans l'article [2] de Meyer-Yan).

1. Soit f une fonctionnelle de Wiener, donnée par son développement

$$f = \Sigma_n \frac{1}{n!} I_n(f_n) \tag{1}$$

où $f_n(s_1,\dots,s_n)$ est une fonction symétrique de n variables $s_i>0$, appartenant à $L^2(\mathbb{R}_+^n)$. L'hypothèse de régularité que nous ferons sur les f_n est la possibilité de prendre les <u>valeurs en 0</u> successives

$$Tf_n(s_1,\dots,s_{n-1}) = f_n(s_1,\dots,s_{n-1},0)$$
$$T^2f_n(s_1,\dots,s_{n-2}) = Tf_n(s_1,\dots,s_{n-2},0) \;\dots$$

de manière naturelle (les fonctions f_n sont en réalité des classes), de telle sorte que Tf_n, $T^2f_n\dots$ appartiennent à L^2. Il suffit par exemple que f_n soit continue bornée à support compact, pour tout n .

Signalons une variante de la définition (1), qui sera utile plus loin, celle où les fonctions f_n ne sont pas supposées symétriques ; on convient alors que $I_n(f_n)$ est égale à $I_n(f_n^s)$, la symétrisée de f_n, et on pose

$$Tf_n(s_1,..,s_{n-1}) = \frac{1}{n}f_n(0,s_1,..,s_{n-1})+..+\frac{1}{n}f_n(s_1,..,s_{n-1},0) .$$

Comme dans le cas de P_σ , nous allons associer à la fonctionnelle f une fonctionnelle f^x du mouvement brownien issu de x, possédant les propriétés suivantes : 1) si f est la coordonnée X_t, f^x est la même application coordonnée, qui se lit $x+X_t$. Notant que X_t est l'intégrale stochastique $\int I_{]0,t]}(s)dX_s$, on voit que l'extension naturelle au premier chaos est

(2) si $f=\int h_s dX_s=I_1(h)$, f^x vaut $xh(0)+\int h_s dX_s = xh(0)+I_1^x(h)$

où la notation I_1^x rappelle qu'il s'agit d'une fonctionnelle du mouvement brownien issu de x. 2) On exige que cette extension soit multiplicative.

Pour trouver la forme de l'extension, nous considérons la fonctionnelle $f = \exp(\lambda\int h_s dX_s - \frac{1}{2}\|h\|^2\lambda^2)$, dont le développement suivant les chaos est $\Sigma_n \frac{1}{n!}I_n(h^{\otimes n})$. D'après la multiplicativité, on a $f^x=e^{\lambda xh(0)}e$

$$f^x = e^{\lambda xh(0)}\exp(\lambda\int h_s dX_s - \frac{\lambda^2}{2}\|h\|^2)$$

d'où en développant en série et en identifiant les coefficients

$$\text{si } f = I_n(h^{\otimes n}) \ , \ f^x = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k I_{n-k}^x(h(0)^k h^{\otimes n-k})$$

ce qui suggère la formule

(3) si $f = I_n(f_n)$, on a $f^x= \Sigma_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k I_{n-k}^x(T^k f_n)$.

Il faut maintenant vérifier que cette formule est effectivement multiplicative, c'est à dire que

$$(I_n(f_n)I_p(g_p))^x = I_n(f_n)^x.I_p(g_p)^x .$$

Il y a pour cela deux méthodes. La première consiste en une vérification combinatoire directe, analogue à celle de l'article de Hu-Meyer pour P_σ . Comme dans cet article, il est avantageux alors de travailler sur des intégrales multiples de fonctions non symétriques, et d'écrire alors la formule (3) sous la forme

(4) si $f=I_n(f_n)$, on a $f^x= \Sigma_{A\subset\{1,..,n\}} x^{|A|}I_{n-|A|}^x(T_A f_n)$

où $|A|$ est le nombre d'éléments de A, et $T_A f_n$ est la fonction (non symétrique) obtenue en égalant à 0 les variables $s_i, i\in A$. Après quoi, on applique la formule de multiplication des intégrales stochastiques pour des fonctions non symétriques. Nous utiliserons plutôt une autre méthode.

L'identité à établir s'écrit

$$(I_n(f_n)I_p(g_p))^x = \sum_{\substack{k\leq n\wedge p\\ i\leq n+p-2k}} k!\binom{n}{k}\binom{p}{k}\binom{n+p-2k}{i}x^i I^x_{n+p-2k-i}(T^i(f_n \underset{k}{\circ} g_p))$$

$$= I_n(f_n)^x I_p(g_p)^x = \sum_{\substack{r\leq n,\, s\leq p\\ t\leq(n-r)\wedge(p-s)}} t!\binom{n}{r}\binom{p}{s}\binom{n-r}{t}\binom{p-s}{t}x^{r+s} I^x_{n-r+p-s-2t}((T^r f_n)\underset{s}{\circ}(T^s g_p))$$

ou le symbole $\underset{j}{\circ}$ désigne un produit symétrique contracté j fois.
Identifiant les coefficients des puissances de x et les intégrales stochastiques de même ordre, cela devient, pour $i\leq n\wedge p$ et $k\leq(n+p-i)/2$

$$k!\binom{n}{k}\binom{p}{k}\binom{n+p-2k}{i}\, T^i(f_n \underset{k}{\circ} g_p) = \sum_{\substack{r+s=i\\ (n-r)\wedge(p-s)\geq k}} k!\binom{n}{r}\binom{p}{s}\binom{n-p}{k}\binom{n-s}{k} T^r f_n \underset{k}{\circ} T^s g_p$$

Il s'agit maintenant d'une égalité entre fonctions sur $\mathbb{R}_+^{n+p-2k}$, qui se ramène (pour chaque point de cet espace) à une égalité entre mesures positives à support fini sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p$, que l'on peut se borner à vérifier lorsque f_n est de la forme $f^{\otimes n}$ et g_p de la forme $g^{\otimes p}$. Il suffit alors d'établir

$$\Sigma_{n,p}\ \frac{\lambda^n\mu^p}{n!p!} I_n(f^{\otimes n})^x I_p(g^{\otimes p})^x = \Sigma_{n,p}\ \frac{\lambda^n\mu^n}{n!p!}(I_n(f^{\otimes n})I_p(g^{\otimes p}))^x$$

et l'on est ramené à une vérification immédiate sur les exponentielles stochastiques. Cette méthode trés simple aurait pu être employée aussi pour les mesures P_σ .

2. Nous allons maintenant (comme nous l'avons fait dans [1]) récrire la formule principale de manière plus simple. Au lieu de travailler sur $I_n(f_n)$, travaillons sur l'intégrale stochastique $J_n(f_n)=I_n(f_n)/n!$ sur le simplexe croissant. La formule (3) devient alors

$$J_n(f_n)^x = \sum_k \frac{x^k}{k!} J^x_{n-k}(T^k f_n) \quad (T^k f_n=0 \text{ pour } k>n)$$

qui peut s'écrire sans référence à un n particulier

(6) $$J(f)^x = J^x(e^{xT}f) \qquad (\text{ f est la suite des } f_n \text{ }) .$$

Cette formule peut elle même se généraliser en une formule faisant passer, non plus de 0 à x, mais de u à v :

(7) $$(J^u(f))^v = J^v(e^{(v-u)T}f)$$

et il est alors facile de la combiner avec la formule du même type de [1] pour décrire l'effet des translations et des dilatations.

[1]. HU (Y.Z.) et MEYER (P.A.). Chaos de Wiener et intégrale de Feynman (dans ce volume).

[2]. MEYER (P.A.) et YAN (J.A.). A propos des distributions sur l'espace de Wiener . Sém. Prob. XXI, LN. 1247, p. 8-26.