NICOLE EL KAROUI
MONIQUE JEANBLANC PICQUE

Contrôle de processus de Markov

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 508-541
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__508_0>

CONTROLE DE PROCESSUS DE MARKOV.

Nicole EL KAROUI(1), Monique JEANBLANC PICQUE(2).

INTRODUCTION:

La méthode de la probabilité de référence ,fondée sur la formule de Girsanov,a joué un rôle déterminant dans l'étude probabiliste des problèmes de contrôle.Dans ([Da] ,[El]),elle est utilisée pour montrer l'existence d'un contrôle optimal,choisi parmi ceux qui maximisent un certain hamiltonien. Bismut ([Bi]), traite,par des arguments analogues ,le cas des diffusions non dégénérées dont le contrôle porte sur la dérive.En exploitant les propriétés spécifiques de la mesure de Lebesgue par rapport à ces processus , il montre que la fonction de valeurs est markovienne et que l'hamiltonien ne dépend que de l'état du système.
N.El Karoui [E.K.] utilise un procédé d'approximation des contrôles par des processus étagés le long des temps d'arrêt pour obtenir des propriétés analogues de la fonction de valeurs et de l'hamiltonien:le cadre est alors celui du contrôle d'un processus de Markov par la méthode de la probabilité de référence.

Dans ce travail, le processus de base est un processus de Markov.Le controleur agit à la fois sur la dérive du processus et sur sa durée de vie ζ en utilisant des densités de Girsanov associées à des surmartingales exponentielles H^q_t .Il transforme les probabilités de référence P_x en des familles de mesures Q^q_x où q est un contrôle relaxé. L'objectif à maximiser est de la forme

$$J(x,q)= Q^q_x\int_{[0,\zeta\wedge T]}\int_A h(X^-_s,a)\ q_s(da)\ dA_s + g(X^-_T)\ 1_{\{T<\zeta\}}$$

où T est le temps terminal et A un espace métrique compact.

Dans une première partie, nous définissons les mesures Q^q_x et nous les caractérisons par la façon dont elles transforment martingales et processus croissants.
Dans une seconde partie, un argument de compacité qui utilise la caractérisation des mesures Q^q_x et le caractère relaxé des contrôles nous permet d'établir l'existence d'un contrôle optimal.
La même caractérisation nous permet ensuite d'établir les propriétés essentielles de la fonction de valeurs : mesurabilité, possibilité d'intervertir sup et intégration.Ces propriétés sont fondamentales pour établir la programmation dynamique puis les équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman qui nous prouvent l'existence d'un contrôle markovien et qui nous montrent que la relaxation n'a pas changé la fonction de valeurs.

(1)N.EL KAROUI Lab.probabilités. Paris VI. 75230 PARIS Cedex 05.
(2)M.JEANBLANC-PICQUE. E.N.S. CACHAN ,61 av Wilson 94230 CACHAN.

I. NOTATIONS - ENONCE DU PROBLEME

I.1. Les données.

Nous désirons contrôler l'évolution d'un processus de Markov X_t construit sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P_x)$ où x joue le rôle de condition initiale.
L'action du contrôleur se traduit par une modification de la probabilité P_x en une probabilité P_x^q par rapport à laquelle le processus peut perdre son caractère markovien, mais qui reste absolument continue par rapport à P_x si on la restreint à certaines sous tribus (ce qui a lieu lorsqu'on utilise une densité de Girsanov. Voir l'article de Yoeurp [Yo] qui appelle cette propriété " absolue continuité locale"). L'objectif est de maximiser un gain actualisé.

Précisons les données :

(a) Le système $\mathcal{X} := (\Omega, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, P_x \;;\; x \in E)$ est un processus droit au sens de Getoor [Ge]. Il vérifie en particulier les conditions suivantes :

(1.1) (i) la filtration $(\mathcal{F}_t)$ satisfait aux hypothèses habituelles

(ii) le processus X_t est càdlàg, à durée de vie infinie, à valeurs dans un espace métrique complet séparable E ;

(iii) les opérateurs de translation θ_t sont mesurables et vérifient $X_t \circ \theta_s = X_{s+t} \quad \forall (s,t) \in \mathbb{R}_+^2$;

(iv) pour toute probabilité μ sur E, pour toute variable aléatoire positive Z

$$P_\mu(Z \circ \theta_t \,|\, \mathcal{F}_t) = P_{X_t}(Z) \qquad P_\mu \text{ p.s.}$$

où $P_\mu(\,.\,|\mathcal{F}_t)$ désigne l'espérance conditionnelle sous la probabilité P_μ et $P_x(Z)$ désigne l'espérance de Z sous P_x.

(b) Le processus N_t est une martingale fonctionnelle additive continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, nulle en 0 ; A_t est une fonctionnelle additive processus croissant continu et $\alpha(x) = (\alpha_{i,j}(x))_{i,j}$ est la matrice symétrique des densités prévisibles, i.e

$$(1.2) \qquad \langle N^i, N^j \rangle_t = \int_{[0,t]} \alpha_{i,j}(X_s^-)\, dA_s \;.$$

On se donne également les paramètres permettant de contrôler le processus X :

(c) L'espace des actions est un espace métrique compact A. Il est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{A}$. Un élément générique de A est noté a.
Les "contrôles-processus" seront à valeurs dans A, un "contrôle-mesure" sera construit sur A (on définira avec précision ce vocabulaire au paragraphe suivant).

(d) Une fonction n, définie sur $E\times A$ à valeurs dans R^d, borélienne bornée, continue en a uniformément par rapport à x ;

(e) Une fonction c, définie sur $E\times A$ à valeurs réelles, mesurable bornée, continue par rapport à a uniformément par rapport à x . On l'appelle coefficient d'actualisation. On suppose que $c(x,a) \geq \gamma \geq 0$. On sera souvent amené àfaire l'hypothèse $\gamma > 0$.

Remarque : Quitte à introduire le processus espace temps $\tilde{X}_t(\omega,r) = (X_t(\omega), r+t)$ le cas où les coefficients n et c dépendent du temps peut être ramené à celui que nous traitons .

I.2.Le contrôle.

Un contrôle-processus est un processus prévisible à valeurs dans A.
On note $\mathcal{U}^\circ(\mathcal{F})$ l'ensemble de ces contrôles.
Un contrôle-mesure (ou contrôle relaxé) est un processus prévisible à valeurs dans $\mathcal{P}(A)$, espace des probabilités sur A.

On note $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ l'ensemble de ces contrôles.
On remarque que $\mathcal{U}^\circ(\mathcal{F})$ est plongé dans $\mathcal{U}(\mathcal{F})$ par la formule
(2.1) $q(t,da) = \delta_{u(t)}(da)$ où δ désigne la mesure de Dirac,i.e

$$(2.2) \qquad \int f(a)\, \delta_{u(t)}(da) = f(u(t)).$$

Si ψ est une fonction mesurable bornée définie sur $\mathbb{R}^+ \times A$, on note

$$(2.3) \qquad \psi(t,q_t) := \int_A \psi(t,a)\, q_t(da) = \int_A \psi(t,a)\, q(t,da).$$

Soit q un contrôle relaxé. On note H_t^q la semi-martingale solution de l'équation différentielle stochastique

$$(2.4) \qquad dH_t^q = H_t^q \{ n^*(X_t^-,q_t)\, dN_t - c(X_t^-,q_t)\, dA_t \} \; ; \quad H_0^q = 1 .$$

où n^* désigne le transposé de n.
H_t^q est une surmartingale positive qui converge lorsque $t\longrightarrow\infty$ vers une variable intégrable. On notera cette limite

$$(2.5) \qquad H_{\infty -}^q := \lim_{t\to\infty} H_t^q$$

et on posera $H_\infty^q = 0$, ce qui introduit un saut en $+\infty$.
On fait l'hypothèse suivante

(H.1) la surmartingale (H_t^q ,$t\in \mathbb{R}^+$) est de la classe (D)

i.e la famille H_T^q où T décrit les temps d'arrêt est uniformément intégrable.

On donnera, dans l'appendice, des conditions qui impliquent cette hypothèse.

La surmartingale (H_t^q) admet la décomposition multiplicative

(2.6) $H_t^q := L_t^q \exp -\phi_t^q$

où L_t^q est la martingale locale solution de l'équation différentielle

(2.7) $dL_t^q = L_t^q \; n^*(X_t^-, q_t)\, dN_t \quad ; \quad L_0^q = 1$.

et où $\phi_t^q := \int_0^t c(X_s^-, q_s)\, dA_s \quad ;$

soit, de façon détaillée

(2.8)

$$H_t^q = \exp\int_0^t n^*(X_s^-, q_s)\, dN_s - \int_0^t \{ \frac{1}{2}\, n^*(X_s^-, q_s)\alpha(X_s^-)n(X_s^-, q_s) + c(X_s^-, q_s)\}\, dA_s$$

Avant de poursuivre, précisons quel est notre objectif. Il s'agit de maximiser un gain en présence d'un coefficient d'actualisation. Ce gain est défini traditionnellement au moyen de deux fonctions h et g et d'un temps terminal (voir par exemple Krylov [Kr]).

(f) h représente le gain instantané. C'est une fonction définie sur $E \times A$, borélienne bornée, continue en a uniformément par rapport à x ;

(g) la fonction g représente le gain terminal. Elle est définie sur E, mesurable et bornée.

(h) le temps T représente la durée de l'action du contrôleur. C'est un temps terminal, i.e $t < T \Longrightarrow T \circ \theta_t = T - t$.
On dira que l'on étudie un problème à horizon fini si T est borné P_x p.s, et un problème à horizon infini dans le cas contraire. T peut alors valoir $+\infty$.

Le gain associé au contrôle relaxé q est

(2.9) $J(x,q) := P_x \{ \int_{[0,T[} H_s^q \, h(X_s^-, q_s)\, dA_s + H_T^q \, g(X_T^-)\, 1_{T<\infty} \}$

I.3 Action du contrôleur

Nous allons construire sur $\bar{\Omega} = \Omega \times [0, \infty]$ une mesure de probabilité Q^q qui traduira l'action du contrôleur lorsqu'il utilise le contrôle q. Nous suivons de très près la terminologie de Blumenthal-Getoor ([B.G] p. 105.)

On désigne par $\bar{\omega} := (\omega, \lambda)$ le point générique de $\bar{\Omega}$. On pose $\bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F} \otimes \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}$ étant la tribu borélienne sur $\bar{\mathbb{R}}^+$.

Soit $\bar{\Omega}_t = \Omega \times]t, \infty]$. On définit $\bar{\mathfrak{F}}_t$, pour $t \geq 0$, par :

$$\bar{\mathfrak{F}}_t := \{ \bar{\Lambda} \in \bar{\mathfrak{F}} : \exists \Lambda \in \mathfrak{F}_t \text{ tel que } \bar{\Lambda} \cap \bar{\Omega}_t = \Lambda \times]t, \infty]\}$$

$\bar{\mathcal{F}}_t$ est une filtration continue à droite sur $\bar{\Omega}$ et une variable $\bar{X}$ est $\bar{\mathcal{F}}_t$-mesurable si et seulement si elle s'écrit sous la forme

(3.1) $\bar{X}(\omega,\lambda) = Y(\omega)\ 1_{]t,\infty]}(\lambda) + Z(\omega)\ 1_{[0,t]}(\lambda)$

où Y est $\mathcal{F}_t$-mesurable et Z est $\mathcal{F}_\infty$-mesurable.

Si T est un $\mathcal{F}_t$ -temps d'arrêt, on le prolonge à $\bar{\Omega}$ en posant $\bar{T}(\omega,\lambda) := T(\omega)$.

Il est facile de vérifier que $\bar{T}$ est un $\bar{\mathcal{F}}_t$-temps d'arrêt.

D'autre part, si $\bar{S}$ est un $\bar{\mathcal{F}}_t$- temps d'arrêt , il existe un unique $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt S tel que $\bar{S}(\omega,\lambda) \wedge \lambda = S(\omega) \wedge \lambda$ [B.G. lemme 3.9]. Il en résulte que si $\bar{X}_t$ est un processus $\bar{\mathcal{F}}_t$-adapté

(3.2) $\bar{X}_{\bar{S}}(\bar{\omega}) = Y_{S(\omega)}(\omega)\ 1_{]S(\omega),\infty]}(\lambda) + Z(\omega)\ 1_{[0,S(\omega)]}(\lambda)$

où Y et Z sont associés à X comme en (3.1.)

Si $\bar{S}$ est un $\bar{\mathcal{F}}_t$-temps d'arrêt, on définit comme d'habitude $\bar{\mathcal{F}}_{S-}$: c'est la tribu engendrée par $\{ \Lambda_0 \times\{0\} , \Lambda_0 \in \mathcal{F}_0 \}$ et par les ensembles de la forme $\{ \bar{\Lambda} \cap \{S>t\} ; t > 0, \bar{\Lambda} \in \bar{\mathcal{F}}_t \}$.

Soit ζ défini sur $\bar{\Omega}$ par $\zeta(\omega,\lambda):= \lambda$. C'est le temps de vie de $\bar{\omega}$ ([Fö]); c'est un $\bar{\mathcal{F}}_t$-temps d'arrêt. La tribu $\bar{\mathcal{F}}_{\zeta-}$ coïncide avec la tribu $\mathcal{P}$ des prévisibles qui est engendrée par les ensembles de la forme $\{ \Lambda_t \times]t,\infty], \Lambda_t \in \mathcal{F}_t \}$ et $\{ \Lambda_0 \times\{0\}, \Lambda_0 \in \mathcal{F}_0 \}$.

On note $\bar{\mathcal{F}}_{t\wedge\zeta-}$ la tribu des éléments $\bar{\Lambda} \in \bar{\mathcal{F}}_{\zeta-}$ tels qu'il existe $\Lambda \in \mathcal{F}_t$ tel que $\bar{\Lambda} \cap (\Omega \times]t,\infty]) = \Lambda\times]t,\infty]$ (ou, si l'on préfère, la tribu engendrée par les ensembles de la forme $\Lambda_s \times]s,t]$, $\Lambda_s \in \mathcal{F}_s$ et $\Lambda_0 \times \{0\}$, $\Lambda_0 \in \mathcal{F}_0$).

Si (Z_t , $t\in\bar{\mathbb{R}}^+$) est un processus prévisible borné défini sur Ω, on lui associe $\bar{Z}_t$, processus défini sur $\bar{\Omega}$ par

(3.3) $\bar{Z}_t(\bar{\omega}) = \bar{Z}_t(\omega,\lambda) := Z_{t\wedge\lambda}(\omega)$ $,t \in \bar{\mathbb{R}}^+$.

Il est immédiat que $\bar{Z}_t$ est $\bar{\mathcal{F}}_{\zeta-}$-mesurable.

On vérifie que $\bar{Z}$ est prévisible par rapport à la filtration $\bar{\mathcal{F}}_{t\wedge\zeta-}$; d'autre part, tous les processus prévisibles par rapport à $\bar{\mathcal{F}}_{t\wedge\zeta-}$ ont cette forme.

Si $(Y_t, t\in\bar{\mathbb{R}}^+)$ est un processus optionnel càdlàg, on lui associe $\bar{Y}_t$ processus optionnel sur $\bar{\Omega}$ par

(3.4) $\quad \bar{Y}_t(\bar{\omega}) = \bar{Y}_t(\omega,\lambda) \;:=\; Y_t(\omega)\, 1_{t<\lambda} + Y^-_\lambda(\omega)\, 1_{\lambda\leq t}$.

On utilise également la notation

(3.5) $\quad Y_{t\wedge\zeta-} \;:=\; \bar{Y}_t \qquad$ (on remarque que $\bar{Y}_t$ est $\bar{\mathcal{F}}_{\zeta-}$-mesurable)

Tous les processus optionnels càdlàg sur $\bar{\Omega}$ ont cette forme. De façon analogue à (3.5), nous noterons, lorsque Z est un processus prévisible borné sur Ω,

(3.6) $\quad Z_{t\wedge\zeta}(\bar{\omega}) \;:=\; Z_{t\wedge\zeta(\bar{\omega})}(\bar{\omega}) = \bar{Z}_t(\bar{\omega})$

la présence de ζ rappellant que nous travaillons sur $\bar{\Omega}$, nous noterons

(3.7) $\quad \bar{\mathcal{F}}_{\zeta-} = \mathcal{F}_{\zeta-}$.

Enfin, dans la mesure du possible, nous désignons par

P (ou P_x , $\bar{P}$...) une mesure sur Ω

Q (ou Q^q , $\hat{Q}$...) une mesure sur $\bar{\Omega} = \Omega \times \bar{\mathbb{R}}^+$

R (ou R_x ,...) une mesure sur $\hat{\Omega} = \bar{\Omega} \times A$.

Soit q un contrôle mesure. Nous lui associons une fonction d'ensemble Q^q_x sur l'anneau $\mathcal{A} := \{ \Lambda\times]s,t],\ \Lambda \in \mathcal{F}_s\ \ 0 \leq s< t \leq \infty\}$ définie par

(3.8) $\quad Q^q_x\,(\Lambda \times]s,t]) \;:=\; P_x\{ 1_\Lambda(H^q_s - H^q_t)\}$

$$= P_x\{ 1_\Lambda \int_{]s,t]} (-dH^q_u)\}$$

Rappelons que, par convention, $H^q_\infty = 0$, d'où

$$Q^q_x(\Lambda \times]s,\infty]) = P_x(1_\Lambda H^q_s) \quad \text{pour } \Lambda \in \mathcal{F}_s$$

(et $Q^q_x\ (\Lambda \times]0,\infty]) = P_x(\Lambda)$ pour $\Lambda \in \mathcal{F}_0$)

La surmartingale H^q_t étant uniformément intégrable, nous obtenons par passage à la limite

$\lim_{s\to\infty} Q^q_x(\Lambda \times]s,\infty]) = P_x(1_\Lambda H^q_{\infty -})$; d'où

$Q^q_x\ (\Lambda \times [\infty]) := P_x(1_\Lambda H^q_{\infty -})$ pour $\Lambda \in \mathcal{F}_\infty$.

La fonction d'ensemble Q^q_x peut se prolonger en une mesure positive sur la tribu $\mathcal{P}$ des prévisibles considérée comme tribu terminale sur $\bar{\Omega}$ (c'est la mesure de Föllmer associée à la surmartingale uniformément intégrable H^q_t). Comme $H^q_0=1$, la mesure Q^q_x est une mesure de probabilité.

Remarque: Si c=0, la mesure Q^q_x est liée à la densité de Girsanov: si $\Lambda \in \mathcal{F}_s$, $Q^q_x(\Lambda \times]s,\infty]) = P_x(1_\Lambda L^q_s)$ et nous pouvons identifier Q^q_x à sa projection P^q_x sur Ω : $P^q_x(\Lambda) = P_x(1_\Lambda L^q_x)$ pour $\Lambda \in \mathcal{F}_s$.

Nous allons regarder de quelle façon Q^q_x intègre les variables aléatoires définies sur $(\bar{\Omega}, \mathcal{F}_{\zeta-})$.

Proposition 3.1.
Soit $(Z_t, t \in \bar{\mathbb{R}}^+)$ *un processus prévisible jusqu'à l'infini , borné ou positif*

$$(3.9)\qquad Q^q_x(Z_\zeta) = P_x\left(\int_{[0,\infty[} Z_s\, H^q_s\, c(X^-_s, q_s)\, dA_s + Z_\infty H^q_{\infty-}\right)$$

$$(3.10)\qquad Q^q_x(Z_\infty 1_{\zeta=\infty}) = P_x(Z_\infty H^q_{\infty-})$$

Si Z est optionnel positif , on a

$$(3.11)\qquad Q^q_x\left(\int_{]0,\zeta]} Z_s\, dA_s\right) = P_x\left(\int_{[0,\infty[} Z_s\, H^q_s\, dA_s\right)$$

Démonstration: La relation

$$Q^q_x(\Lambda\,; t\leq\zeta) = P_x(1_\Lambda H^q_t) = P_x\left(1_\Lambda \int_{[t,\infty[} H^q_s\, c(X^-_s, q_s)\, dA_s + 1_\Lambda H^q_{\infty-}\right)$$

est vérifiée, car l'hypothése (H1) entraîne que le processus croissant prévisible $\int_0^t H^q_s\, c(X^-_s, q_s)\, dA_s$ associé à H^q est intégrable et donc que la martingale locale

$$\int_0^t H^q_s\, n^*(X^-_s, q_s)\, dN_s = H^q_t - H^q_0 - \int_0^t H^q_s\, c(X^-_s, q_s)\, dA_s$$

est une martingale uniformément intégrable .
La relation

$$Q^q_x(\Lambda\,; t\leq\zeta) = P_x\left(\int_0^\infty 1_{\Lambda\cap[t,\infty[}(s)\, H^q_s\, c(X^-_s, q_s)\, dA_s + 1_\Lambda H^q_{\infty-}\right)$$

s'étend par classe monotone à tous les processus prévisibles bornés, ce qui prouve (3.9.).◁

Nous utilisons dorénavant, dans les démonstrations , la notation condensée

$$(3.12)\qquad n^q_s := n(X^-_s, q_s) \;;\quad c^q_s := c(X^-_s, q_s) \quad\text{et}\quad n^{q*}_s := (n^q_s)^* .$$

La définition de Q^q_x conduit immédiatement à (3.10). Nous avons isolé cette formule pour préciser que $\{\zeta=\infty\}$ est en général chargé par Q^q_x.

Remarquons que (3.9) et (3.10) impliquent

$$(3.13)\qquad Q^q_x(\,Z_\zeta\,;\ \zeta<\infty) = P_x\int_{[0,\infty[} H^q_s\ c^q_s\ Z_s\ dA_s$$

Pour montrer (3.11), nous utilisons le processus

$$A(Z)_t := \int_{[0,t]} Z_s\ dA_s$$

où Z est optionnel positif , auquel nous appliquons (3.9).
Il vient :

$$Q^q_x(A(Z)_\zeta) = P_x\{\int_{[0,\infty[} H^q_s\ c^q_s\ (\int_0^s Z_u dA_u)\ dA_s + H^q_{\infty-}\int_0^\infty Z_u\ dA_u\}$$

D'après le théorème de Fubini, cette expression se transforme en

$$Q^q_x(A(Z)_\zeta) = P_x\{\int_{[0,\infty[} Z_u dA_u\ (\int_{[u,\infty[} H^q_s\ c^q_s\ dA_s + H^q_{\infty-}\ )\}$$

Mais l'hypothèse (H1) entraîne que

$$H^q_{\infty-} = H^q_u + \int_{[u,\infty[} H^q_s\ n^{q*}_s\ dN_s - \int_{[u,\infty[} H^q_s\ c^q_s\ dA_s$$

où la martingale qui intervient est uniformément intégrable et donc

$$P_x(\int_{[u,\infty[} H^q_s\ c^q_s\ dA_s + H^q_{\infty-}\ |\mathcal{F}_u) = H^q_u$$

et $\quad Q^q_x\ (A(Z)_\zeta) = P_x(\int_{[0,\infty[} H^q_u\ Z_u\ dA_u)$.

<u>Remarque</u> :

Lorsque la martingale locale $\int_0^t Z_s\ H^q_s\ n^{q*}_s\ dN_s$ est une vraie martingale ,(3.9) s'écrit aussi

$$Q^q_x(Z_\zeta) = P_x(\int_{[0,\infty]} Z_s\,(-dH^q_s))$$

<u>Corollaire 3.2</u>

Si Z est prévisible positif

$$(3.14)\quad Q^q_x\{\int_{[0,\zeta]} Z_s\ c(X^-_s,\ q_s)\ dA_s\} = P_x\{\int_{[0,\infty[} Z_s\ c(X^-_s,\ q_s)\ H^q_s\ dA_s\}$$

$$= Q^q_x\ (Z_\zeta\ ;\ \zeta < \infty)$$

i.e $\ 1_{\zeta\leq t} - \int_{]0,t\wedge\zeta]} c(X^-_s,\ q_s)\ dA_s$ *est une* Q^q_x *-martingale.*

<u>Démonstration:</u> il suffit d'appliquer (3.11) au processus prévisible positif $Z_s\ c(X^-_s,\ q_s)$ et d'utiliser 3.13. ◁

Cette longue mise en place étant effectuée, nous utilisons la probabilité Q_x^q pour écrire le gain défini en (2.9).

En appliquant (3.11) au processus optionnel $h(X_s^-,q_s)\, 1_{s<T}$ on obtient, sous réserve d'intégrabilité

$$P_x \int_{[0,T[} h(X_s^-,\, q_s)\, H_s^q\, dA_s = Q_x^q \left(\int_{[0,\zeta]} h(X_s^-,\, q_s)\, 1_{s<T}\, dA_s \right)$$

D'autre part , par définition de Q_x^q , et en utilisant $H_\infty = 0$

$$P_x\, (g(X_T^-)\, H_T^q\, 1_{T<\infty}) = P_x\,(g(X_T^-)\, H_T^q) = Q_x^q\,(g(X_T^-)\, 1_{T<\zeta})$$

D'où la nouvelle forme du gain

$$(3.15) \qquad J(x,q) = Q_x^q \left\{ \int_{[0,\zeta]} h(X_s^-,q_s)\, 1_{s<T}\, dA_s + g(X_T^-)\, 1_{T<\zeta} \right\}$$

<u>Remarque 3.3</u>

Sous cette forme, on peut être tenté de faire intervenir dans (3.15) un terme de gain terminal de la forme $\tilde{g}(X_\zeta^-)\, 1_{\zeta\leq T}$.

Mais $\quad Q_x^q\, (\tilde{g}(X_\zeta^-)\, 1_{\zeta\leq T}) = Q_x^q \displaystyle\int_{[0,\zeta]} \tilde{g}(X_s^-)\, c(X_s^-,\, q_s)\, dA_s$

(résulte de 3.14).Il suffit donc d'ajouter à h un terme de la forme $\tilde{g}(X_s^-)\, c(X_s^-,\, q_s)$.

<u>Exemple des processus de diffusion sur $\mathbb{R}^n$</u>

On considère le processus (x_t) solution du système différentiel stochastique

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dB_t + \int_{|u|\leq 1} f(x_t^-,u)q(dt,du)$$
$$+ \int_{|u|>1} f(x_t^-,u)p(dt,du)$$

et on suppose l'existence et l'unicité forte des solutions d'un tel système.

Le processus x_t est un processus de Markov à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, de condition initiale x .

On pose $N_t = \int_0^t \sigma(x_t)dB_t$ .C'est une martingale fonctionnelle additive associée à la matrice $\alpha(x) = \sigma(x)\, \sigma^*(x)$ et au processus croissant t .

Soient $n(x,a)$ et $c(x,a)$ des fonctions vérifiant les hypothèses I.1(d)(e).

Nous introduisons la surmartingale H_t^q vérifiant

$$dH_t^q = H_t^q\, (n^*(X_t,q_t)\, dN_t - c(X_t,q_t)\, dt)$$

Sous la probabilité Q_x^q , le processus $(X_t)_{t<\zeta}$ a même loi que le processus construit de la manière suivante:

- On considère la solution de l'E.D.S

$$dY^q_t = b(Y^q_t)\,dt + \alpha(Y^q_t)\,n(Y^q_t,q_t)\,dt + \sigma(Y^q_t)\,d\tilde{B}_t + \int_{|u|\leq 1} f(Y^q_{t-},u)\,\tilde{q}(dt,du) + \int_{|u|>1} f(Y^q_{t-},u)\,\tilde{p}(dt,du)$$

où $\tilde{B}$ est un mouvement Brownien pour une probabilité $\tilde{P}$ et où $\tilde{q}(dt,du)$ est la mesure martingale associée au processus de Poisson $\tilde{p}(dt,du)$

- On tue le processus Y^q_t à un temps aléatoire ζ^q dont la loi conditionnelle par rapport à $(Y^q_s,\ s\leq t)$ est donnée par

$$\tilde{P}(\zeta^q > t\ |Y^q_s\ ,\ s\leq t) = \exp - \int_t^\infty c(Y^q_s,q_s)\,ds$$

L'objectif est de la forme

$$J(x,q) = P_x\{\int_0^T H^q_s\ h(x_s,q_s)ds + H^q_{T-}\ g(x_T)\}$$

$$=\tilde{P}\left[\int_0^T \{\exp -\int_0^t c(Y^q_s,q_s)ds\}\ h(Y^q_t,q_t)\,dt + \{\exp - \int_0^T c(Y^q_s,q_s)\,ds\}\ g(Y^-_T)\right]$$

$$= Q^q_x\{\int_{[0,T\wedge\zeta]} h(X_s,q_s)ds + g(X^-_T)\ 1_{T\leq\zeta}\}$$

avec comme hypothèse

$$(*) \qquad \sup_{x,q}\ \tilde{P}\int_0^T \exp-\int_0^t c(Y^q_s,q_s)ds \quad dt \leq K$$

En général, on suppose $c(x,a) \geq \gamma > 0$ auquel cas (*) est automatiquement vérifiée. Si T est borné, on n'a besoin d'aucune hypothése supplémentaire sur c.

I.4.Une généralisation du théorème de Girsanov.

Il est bien connu que $(M_t)_{t\in\bar{\mathbb{R}}^+}$ est une P-martingale si et seulement si $P(M_T) = P(M_0)$ pour tout $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt borné. Si $(M_t\ ,\ t\in\bar{\mathbb{R}}^+)$ est optionnel càdlag, on lui associe un processus défini comme en (3.4), construit sur $\bar{\Omega}$ soit $\bar{M}_t := M_{t\wedge\zeta-}$. Le processus $\bar{M}_t$ est une Q^q-martingale si et seulement si $Q^q(\bar{M}_{\bar{T}}) = Q^q(\bar{M}_0)$ pour tout $\bar{T}$, $\bar{\mathcal{F}}_t$-temps d'arrêt borné.

La formule (3.2) nous permet de ne considérer que les $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt .

Ainsi, (4.1) $\bar{M}_t$ est une Q^q -martingale si et seulement si $Q^q(\bar{M}_T) = Q^q(\bar{M}_0)$ pour tout T, $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt borné.

Dans le cas $c = 0$, nous savons que $Q^q(Z_{t\wedge\zeta}) = P(L_t^q\ Z_t) = P^q(Z_t)$ où P^q est la mesure de densité L_t^q par rapport à P .
On sait (théorème de Girsanov-voir Yoeurp pour les détails concernant le caractère "absolue continuité locale") que si M est une P- martingale, $M - \langle M, n^{q*}N \rangle$ est une P^q-martingale dont le crochet prévisible sous P^q est le même que celui de M sous P, ou encore M est une semi martingale sous P^q ayant même crochet prévisible que M sous P.

Avec notre notation, cette propriété devient : si M est une P-martingale $\bar{M} - \overline{\langle M, n^{q*}N \rangle}$ est une Q^q-martingale dont le crochet est le prolongement à $\bar{\Omega}$ du crochet de M sous P, ou encore $\bar{M}$ est une Q^q-martingale et

$$\langle \bar{M}\ ,\ \bar{M} \rangle_t^Q = \overline{\langle M, M \rangle_t^P}$$

Nous désirons généraliser ce résultat au cas $c \geqslant 0$.

<u>Théorème 4.1</u>
-a- *Soit* M_t *une P-martingale càdlàg bornée telle que*

(4.1) $$d\ \langle M, N\rangle_t = \alpha(X_t^-)\ m_t\ dA_t$$

où m *est un vecteur prévisible.*

Alors $\bar{M}_t := M_{t\wedge\zeta-}$ *est une* Q^q *semi-martingale dont le processus à variation finie est*

(4.2) $$\int_{[0,t\wedge\zeta]} m_u^*\ \ \alpha(X_u^-)\ n(X_u^-,\ q_u)\ dA_u .$$

-b- *Si de plus* M *est continue, alors*

(4.3) $$\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle_t^Q = \langle M, M \rangle_{t\wedge\zeta}^P .$$

<u>Remarque</u>

Nous rappelons que si $\bar{M}_t = \bar{N}_t + \bar{V}_t$ est la décomposition de la semi-martingale continue $\bar{M}_t$, le crochet de $\bar{M}$ (sous Q) est défini par

$$\langle \bar{M}, \bar{M} \rangle_t^Q = \langle \bar{N}, \bar{N} \rangle_t^Q = \bar{N}_t^2 - 2\int_0^t \bar{N}_s\ d\bar{N}_s .$$

▷ Démonstration :
Soit T_n une suite croissante de temps d'arrêt tels que les processus continus H_t^q et $\int_0^t |m_s^*\ \alpha(X_s^-)\ n(X_s^-, q_s)|\ dA_s$ arrêtés en T_n soient bornés.

Soit U un temps d'arrêt borné et $U_n = U \wedge T_n$
Par définition

$$Q^q\ (M_{U_n \wedge \zeta -}) = P \int_{[0,\infty[} (M_{U_n} 1_{U_n < s} + M_s^- 1_{s \leq U_n})\ (-dH_s^q)$$

$$= P(\ M_{U_n}\ H_{U_n}^q\ ) - P \int_{[0,U_n]} M_s^-\ dH_s^q$$

Nous appliquons les règles du calcul stochastique à la semi-martingale $M_{t \wedge U_n}\ H^q_{t \wedge U_n}$ et nous obtenons

$$M_{t \wedge U_n} H^q_{t \wedge U_n} - \int_{[0,t\wedge U_n]} M_u^-\ dH_u^q$$

$$= M_0 + \int_{[0,t\wedge U_n]} H_u^q\ dM_u + \int_{[0,t\wedge U_n]} H_u^q\ m_u^*\ \ \alpha(X_u^-)\ n_u^q\ dA_u$$

Or U_n est un temps d'arrêt borné et, par définition de U_n
$\int_{[0,t\wedge U_n]} H_u^q\ dM_u$ est une martingale uniformément intégrable .
Nous en déduisons:

$$Q^q\ (M_{U_n \wedge \zeta -}) = P(M_0) + P \int_{[0,U_n]} H_u^q\ \ m_u^*\ \alpha(X_u^-)\ n_u^q\ dA_u$$

La formule (3.11) montre que

$$P \int_{[0,U_n]} H_u^q\ m_u^*\ \alpha(X_u^-)\ n_u^q\ dA_u = Q^q \int_{[0,U_n \wedge \zeta]} m_u^*\ \alpha(X_u^-)\ n_u^q\ dA_u$$

d'où

$$Q^q\ (M_{U_n \wedge \zeta -}) = P(M_0) + Q^q \int_{[0,U_n\wedge\zeta]} m_u^*\ \alpha(X_u^-)\ n_u^q\ dA_u$$

Cette égalité nous prouve que
$M_{t \wedge T_n \wedge \zeta -} - \int_{[0,t\wedge T_n \wedge\zeta]} m_u^*\ \alpha(X_u^-)\ n_u^q\ \ dA_u$ est une Q^q-martingale.
En particulier, si M est continue $M_{t\wedge\zeta} = M_{t\wedge\zeta-}$ et l'identité

$$M_t^2 = M_0^2 + 2 \int_0^t M_s\ dM_s \quad + \langle M, M \rangle_t$$

se transforme en

$$M^2_{t\wedge\zeta-} = M_0^2 + 2 \int_{[0,t\wedge\zeta]} M_s\ dM_s \quad + \langle M, M \rangle_{t\wedge\zeta}$$

ce qui prouve le résultat (b). ◁

I.5.Une caractérisation de Q^q.

Nous allons donner une réciproque aux résultats précédents, afin de caractériser les mesures de probabilités Q^q.

Théorème 5.1

Soit $\hat{Q}$ *une probabilité sur* $(\bar{\Omega}, \mathfrak{F}_{\zeta-})$ *telle qu'il existe* $q \in \mathfrak{U}(\mathfrak{F})$ *vérifiant:*

(5.1) $$\hat{Q}(Z_\zeta \,;\, \zeta < \infty) = \hat{Q}\,\{\int_{[0,\zeta]} Z_s \; c(X_s^-,\, q_s)\; dA_s\}$$

pour tout processus $(Z_t, t \in \bar{\mathbb{R}}^+)$ *prévisible positif,* (5.2) *pour toute P-martingale locale bornée càdlàg* M *telle que*

$$d\langle M,N\rangle_t = \alpha(X_t^-)\; m_t\; dA_t$$

avec m *vecteur prévisible*

$M_{t\wedge\zeta-} - \int_{[0,t\wedge\zeta]} m_s^* \;\alpha(X_s^-)\; n(X_s^-, q_s)\; dA_s$ *est une* $\hat{Q}$*-martingale locale ;*

(5.3) $\hat{Q}$ *coincide avec* P_x *sur* $\bar{\mathfrak{F}}_0$ *, i.e.*

$$\hat{Q}(\,F_0\,;\; 0 < \zeta \leqslant \infty) = P_x(F_0) \qquad \forall\, F_0 \in \mathfrak{F}_0 \;;$$

Alors $\hat{Q}$ *coincide avec* Q^q *sur* $\mathfrak{F}_{\zeta-}$.

Demonstration: Elle est longue et se fait en deux étapes . On démontre d'abord que (a) $\hat{Q}(Y\, 1_{U<\zeta}) = P_x(Y\, H_U^q)$ où Y est une variable aléatoire $\mathfrak{F}_U$-mesurable , U étant un temps d'arrêt borné ayant de "bonnes propriétés", puis on obtient (a) pour tout temps d'arrêt borné.

(a) Soit U un temps d'arrêt borné tel que $\hat{H}_t^q := (H_t^q)^{-1}$ soit borné pour $t \leqslant U$. Nous allons calculer , M étant une martingale vérifiant (5.2)

(5.4) $$\hat{Q}(\,\hat{H}_U^q\; M_U\; 1_{U<\zeta}\,) = \hat{Q}\,(\,\hat{H}_{U\wedge\zeta}^q\; M_{U\wedge\zeta-}) - \hat{Q}\,(\,\hat{H}_\zeta^q\; M_\zeta^-\; 1_{\zeta\leqslant U}\,)$$

U étant borné , ζ est fini sur $\zeta \leqslant U$, d'où en utilisant (5.1)

(5.5) $$\hat{Q}(\,\hat{H}_\zeta^q\; M_\zeta^-\; 1_{\zeta\leqslant U}) = \hat{Q}\int_{[0,\zeta]} \hat{H}_s^q\; M_s^-\; 1_{s\leqslant U}\; c_s^q\; dA_s$$

où $c_s^q := c(X_s^-, q_s)$.

Nous allons calculer le premier terme du second membre de (5.4) en appliquant les régles du calcul stochastique aux semi-martingales $\hat{H}_t^q$ et M_t.Nous devons écrire l'E.D.S. vérifiée par $\hat{H}_t^q$:

$$\hat{H}_t^q = \exp-\{\int_0^t n_s^{q*}\; dN_s + \int_0^t (\,\frac{1}{2}\, n_s^{q*}\; \alpha(X_s^-)\; n_s^q + c_s^q)\; dA_s\}$$

et $\hat{H}_t^q$ vérifie l'E.D.S:

$$d\hat{H}_t^q = \hat{H}_t^q\;\{\,-n_t^{q*}\; dN_t + (\,n_t^{q*}\;\alpha(X_t^-)\; n_t^q + c_t^q)\; dA_t\}$$

et par suite

$$(5.6)\, d(\hat{H}^q_t\ M_t) = \hat{H}^q_t\ M_t\ \{-\ n^{q*}_t (dN_t - \alpha(X^-_t)\ n^q_t\ dA_t) + c^q_t\ dA_t\} + \{dM_t - n^{q*}_t \alpha(X^-_t) m_t\ dA_t\}$$

La propriété (5.2) entraîne que sous $\hat{Q}$

$$(5.7)\quad \int_{[0,t\wedge\zeta]} \hat{H}^q_s\ M_s\ \{-n^{q*}_s (dN_s - \alpha(X^-_s)\ n^q_s\ dA_s\} + \hat{H}^q_s\ \{dM_s - n^{q*}_s \alpha(X^-_s)\ m_s dA_s\}$$

est une martingale locale égale à

$\hat{H}^q_{t\wedge\zeta}\ M_{t\wedge\zeta} - M_0 - \int_{[0,t\wedge\zeta]} \hat{H}^q_s\ M_s\ c^q_s\ dA_s$ (utiliser (5.6.)) . Cette martingale locale est donc $\hat{Q}$ -intégrable sur $[0,U]$ puisque, par hypothése , $\hat{H}^q_t$ est borné avant U et que $\int_{[0,t\wedge\zeta]} c^q_s\ dA_s$ est $\hat{Q}$-intégrable d'après (5.1.).Par suite l'espérance sous $\hat{Q}$ de (5.7) est nulle. En rassemblant (5.4), (5.5) et (5.6) , nous obtenons :

$$\hat{Q}(\hat{H}^q_U\ M_U\ 1_{U<\zeta}) = \hat{Q}(M_0) + \hat{Q}\left(\int_{[0,U\wedge\zeta]} H^q_s M^-_s c^q_s dA_s\right) - \hat{Q}\left(\int_{[0,U\wedge\zeta]} H^q_s M^-_s c^q_s dA_s\right)$$
$$= \hat{Q}(M_0) = P(M_0) = P(M_U)$$

La relation $\hat{Q}\ (\hat{H}^q_U\ M_U\ 1_{U<\zeta}) = P\ (M_U)$ que nous venons d'obtenir s'étend par classe monotone à toute variable aléatoire M_U positive $\mathcal{F}_U$-mesurable. En particulier

(5.8) $\hat{Q}(M_U 1_{U<\zeta}) = P(M_U (\hat{H}^q_U)^{-1}) = P(M_U\ H^q_U)$ pour toute martingale positive M_U par définition de $\hat{H}^q$; la relation

(5.9) $\hat{Q}(Y\ 1_{U\wedge\zeta}) = P(Y\ H^q_U)$ est donc valable pour toute variable aléatoire Y, positive $\mathcal{F}_U$-mesurable , U étant un temps d'arrêt borné tel que $\hat{H}^q_t$ soit borné sur $[0,U]$.

(b)Nous allons d'abord montrer que

(5.10) $\hat{Q}(U<\zeta) = P(H^q_U 1_{U<\infty})$ pour tout temps d'arrêt U tel que $\hat{H}^q_U$ soit borné. Soit $U_n = U\wedge n$; U_n est borné et on a , d'après (5.9)

(5.11) $\hat{Q}(U_n < \zeta) = P(H^q_{U_n})$

Etudions le premier membre de (5.11):

$$1_{U_n<\zeta} = 1_{U<\zeta} + 1_{n<\zeta\leqslant U} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1_{U<\zeta} + 1_{\zeta=U=\infty}$$

Le deuxième membre de (5.11) s'étudie en remarquant que

$$H^q_{U\wedge n} \longrightarrow H^q_U \, 1_{U<\infty} + H^q_{\infty -} \, 1_{U=\infty}$$

d'où , par uniforme intégrabilité (H1)

$$P(H^q_{U\wedge n}) \longrightarrow P(H^q_U \, 1_{U<\infty}) + P(H^q_{\infty -} \, 1_{U=\infty})$$

On en déduit

$$\hat{Q}(U<\zeta) + \hat{Q}(\zeta=U=\infty) = P(H^q_U \, 1_{U<\infty}) + P(H^q_{\infty -} \, 1_{U=\infty})$$

soit , en remarquant que $\hat{Q}(\zeta=U=\infty) = \hat{Q}(U=\infty, 1_{\zeta=\infty}) = P(U=\infty, H^q_{\infty -})$

(5.10) $\hat{Q}(U<\zeta) = P(H^q_U \, 1_{U<\infty}) = P(H^q_U)$ (puisque $H^q_\infty = 0$) .

Soit alors T_n la suite de temps d'arrêt définis par

(5.12) $T_n = \inf\{t \mid \hat{H}^q_t \geq n\} = \inf\{t \mid H^q_t \leq \frac{1}{n}\}$

Cette suite T_n converge p.s. vers $T^* = \inf\{t \mid H^q_t = 0\}$. Montrons que

(5.13) $1_{T_n<\zeta} \longrightarrow 0$ $\hat{Q}$ p.s.

Il suffit d'écrire $1_{T_n<\zeta} = 1_{(T_n<\zeta)\cap(T^*<\zeta)} + 1_{T_n<\zeta\leq T^*}$;

il est évident que $1_{(T_n<\zeta)\cap(T^*<\zeta)} \longrightarrow 1_{T^*<\zeta}$

et que $1_{T_n<\zeta\leq T^*} \longrightarrow 1_{(T^*=\zeta)\cap(\mathcal{SC})}$

où $\mathcal{SC}$ est l'ensemble $\mathcal{SC}$ = {la suite T_n est srictement croissante}

L'égalité $\hat{Q}(T_n < \zeta) = \hat{Q}(T_n < \zeta, T^* < \zeta) + \hat{Q}(T_n < \zeta \leq T^*)$

s'écrit $P(H^q_{T_n} 1_{T_n<\infty}) = \hat{Q}(T_n < \zeta, T^* < \zeta) + \hat{Q}(T_n < \zeta \leq T^*)$,

sous cette forme elle passe à la limite pour donner

$P(H^q_{T^*} 1_{T^*<\infty}) + P(H^q_{\infty -}, \mathcal{SC}) = \hat{Q}(T^* < \zeta) + \hat{Q}(T^* = \zeta, \mathcal{SC})$

et le premier membre est 0 par définition de T^*. D'où (5.13) par monotonie.

La derniére étape consiste à appliquer (5.8) à $T_n \wedge t$

$$\hat{Q}(M_{T_n\wedge t} \, 1_{T_n\wedge t<\zeta}) = P(H^q_{T_n\wedge t} \, M_{T_n\wedge t})$$

On a $M_{T_n\wedge t} \, 1_{T_n\wedge t<\zeta} = M_{T_n\wedge t} \, 1_{T_n<\zeta} + M_t \, 1_{t<\zeta\leq T_n}$.

D'où : $\hat{Q}(M_{T_n\wedge t} \, 1_{T_n\wedge t<\zeta}) \longrightarrow \hat{Q}(M_t \, 1_{t<\zeta})$ car $1_{T_n<\zeta} \longrightarrow 0$ $\hat{Q}$ p.s.

et M est bornée.

D'autre part $P(H^q_{T_n\wedge t} \, M_{T_n\wedge t})$ converge vers $P(M_t H^q_t)$:en effet $H^q_{T_n\wedge t} \, M_{T_n\wedge t}$ converge p.s. vers $H^q_t M_t$ en restant majorée par k $H^q_{T_n\wedge t}$ où k est le majorant uniforme de M_t . La famille $H^q_{T_n\wedge t}$ est uniformément intégrable , donc $H^q_{T_n\wedge t} \, M_{T_n\wedge t}$ aussi.Nous avons finalement démontré

$$\hat{Q}(M_t 1_{t<\zeta}) = P(M_t H^q_t)$$

ce qui entraine le résultat désiré par unicité du prolongement de $\hat{Q}$ à $\mathcal{P} = \bar{\mathcal{F}}_{\zeta-}$.

6.Rôle joué par le temps terminal.

Nous allons aborder dans la partie II le problème de contrôle.Le temps terminal T qui intervient dans le gain joue un rôle fondamental:en effet il est évident que le comportement de H_t après le temps terminal n'a aucune influence sur le gain, donc sur le problème de contrôle. Pour rendre compte du temps terminal , on arrête tous les processus en T. Il suffit , pour se ramener au problème précédent, de supposer que la fonctionnelle additive A_t vérifie $A_t = A_{T\wedge t}$, la surmartingale H_t conservant son saut en $+\infty$.

Afin de ne pas perdre le caractère prévisible des processus qui interviennent , <u>nous supposons dans toute la suite que le temps terminal T est prévisible.</u>

Nous reformulons dans cette optique hypothése et résultats obtenus dans cette partie I.

<u>(H1T) La famille $H^q_{S\wedge T}$ où S décrit l'ensemble des temps d'arrêt est uniformément intégrable.</u>

Sous (H1T) on a, pour tout processus Z prévisible jusqu'en T, positif ou borné

(6.1) $\quad Q^q_x(\, Z_{T\wedge\zeta}) = P_x\{\int_{[0,T[} Z_s\ H^q_s\ c(X^-_s, q_s)\ dA_s + \ Z_T\ H^q_{T-}\}$

Il suffit d'utiliser (3.9) et de remarquer que sur $T<\infty$ $H^q_{T-} = H^q_T = H^q_{\infty-}$ puisque nous avons arrêté les processus en T.

(6.2) $\quad Q^q_x(\, Z_T\ 1_{T<\zeta}) = P_x(\, Z_T\ H^q_T)$

$\quad Q^q_x(\, Z_T\ 1_{T\leqslant\zeta}) = P_x(\, Z_T\ H^q_{T-})$

et donc l'ensemble $\{\ T=\zeta\ \}\cap\{\ T<\infty\ \}$ est Q^q_x-négligeable.

(6.3) si Z est optionnel positif

$$Q^q_x(\int_{[0,\zeta]} Z_s\ 1_{s<T}\ dA_s) = P_x(\int_{[0,T[} Z_s\ H^q_s\ dA_s)$$

et on peut énoncer les théorèmes (4.1) et (5.1):

(4.1.T)Si M est une P-martingale càdlàg bornée telle que <M,N> a la forme (4.1) pour t< T , alors $M_{t\wedge(T\wedge\zeta)-}$ est une Q^q-semi martingale dont le crochet sous Q^q est le même que sous P.

(5.1.T) D'autre part ,si $\hat{Q}$ vérifie l'analogue de (5.1) soit

(6.5) $\quad \hat{Q}\ (\, Z_\zeta;\ \zeta < T\,) = \hat{Q} \int_{[0,\zeta]} 1_{s<T}\ Z_s\ c^q_s\ dA_s$

et si , pour toute P-martingale bornée M telle que <M,N> vérifie (4.1) , $M_{t\wedge(T\wedge\zeta)-}$ est une $\hat{Q}$-semimartingale dont le crochet sous $\hat{Q}$ est le même que celui sous P ,alors $\hat{Q}$ coïncide avec Q^q sur $\bar{\mathcal{F}}_{(T\wedge\zeta)-}$.

II LES REGLES DE CONTROLE

II .1. Définitions

Une règle de contrôle, associée au contrôle q, de condition initiale x est une mesure positive R sur $(\Omega \times [0,T]\times A,\ \mathcal{P}_T \times \mathcal{A})$ où $\mathcal{P}_T$ est la tribu des prévisibles avant T ,définie au moyen de la formule suivante:

$$(1.1) \qquad R(Z) := Q^q_x \left\{ \int_{[0,\zeta]\times A} Z(t,\omega,a)\ 1_{t<T}\ dA_t\ q(t,\omega,da) + \int_A Z(T,\omega,a)\ q(T,\omega,da) 1_{T<\zeta} \right\}$$

pour tout processus $\{Z_t,\ t\in\bar{\mathbb{R}}^+\}$ prévisible, mesurable en a , borné. Remarquons que c'est le même contrôle q qui intervient dans Q^q et dans q(s, da).Grâce aux formules mises en place au paragraphe I.6,(1.1) peut aussi s'écrire

$$(1.2) \qquad R(Z) = P_x \{ \int_{[0,T[} H^q_s\ Z^q_s\ dA_s + Z_T\ H^q_{T-} \}$$

où nous avons utilisé la notation condensée

$$(1.3) \qquad Z^q_s := \int_A Z(s,\omega,a)\ q(s,\omega,da),$$

écriture que l'on peut encore modifier en introduisant la fonctionnelle additive A^T_t , prévisible, définie par

$$(1.4) \qquad dA^T_t = dA_t\ 1_{[0,T[}(t) + \delta_T(dt)\ ; \qquad A^T_0 = 0\ ,$$

où δ est la masse de Dirac.

On note $\tilde{Q}_x$ la mesure définie sur $(\Omega \times [0,T],\ \mathcal{P}_T)$ par

$$(1.5) \qquad \tilde{Q}_x(Z) := P_x \{ \int_{[0,T[} Z_s\ dA_s + Z_T \} = P_x \{ \int_{[0,T]} Z_s\ dA^T_s \}$$

C'est une "mesure de référence" car où elle correspond à une situation où le "contrôleur n'intervient pas".

On remarque que R et $\tilde{Q}_x$ ne sont pas des mesures de probabilité, ce qui pose des problèmes d'intégration.Pour éviter de tels problèmes , nous supposons dans cette partie II que

H2T (i) il existe $r>1$ tel que

$$\sup_q P_x \int_{[0,T]} \{ H^q_s \}^r \, dA_s + \{H^q_{T-}\}^r \leq K < \infty$$

(ii) les mesures R sont équibornées, i.e

$$\sup_q P_x \int_{[0,T]} H^q_s \, dA_s + H^q_{T-} \leq K < \infty$$

Nous étudierons dans l'appendice des conditions impliquant H2T. Il est utile de remarquer que sous H2T $(H^q, q \in \mathcal{U}(\mathcal{F}))$ est bornée dans $L^r(\tilde{Q}_x)$.

II. 2 Caractérisation d'une règle. Partie directe

La condition initiale x est fixée dans tout ce paragraphe. Nous ne l'écrivons pas.

Proposition 2.1
Il existe une constante C *telle que, pour toute règle de contrôle* R *et tout* Z *de* $L^\rho(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}_T, \tilde{Q})$ *où* $\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = 1$

(2.1) $|R(Z)| \leq C \, \|Z\|_\rho$

Démonstration: Si $Z \in L^\rho(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}_T, \tilde{Q})$, on a

$$|R(Z)| = |\tilde{Q}(H^q Z)| \leq \tilde{Q}\{(H^q)^r\}^{1/r} \{\tilde{Q}(Z^\rho)\}^{1/\rho}$$

et, par H2T, la famille (H^q) est bornée dans $L^r(\tilde{Q})$.
D'où le résultat. ◁

Nous allons à présent caractériser la densité de R par rapport à $\tilde{Q}$ en utilisant les propriétés des lois Q^q étudiées dans la première partie.

Proposition 2.2
Soit R *une règle de contrôle. Alors*
(i) *si* M *est une P-martingale càdlàg bornée jusqu'en* T *telle que* $\langle M,N \rangle$ *vérifie*
(2.2) $d\langle M, N\rangle_s = m^*_s \, \alpha(X^-_s) \, n(X^-_s, q_s) \, dA_s$
où m *est un vecteur prévisible, alors*
(2.3) $R(c\, M^- 1_{[0,T[} + M^- 1_{[T,\infty]}) = R(m^* \alpha\, n \, 1_{[0,T[}) + P(M_0)$

(ii) *Pour tout processus* (v_t) *positif prévisible, si on note* $A(v)_t := \int_{[0,t[} v_s \, dA_s$, *alors*

(2.4) $R(c\, A(v) 1_{[0,T[} + A(v) 1_{[T,\infty]}) = R(v \, 1_{[0,T[})$.

Démonstration: Il s'agit d'une simple transposition des formules et propriétés établies en termes de Q^q .

Soit M une P-martingale vérifiant les hypothèses de (i)

$$Q^q(M_{T\wedge\zeta-}) = Q^q(M_T 1_{T<\zeta}) + Q^q(M^-_\zeta 1_{\zeta\leq T})$$

$$= P_x(M_T H^q_T) + P_x \int_{[0,T[} c^q_s H^q_s M^-_s dA_s$$

(en utilisant 6.2 et 6.1).

T étant prévisible $P(M_T | \mathcal{F}_{T-}) = M^-_T$, d'où

$$Q^q(M_{T\wedge\zeta-}) = P_x(M^-_T H^q_T) + P_x \int_{[0,T[} c^q_s H^q_s M^-_s dA_s$$

$$= R(M^- 1_{[T,\infty]}) + R(c M^- 1_{[0,T[})$$

Si v est un processus positif prévisible

$$Q^q(A(v)_{T\wedge\zeta}) = Q^q \int_{[0,T\wedge\zeta[} v_s dA_s = R(v 1_{[0,T[})$$

et

$$Q^q(A(v)_{T\wedge\zeta}) = R(c v 1_{[0,T[} + v 1_{[T,\infty]})$$ en utilisant (6.1) et (6.2).

II. 3 Caractérisation des règles. Partie réciproque

Théorème 3.1

Soit R *une mesure positive finie, définie sur* $(\Omega \times [0,T] \times A, \mathcal{P}_T \times \mathcal{A})$ *telle que*

(i) *si* $Z \in L^p(\Omega \times [0,T], \mathcal{P}_T, \tilde{Q})$ *il existe* K *tel que*

(3.1) $|R(Z)| \leq K \|Z\|_p$

(ii) *si* M *est une* P-*martingale càdlàg bornée telle que* $\langle M,N\rangle$ *vérifie:*

(3.2) $d\langle M,N\rangle_t = m^*_t \alpha(X^-_t) n(X^-_t, q_t) dA_t$

où m *est un vecteur prévisible, alors*

(3.3) $R(c M^- 1_{[0,T[} + M^- 1_{[T,\infty]}) = P(M_0) + R(m^* \alpha n 1_{[0,T[})$

(iii) *si* v *est un processus positif prévisible, et si*

$$A(v)_t = \int_{[0,T[} v_s dA_s$$

alors

(3.4) $R(c A(v) 1_{[0,T[} + A(v) 1_{[T,\infty]}) = R(v 1_{[0,T[})$

Alors R *est une règle de contrôle.*

Démonstration: La propriété (i) nous assure que la restriction de R à $\Omega\times[0,T]$ est une mesure de densité θ par rapport à $\tilde{Q}$.Par désintegration , il existe une mesure $q(t,\omega,da)$ sur A , positive, de masse 1 , mesurable par rapport à la tribu prévisible $\mathcal{P}_T$ telle que

(3.5) $$R(Z) = \int_{\Omega \times [0,T]} \tilde{Q}\,(d\omega,dt) \int_A Z(t,\omega,a)\ \theta(t,\omega)\ q(t,\omega,da)$$

où $\theta(t,\omega)$ est prévisible.

Soit Z un processus prévisible. Nous définissons une mesure Q sur $(\bar{\Omega}_T, \mathcal{P}_T)$ où $\bar{\Omega}_T = \Omega \times [0,T]$ par

(3.6) $$Q(\ Z_{T\wedge\zeta}) := R\ (c\ Z\ 1_{[0,T[} + Z\ 1_{[T,\infty]}).$$

Nous allons montrer que la mesure Q coïncide avec la probabilité Q^q (associée au contrôle q dont nous venons de prouver l'existence) en montrant que Q satisfait aux hypothèses du théorème I.5.1.T (énoncé dans la partie 6).

Notons $A(Z)_t := \int_{[0,t[} Z_s\ dA_s$ pour Z positif ou borné.

Par définition de Q

$$Q(\ A(Z\ c^q)_{T\wedge\zeta}\ ) = R(\ c\ A(Z\ c^q)\ 1_{[0,T[} + A(Z\ c^q)\ 1_{[T,\infty]}).$$

La formule (3.4) conduit à :

$$Q(\ A(Z\ c^q)_{T\wedge\zeta}\ ) = R(\ Z\ c^q\ 1_{[0,T[}) = R(\ c\ Z\ 1_{[0,T[}).$$

et, toujours par définition de Q : $R(\ c\ Z\ 1_{[0,T[}) = Q(\ Z_\zeta\ 1_{\zeta<T})$

L'égalité $Q(\ A(\ Z\ c^q)_{T\wedge\zeta}) = Q(\ Z_\zeta\ 1_{\zeta<T})$ est analogue à I.6.5.

Soit alors M une martingale vérifiant (ii). En appliquant (3.4) à $v_s = m^*_s\ \alpha_s\ n^q_s$, on obtient

$$\begin{aligned} R(\ c\ \ A(m^*\ \alpha\ n^q)\ 1_{[0,T[} &+ A(m^*\ \alpha\ n^q)\ 1_{[T,\infty]}) \\ &= R(\ m^*\ \alpha\ n^q\ 1_{[0,T[}) = R(\ m^*\ \alpha\ n\ 1_{[0,T[}) \\ &= R(c\ M^-\ 1_{[0,T[} + M^-\ 1_{[T,\infty]}) - P(M_0)\quad \text{par (3.3)} \\ &= Q(M^-_{T\wedge\zeta}) - P(M_0)\quad \text{par définition de } Q. \end{aligned}$$

Ainsi $Q(\ M^-_{T\wedge\zeta}\ ) = P(M_0) + Q \int_{[0,T\wedge\zeta[} m^*_s\ \alpha_s\ n^q_s\ dA_s$ pour toute martingale bornée vérifiant (ii)

En particulier, si U est un temps d'arrêt borné, on peut appliquer ce résultat à la martingale

$M^U_t = M_{t\wedge U} = \int_{[0,t[} 1_{]0,U]}(s)\ dM_s$ qui vérifie

$$\langle M^U,N\rangle_t = \int_0^{t\wedge U} m^*_s\ 1_{s\leq U}\ \alpha_s\ n^q_s\ dA_s\,.$$

On a $M^U_{t-} = M^-_t\ 1_{t\leq U} + M_U\ 1_{U<t}$

et $Q(M^{U-}_{T\wedge\zeta}\ ) = P(M_0) + Q \int_{[0,T\wedge\zeta\wedge U[} m^*_s\ \alpha_s\ n^q_s\ dA_s$

Soit encore

$$Q\left(M_{U\wedge(T\wedge\zeta)-} \right) = P(M_0) + Q\left(\int_{[0,T\wedge\zeta\wedge U[} m^*_s\ \alpha_s\ n^q_s\ dA_s \right)$$

donc Q coïncide avec Q^q sur $\bar{\mathfrak{F}}_{(T\wedge\zeta)-}$.

Le temps terminal T étant prévisible, la variable $Z_T\ 1_{T\leqslant\zeta}$ est $\bar{\mathfrak{F}}_{(T\wedge\zeta)-}$ mesurable, d'où

$$Q(Z_T\ 1_{T\leqslant\zeta}) = Q^q\ (Z_T\ 1_{T\leqslant\zeta}) = P(\ Z_T\ H^q_{T-})$$

et par définition de Q

$$R(Z\ 1_{[T,\infty]}) = Q(\ Z_T\ 1_{T\leqslant\zeta}\ )$$

D'autre part, en utilisant (3.4)

$$\begin{aligned} R(v\ 1_{[0,T[}) &= R(c\ A(v)\ 1_{[0,T[} + A(v)\ 1_{[0,\infty]}) \quad = Q(A(v)_{T\wedge\zeta}) \\ &= P\{\int_{[0,T[} A(v)_s\,(-dH^q_s) + A(v)_T\ H^q_{T-}\} \\ &= P\int_{[0,T[} v_s\ H^q_s\ dA_s \end{aligned}$$

Finalement, $R(Z) = P\{\int_{[0,T[} Z_s\ H^q_s\ dA_s + Z_T\ H^q_{T-}\ \}$ pour tout processus prévisible Z défini sur $\Omega\times[0,T]$. Par (3.5), on obtient $\theta.\tilde{Q}=Q^q$.

II.4 <u>Compacité et convexité de l'ensemble des règles. Existence d'un contrôle optimal.</u>

Nous munissons l'ensemble des mesures positives bornées sur $\Omega\times\bar{\mathbb{R}}^+\times A$ de la convergence intermédiaire(voir [J.M]) : une famille de mesures μ_α sur $\hat{\Omega} = \Omega\times\bar{\mathbb{R}}^+\times A$ converge vers μ si et seulement si

(4.1) $\forall f$ processus prévisible borné défini sur $\bar{\Omega} = \Omega\times\bar{\mathbb{R}}^+$ et $\forall g$ fonction continue de a, $\mu_\alpha(f,g)\longrightarrow\mu(f.g)$.

On sait qu'alors, pour toute fonction Φ définie sur $\hat{\Omega} = \Omega\times\bar{\mathbb{R}}^+\times A$ prévisible bornée continue en a, $\mu_\alpha(\phi)\longrightarrow\mu(\phi)$.
Pour montrer que l'ensemble $\mathfrak{R}(x)$ des règles de condition initiale x est compact pour la topologie de la convergence intermédiaire, nous allons montrer que $\mathfrak{R}(x)$ est relativement compact, puis que c'est un ensemble fermé.

<u>Lemme 4.1</u>
$\mathfrak{R}(x)$ *est relativement compact pour la topologie de la convergence intermédiaire définie par* (4.1).

Démonstration : La condition initiale x étant fixée, nous notons plus simplement $\mathfrak{R}$ l'ensemble $\mathfrak{R}(x)$.

Il suffit (voir [J.M]) de montrer que $\mathfrak{R}|_{\bar{\Omega}}$ et $\mathfrak{R}|_A$ sont relativement compacts pour les topologies associées.
A étant compact, $\mathfrak{R}|_A$ est inclus dans l'ensemble compact des mesures équibornées sur A, donc est relativement compact pour la topologie de la convergence étroite.
Tous les éléments de $\mathfrak{R}|_{\bar{\Omega}}$ ont une densité par rapport à la mesure $\tilde{Q}$ définie en (1.5), et la relative compacité que nous cherchons à établir n'est autre que la relative compacité dans $\sigma(L^1, L^\infty, \tilde{Q})$ des densités . Si la mesure $\tilde{Q}$ était de masse finie, le critère de Dunford-Pettis donnerait le résultat : en effet H.2T implique que dans ce cas la famille des densités est $\tilde{Q}$ uniformément intégrable. Nous verrons dans l'appendice comment nous ramener à ce cas.

<u>Lemme 4.2</u>
$\mathfrak{R}(x)$ *est fermé*

Démonstration:Il suffit d'utiliser la caractérisation des règles établie au théorème 3.1 ; en effet, les différentes formules (3.1) à (3.4) sont stables par convergence intermédiaire car les coefficients qui dépendent de a sont continus en a. ◁

<u>Théorème 4.3</u>
L'ensemble $\mathfrak{R}(x)$ *est compact.*
Il existe un contrôle optimal q^*, *i.e*

$$\sup \{J(x,q) \ ; \ q \in \mathfrak{U}(\mathfrak{F})\} = J(x,q^*)$$

Démonstration: La compacité de $\mathfrak{R}(x)$ résulte des deux lemmes précédents.

Soit Γ la fonction définie sur $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}^+ \times A$ par

$$\Gamma(\omega,t,a) = h(X^-_t(\omega),\ a)\ 1_{t<T} + g(X^-_t)\ 1_{T\leq t<\infty} \ ;$$

on a alors

$$R(\Gamma) = P\{ \int_{[0,T[} h(X^-_s,q_s)\ H^q_s\ dA_s + g(X^-_T)\ H^q_T\ 1_{T<\infty} \}$$

La fonction Γ est continue en a, l'application $R \longrightarrow R(\Gamma)$ est donc continue et atteint son sup sur un compact. L'existence d'une règle optimale entraine aussitôt l'existence d'un contrôle optimal.

<u>Théorème 4.4</u>-
$\mathfrak{R}(x)$ *est convexe*

Démonstration: La convexité est évidente compte tenu de la caractérisation des règles par le théorème 5.1
Remarquons cependant que l'écriture de $R^* = \alpha R_1 + \beta R_2$ comme mesure à densité par rapport à la mesure de référence,et l'écriture de q^* en fonction de q_1 et q_2 ne sont pas évidentes.
Soit H^1 la surmartingale associée à R_1 :

$$dR^* = P(d\omega)\ (\alpha H_t^1 + \beta H_t^2)\ \frac{(\alpha H_t^1\ q_1(t,da) + \beta H_t^2\ q_2(t,da)}{\alpha H_t^1 + \beta H_t^2}\ dA_t^T$$

(sous P, $\inf\{t\ |H_t^1 = 0\} = +\infty$)

Définissons $\quad q^*(t,da) = \dfrac{\alpha H_t^1\ q_1(t,da) + \beta H_t^2\ q_2(t,da)}{\alpha H_t^1 + \beta H_t^2}$

c'est un contrôle. Il faut montrer que $\alpha H_t^1 + \beta H_t^2 = H_t^{q^*}$ pour obtenir la décomposition explicite de R^* .
Or $\alpha H_t^1 + \beta H_t^2$ est solution de l'E.D.S

$$\alpha H_t^1 + \beta H_t^2 = 1 + \int_0^t \int_A \{n^*(X_s^-,a)\ dN_s - c(X_s^-,a)\ dA_s\}$$
$$\{\alpha H_s^1\ q_1(s,da) + \beta H_s^2\ q_2(s,da)\}$$

(il suffit d'utiliser que

$$\int_0^t n^*(X_s^-,q_s)\ H_s^1\ dN_s = \int_{[0,t[\times A} n^*(X_s^-,\ a)\ H_s^1\ q_1(s,da)\ dN_s\ )$$

d'où par définition de q^*

$$\alpha H_t^1 + \beta H_t^2 = 1 + \int_0^t \int_A (\alpha H_s^1 + \beta H_s^2)$$
$$(n^*(X_s^-,a)\ dN_s - c(X_s^-,a)\ dA_s)\ q^*(s,da) \triangleleft$$

On peut généraliser la propriété de convexité de l'ensemble des règles de la façon suivante

<u>Proposition 4.5</u>
Pour tout espace de probabilité $(\Theta, \underline{\underline{\Theta}}, \mu)$ *et tout processus* $q(\theta\ ;\ t,\ da)$ $\underline{\underline{\Theta}} \times \mathcal{P}$ *mesurable, à valeurs dans* $\mathcal{P}(A)$, *il existe* $q(\mu) \in \mathcal{U}(\mathcal{F})$ *tel que*

$$\int \mu(d\theta)\ H_t^{q(\theta)} = H_t^{q(\mu)}\ ;\ \int \mu(da)\ J(x,\ q(\theta)) = J(x,\ q(\mu))$$

$$\int \mu(d\theta)\ \ R(\theta) = R(\mu)$$

où $R(\theta)$ *(resp* $R(\mu)$) *est la règle de contrôle associée à* $q(\theta)$ *(resp* $q(\mu)$)

Démonstration: C' est la même que celle de la convexité .
Soit $q(\mu) = \displaystyle\int H_t^\theta\ q(\theta,\ da)\ \mu(d\theta)\ /\ \int H_t^\theta\ \mu(d\theta)$

et $\quad H_t^\mu = \int H_t^\theta \; \mu(d\theta)$ où nous avons simplifié les notations de façon évidente. Il est facile de vérifier que

$$H_t^\mu = 1 + \int_0^t \int_\Theta \int_A H_s^\theta \quad q(\theta;s,da)\; \mu(d\theta) \;(\; n(X_s^-,a)\; dN_s \; - c(X_s^-,a)\; dA_s\;)$$

$$H_t^\mu = 1 + \int_0^t \int_A H_s^\mu \quad q(\mu;s,da) \;(\; n(X_s^-,a)\; dN_s - c(X_s^-,a)\; dA_s\;)$$

et $\quad R(\mu) = P(d\omega)\; H_t^\mu \quad dA_t^T \quad q(\mu;t,da)$

$$= P(d\omega) \int H_t^\theta \; q(\theta,\; da)\; \mu(d\theta)\; dA_t^T \qquad = \int R(\theta)\; \mu(d\theta).$$

Un argument analogue permet de montrer que la fonction de valeurs ne dépend pas de la réalisation choisie du processus de Markov .

<u>Théorème 4.6</u>

Soit $(\Omega,\mathcal{F}_t,P_x)$ *une bonne réalisation du processus de Markov* X_t *. Nous désignons par* $\mathcal{G}_t$ *la filtration naturelle engendrée par le processus* X_t *,completée de manière habituelle .Si* A *et* N *sont* $\mathcal{G}_t$*-adaptés, pour tout contrôle* q *prévisible par rapport à* $\mathcal{F}_t$ *, il existe un contrôle* $\mathcal{G}_t$*-prévisible* $q_t^{\mathcal{G}}$ *tel que* $J(x,q) = J(x,\; q^{\mathcal{G}})$.

Démonstration: Montrons que les deux filtrations $\mathcal{F}_t$ et $\mathcal{G}_t$ sont liées par la propriété suivante , appelée propriété (K) ([B.Y.]):

$\forall\, \mu \;,\; \forall\, B \in \mathcal{G}_t \qquad P_\mu(B \mid \mathcal{G}_\infty)$ est $\mathcal{G}_t$-mesurable.

La tribu $\mathcal{G}_\infty$ est engendrée par les variables aléatoires $U(Zo\theta_t)$ (aux négligeables près) où U est $\mathcal{G}_t$-mesurable et Z est $\mathcal{G}_\infty$-mesurable . Par la propriété de Markov ,on a :

$$P_\mu(U\; Zo\theta_t) = P_\mu(U\; 1_B \; P_{X_t}(Z)) = P_\mu(U\; P_\mu(1_B \mid \mathcal{G}_t)\; P_{X_t}(Z))$$

$$= P_\mu(U\; Zo\theta_t\, P_\mu(1_B \mid \mathcal{G}_t))$$

ce qui implique que $P_\mu(1_B \mid \mathcal{G}_\infty) = P_\mu(1_B \mid \mathcal{G}_t) \quad P_\mu$ p.s

Soit $\hat{H}_t$ une version continue de $P_x(H_t^q \mid \mathcal{G}_\infty)$ .Les processus N et A étant $\mathcal{G}_t$ -adaptés , on peut préciser la décomposition de la semi-martingale $\hat{H}_t$:

(4.2) $$\hat{H}_t = 1 + \int_0^t P_x(H_s^q \; n(X_s^-,q_s) \mid \mathcal{G}_\infty)\; dN_s \; - P_x(H_s^q c(X_s^-,q_s) \mid \mathcal{G}_\infty)\; dA_s$$

Comme dans la démonstration de la proposition 4.5 , nous introduisons la mesure aléatoire $q_t^{\mathcal{G}}$ définie par :

(4.3) $$q_t^{\mathcal{G}}(f) = P_x(H_t^q \; q_t(f) \mid \mathcal{G}_\infty) \;/\; P_x(H_t^q \mid \mathcal{G}_\infty) \quad ,$$

plus précisement, nous choisissons une version prévisible (pour chaque f) du membre de droite , que nous régularisons en une mesure prévisible . L'équation (4.2) se transforme en une E.D.S. analogue à celle vérifiée par H_t^q , mais associée au contrôle $q_t^{\mathcal{G}}$:

(4.4) $$\hat{H}_t = 1 + \int_0^t \hat{H}_s \; n(X_s^-,q_s^{\mathcal{G}})\; dN_s \; - \hat{H}_s \; c(X_s^-,q_s^{\mathcal{G}})\; dA_s \; = H_t^{q\,\mathcal{G}}$$

$$\text{et on a}\quad J(x,\ q) = P_x \int_0^T H^q_s\ h(X^-_s,\ q_s)\ dA_s\ +\ H^q_{T-}\ g(X^-_T)$$
$$= P_x \int_0^T \hat{H}_s\ h(X^-_s,\ q^{\mathcal{G}}_s)\ dA_s\ +\ \hat{H}_{T-}\ g(X^-_T)\ =\ J(x,\ q^{\mathcal{G}})$$

III.PROPRIETES DE LA FONCTION DE VALEUR.PROGRAMMATION DYNAMIQUE.

Les méthodes utilisées dans ce paragraphe sont "classiques", aussi nous ne détaillerons pas toujours les démonstrations parfois longues, en renvoyant avec précision aux articles antérieurs où elles sont mises en place.

1.Propriétés de la fonction de valeur.

Les premiéres propriétés à établir sont la mesurabilité de la fonction de valeur et la possibilité d'intervertir "sup" et "intégrale".Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, dans [E.H.J.1 et 2] et [E.L.M.], cela revient à étudier la dépendance par rapport à la condition initiale de l'ensemble des régles .
Comme dans [E.L.M.], nous traitons d'abord un cas de processus un peu particuliers et nous énonçons sans démonstration l'extension aux processus droits.
Nous supposons donc d'abord que l'espace E est polonais.Il en est alors de même de l'espace $\Omega^0 = D([0,\infty],E)$ des applications càdlàg à valeurs dans E. $\mathcal{F}^0_t$ est la filtration canonique , X_t le processus des coordonnées. Dans toute la suite , $\mathcal{H}$ désigne une famille dénombrable de variables aléatoires bornées, stable par produit et qui engendre $\mathcal{F}^0_\infty$. Par exemple $\mathcal{H}_b(I)$ est l'ensemble des

variables aléatoires $h = \prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_i(X_{t_i})$, $t_1<t_2<\ldots<t_k$ les t_i appartenant à I ensemble dense de $\mathbb{R}^+$,les f_i appartenant à un sous ensemble dénombrable engendrant $\mathcal{B}(E)$. De même , $\mathcal{P}^0$ désigne la tribu des processus algébriquement prévisibles, i.e. engendrée par les processus $Y_s\, 1_{[s,\infty]}(t)$ où Y_s est $\mathcal{F}^0_s$-mesurable. Les hypothèses simplificatrices sont les suivantes:

(H3)(i) Les applications $x \longrightarrow P_x$ de E dans $\mathcal{P}(\mathcal{F}^0)$ et $x \longrightarrow \tilde{Q}_x$ de E dans l'ensemble des mesures positives sur $\mathcal{P}^0$ sont boréliennes.
(ii) La v.a. T,temps terminal est borélienne.
(pour la derniére condition , il suffit que T soit le temps d'entrée dans un ouvert)

<u>Lemme 1.1</u>
Le graphe de la multiapplication $x \rightsquigarrow \mathcal{R}(x)$ *défini par*
$$G = \{(x,R)\ ;\ R \in \mathcal{R}(x)\}$$
est un sous ensemble mesurable de l'ensemble $E \times \mathcal{M}$ *où* $\mathcal{M}$ *est l'ensemble desmesures finies sur* $\Omega \times \bar{\mathbb{R}}^+ \times A$ *muni de la tribu* $\mathcal{P}^0 \otimes \mathcal{A}$ *et de la topologie de la convergence étroitedéfinie en prenant*

pour fonctions test les processus continus bornés en (ω,t,a) .

Démonstration: Nous reprenons les conditions du théorème (II.3.1.) qui caractérise les règles. Il suffit de vérifier ces conditions pour les processus prévisibles $\{h_i 1_{[t_i,\infty]},\ t_i \in I,\ h_i \in \mathcal{H}_b(I\cap[0,t_i[)\}$ et pour des martingales $P_x(h|\mathcal{F}_t^0)=\hat{h}_t$ qui admettent des versions indépendantes de la loi initiale. Si Z est un processus prévisible du type çi-dessus l'application $R \longrightarrow R\ (Z\ c\ 1_{[0,T[} + Z\ 1_{[T,\infty]})$ est borélienne.Par hypothésel'application $x \longrightarrow \tilde{Q}_x$ est également borélienne.La mesurabilité du graphe en découle aisèment.

Théorème 1.2.
(i) *La fonction de valeur* $v(x):= \sup\ \{ R(\Gamma);\ R \in \mathfrak{R}(x)\}$ *est universellement mesurable.*
(ii) *Pour toute mesure finie* m *sur* E ,
$\int v(x)\ m(dx)= \sup\ \{ R(\Gamma);\ R \in \mathfrak{R}(m)\}$ *où* $\mathfrak{R}(m)$ *est l'ensemble des mesures de la forme* $P_m \int_{[0,T[} H_s^q\ Z_s\ dA_s + H_{T-}^q\ Z_T$

Démonstration: La première propriété est un résultat classique sur les "sup" des fonctions définies sur des espaces produits puisque $v(x)= \sup\ \{ R(\Gamma)\ \mathbb{1}_G(R,x);\ R \in \mathcal{M}\}$
où $\mathbb{1}_G(R,x)=1$ si $(R,x) \in G$ et $=-\infty$ sinon.
La deuxième partie est une conséquence d'un théorème qui assure la sélection d'une régle R_x^ϵ, ϵ-optimale dans l'ensemble
$$\{(x,R);\ R(\Gamma)+\epsilon \geqslant v(x);R \in \mathfrak{R}(x)\}.$$
On montre , comme dans [E.L.M.] que les hypothèses (H3) sont superflues et que le procédé de compactification de Ray-Knight permet de montrer en toute généralité ,i.e. pour un processus droit et un temps terminal T trés général que le théorème 1.2 est encore valable.La justification est très technique.

Remarque: Le théorème (II.4.5.) montre que l'on ne change pas la fonction de valeur en travaillant sur l'espace canonique.

Çomme dans tous les travaux cités, on peut déduire des propriétés de l'application $x \longrightarrow \tilde{Q}_x$ des propriétés supplementaires sur v: par exemple, si cette application est s.c.s. et si E est compact, on montre que v est s.c.s. après avoir établi que le graphe de $x \rightsquigarrow \mathfrak{R}(x)$ est fermé et contenu dans un produit d'espaces compact.(Voir [E.H.J.1 et 2] ou [E.L.M.].

2.Programmation dynamique.

Nous avons montré dans de nombreux travaux ,comment ,du théorème 1.2 et de la stabilité de l'ensemble des régles, on peut déduire le principe de la programmation dynamique. Nous ne le referons pas içi, car la démonstration est très lourde et se trouve en détails dans ([E.K.]p 217).

Proposition 2.1.:(*programmation dynamique*).
(i)*Le processus*

$$J^q_t = H^q_t\ v(X_t)\ 1_{\{t<T\}} + H^q_{T-}\ g(X_{T-})\ 1_{\{0<T\leq t\}} + \int_0^{t\wedge T} H^q_s\ h(X^-_s, q_s)\ dA_s$$

est pour tout q_t *une* P_x*-surmartingale càdlàg.*

(ii)*un contrôle* q^* *est optimal si et seulement si* $J^{q^*}_t$ *est une* P_x*-martingale locale.*

On peut aussi énoncer ce critère en faisant intervenir les probabilités Q^q_x. Pour cela , on note que grâce au théorème I.3.1. la proposition 2.1. est équivalente à

(i bis) $\bar{J}^q_t = v(X_t)\ 1_{\{t<T\wedge\zeta\}} + g(X_{T-})\ 1_{\{0<T\leq t\wedge\zeta\}} + \int_0^{t\wedge T\wedge\zeta} h(X^-_s, q_s)\ dA_s$

est une Q^q_x-surmartingale et une martingale si et seulement si q est optimal.

En utilisant la décomposition de la semi-martingale $v(X_t)1_{\{t<T\}}$ sous P_x, nous donnons un critère équivalent à celui énoncé dans la proposition 2.1. qui fait intervenir l'hamiltonien du système de contrôle. On voit alors apparaitre une forme d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman.On en déduit aisément l'existence d'un contrôle markovien optimal, qui de plus est non relaxé, en exploitant à plusieurs reprises l'existence(montrée au paragraphe II.4) d'un contrôle optimal relaxé.

Nous définissons tout d'abord la notion d'équations d'H.J.B. faibles:

Définition 2.2.
Soit H(u,p,v)(x) un hamiltonien défini sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
Une fonction w est une solution faible d'H.J.B. s'il existe des fonctions $\mathcal{L}w$ et ∇w vérifiant:

(i) $w(X_t)\ 1_{\{t<T\}} - \int_0^{t\wedge T} \mathcal{L}w(X_s)\ dA_s - g(X^-_T)\ 1_{\{0<T\leq t\}}$

est une P_x-semimartingale continue à gauche en T, dont les crochets avec N sont de la forme $\int_0^{t\wedge T} \nabla w^*(X_s)\ \alpha(X_s)\ dA_s$.

(ii)$H(\mathcal{L}w(y),\nabla w(y),w(y))(y)=0$ $U_A(x,.)$ p.s.,la mesure potentielle $U_A(x,dy)$ étant définie par

$$\int f(y)\ U_A(x,dy) = P_x \int_{[0,T]} f(X_s)\ dA_s$$

Théorème 2.3
(i)*La fonction de valeur* v(x) *est l'unique solution faible de l'équation d'*H.J.B. *associée à l'hamiltonien*

$$H(u,p,v)(x) = \sup_a \{ u + p^*\ \alpha(x)\ n(x,a) + h(x,a) - c(x,a)\ v\}$$

(ii) *Soit* $k(u,p,v)(x)$ *une fonction qui réalise le sup dans la définition de* H. *Le processus* $u^*_s = k(\mathcal{L}v(X^-_s), \nabla v(X^-_s), v(X^-_s))(X^-_s)$ *est un contrôle markovien optimal.*

Démonstration:
De la proposition 5.4, nous déduisons aisément que : $v(X_t)\,1_{\{t<T\}} - v(X_0)\,1_{\{0<T\}}$ est une semimartingale, fonctionnelle additive pour le processus X_t tué au temps terminal T.
D'après [C.J.P.S.], elle admet une décomposition de la forme

$$v(X_t)\,1_{\{t<T\}} = v(X_0)\,1_{\{0<T\}} + \int_0^{t\wedge T} \mathcal{L}v(X^-_u)\, dA_u + \int_0^{t\wedge T} \nabla v^*(X^-_u)\, dN_u$$

$$+ M_t + V_t - v(X_.)^-_T\, 1_{\{0<T\leq t\}}$$

où $v(X_.)^-_T = \lim\limits_{t\nearrow T} v(X_t)$, et où M et V sont des processus continus en T, M est une martingale locale, orthogonale à $N_{t\wedge T}$ et V un processus à variation finie prévisible, singulier par rapport à dA_t.
L'existence des fonctions $\mathcal{L}v(x)$ et $\nabla v(x)$ est établie dans [C.J.P.S.] à partir de la généralisation du théorème de Motoo sur la densité d'une fonctionnelle additive absolument continue par rapport à une autre.
On identifie alors, grâce au calcul d'Ito, la partie à variation finie prévisible Σ^q_t de J^q_t par la formule:

$$\Sigma^q_t = \int_0^{t\wedge T} H^q_s\,(\mathcal{L}v(X_s) + \nabla v^*(X_s)\,\alpha(X_s)\,n(X_s,q_s) + h(X_s,q_s) - c(X_s,q_s)\,v(X_s))\,dA_s$$

$$+ \int_0^{t\wedge T} H^q_s\, dV_s + H^q_T\,(\,g(X^-_T) - v(X_.)^-_T)\, 1_{\{0<T\leq t\}}$$

Le processus H^q étant strictement positif, nous voyons que $S^q_t := \int_0^{t\wedge T} (H^q_s)^{-1}\, d\Sigma^q_s$, a les mêmes propriétés que Σ^q_t à savoir : S^q_t est un processus décroissant prévisible, identiquement nul si et seulement si q est optimal.
Nous tirons parti de l'existence d'un contrôle q^* optimal (théorème 4.3): $S^{q^*}_t$ est identiquement nul.
A et V ne chargeant pas le graphe de T, cela implique que P_x p.s. $g(X^-_T) = \lim\limits_{t\nearrow T} v(X_t) = v(X_.)^-_T$ sur $0 < T < \infty$
Commme V est singulier par rapport à A, on a aussi P_x p.s $V_t = 0$ et naturellement $(P_x \times dA_s)$ p.s:

$k(X^-_s, q^*_s) =$

$\mathcal{L}v(X_s) + \nabla v^*(X_s)\,\alpha(X_s)\,n(X_s,q^*_s) + h(X_s,q^*_s) - c(X_s, q^*_s)\,v(X_s) \equiv 0$
Mais d'autre part, on a toujours :pour tout q

$$k(X^-_s, q_s) \leq 0 \quad P_x \times dA_s \text{ p.s;}$$

Il reste à montrer que les ensembles négligeables peuvent être choisis indépendants du contrôle.

On définit un sous ensemble N^a de $\Omega\times \mathbb{R}^+$ par $N^a=\{k(X_s^-, a) > 0\}$ où a est un contrôle constant, appartenant à une partie J dénombrable dense de A.
$N = \bigcup_{a\in J} N^a$ est $dP\times dA_s$ négligeable et par continuité en a des fonctions qui interviennent on vérifie facilement qu'en dehors de N, $k(X_s^-, q_s)$ est négatif ou nul pour tout contrôle.
Plaçons-nous en dehors de N : l'existence d'un contrôle optimal implique alors que $k(X_s^-, q_s^*) = \int k(X_s^-, a)\, q_s^*(da) \equiv 0$.

et donc aussi(puisque $a \longrightarrow k(X_s^-, a)$ est continu et négatif)

$$0 \equiv \int k(X_s^-, a)\, q_s^*(da) \leqslant \int \sup_a k(X_s^-, a)\, q_s^*(da) \leqslant 0$$

On en déduit que $\sup_a k(X_s^-, a) = 0$

Nous avons établi ainsi que v est une solution faible d'H.J.B.De plus, tout contrôle q tel que $k(X_s^-, q_s) \equiv 0$ est optimal.Nous en construisons un à partir de la fonction mesurable

$$a^*(y) = \arg\max k(y,a)$$

Le processus $a^*(X_s)\, 1\{s<T\}$ vérifie bien les conditions d'optimalité.

<u>Réciproquement</u>
Supposons que w soit une solution faible d' H.J.B associée à l'hamiltonien H.
Par les mêmes règles de calcul stochastique, on voit que

$$H_t^q\, w(X_t)\, 1_{\{t<T\}} - w(X_0)\, 1_{\{0<T\}} - \int_0^{t\wedge T} h(X_s^-, q_s)\, H_s^q\, dA_s - H_T^q\, g(X_T^-)\, 1_{\{0<T\leqslant t\}}$$

est une P_x-surmartingale et donc si $P_x(0<T) = 1$,

$$w(x) \geqslant P_x\left[\int_0^T H_s^q\, h(X_s^-, q_s)\, dA_s + H_{T-}^q\, g(X_T^-)\right]$$

En utilisant la fonction k(y) qui réalise le sup dans l'hamiltonien, on montre que si $P_x(0<T) = 1$, $w(x) = J(x, k(X^-))$
On a donc $w(x) = v(x)$. Nous avons donc montré le résultat important suivant

<u>Théorème 2.4</u>
La fonction de valeurs associée aux contrôles processus ou aux contrôles relaxés est la même. Il existe un contrôle optimal markovien qui est un processus.

APPENDICE

Nous regroupons dans l'appendice les résultats concernant les conditions d'intégrabilité (A1), et les détails de la démonstration concernant la compacité des règles (A2).

(A1)Nous rappellons un résultat classique([L.M.] ou [Ya]) concernant l'équi-intégrabilité des martingales exponentielles: Soit S un temps d'arrêt tel qu'il existe $k \in]1,4[$ tel que

$$(1) \qquad \sup_q E(\exp \frac{k}{2} \langle n^q * N, n^q * N\rangle_S) < \infty$$

alors $\sup_q E\{(L^q_S)^r\} < \infty$ où $r = \dfrac{k}{2\sqrt{k}-1}$.

Remarque: La condition (1) est réalisée si $\exp \frac{k}{2} \|n\|^2 \int_0^S \|\alpha_s\| \, dA_s$ est intégrable ,où $\|n\|=\sup|n_i|$ et $\|\alpha\|=\sum (|\alpha_{i,j}|))$.

Nous démontrons alors le résultat suivant:

Théoréme 1

On suppose qu'il existe un temps d'arrêt S , *deux réels* r *et* p *tels que* $1 < p < r$ *et*

(a) $\sup \{ E(\{L^q_S\}^r);q \in \mathfrak{U}(\mathcal{F})\} < \infty$

(b)A_S *est de puissance* $\dfrac{r}{r-p}$ *intégrable,*

(c) *si* $\psi(s):=(r-1)\, n^*(X^-_s,q_s)\, \alpha(X^-_s)\, n(X^-_s,q_s) -2\, c(X^-_s,q_s)$ *on a* $\sup\{ \psi(s) ,S \leqslant s \leqslant T\} \leqslant \beta < 0$ *où* T *est le temps terminal*

alors

(1) *la surmartingale* $(H^q_t,t\leqslant T)$ *est de la classe* D

(2) *les régles sont équibornées*

(3) $\sup \{ P(\int_0^T (H^q_s)^p \, dA_s + (H^q_{T-})^p) ;q \in \mathfrak{U}(\mathcal{F})\} < \infty.$

Remarque:

Nous avons utilisé un temps S pour pouvoir traiter les deux cas :
- T borné et L martingale uniformément integrable
- T infini et c minoré par une constante strictement positive.

Lorsque T est un temps de sortie d'un ensemble D , la condition (c) est vérifiée si $(r-1)\, n^*(x,a)\, \alpha(x)\, n(x,a) - 2\, c(x,a) \leqslant \beta < 0$ pour x appartenant à $\mathcal{V} \cap D$,où $\mathcal{V}$ est un voisinage de δD et où S est un temps d'entrée dans $\mathcal{V} \cap D$.
Si α est borné, et si $c(x,a) \geqslant \gamma > 0$, il est facile de voir que l'on peut trouver r et β tels que (c) soit vérifiée. On trouvera dans ([L.M.],[Ya]) d'autres conditions impliquant (a).

Démonstration:

(1)Soit U un temps d'arrêt tel que $U \leqslant T$.

$$H^q_U = H^q_U\, 1_{U \leqslant S} + H^q_U\, 1_{U > S} \leqslant L^q_U\, 1_{U \leqslant S} + H^q_U\, 1_{U > S}.$$

Pour $s \geqslant S$ il est facile de remarquer que

$$(H_s^q)^r = M_s \exp \int_{[S,s[} r\,\psi(u)\, dA_u \leq M_s$$

où M est une surmartingale positive , martingale locale exponentielle, d'où $E(M_U) \leq 1$ pour tout temps d'arrêt U. Il est alors évident que $\sup\{E(H_U^q)^r, q \in \mathfrak{U}(\mathfrak{F}), U \text{ t.d'a.}\} < \infty$ en utilisant (a) , et (1) en résulte.

(2) Une régle a pour masse

$$P \int_{[0,T[} H_s^q\, dA_s + H_{T-}^q \leq 1 + P \int_{[0,T[} H_s^q\, dA_s .$$

Il est facile de voir que sous (c) , le coefficient c est minoré sur [S,T] par une constante strictement positive θ , d'où:

$$P\int_{[0,T[} H_s^q\, dA_s \leq P(L_S^q A_S) + P \int_{[S,T[} L_s \exp -\theta A_s\, dA_s$$

L est une martingale locale: soit (T_n) une suite de temps d'arrêt qui la réduit:

$$P\int_{[S,T\wedge T_n]} L_s \exp -\theta A_s\, dA_s = P\left(L_{T\wedge T_n} \frac{1}{\theta} \left(\exp -\theta A_S - \exp -\theta A_{T\wedge T_n} \right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{\theta} P(L_{T\wedge T_n}) \leq \frac{1}{\theta}.$$

La majoration étant uniforme en n , on en déduit

$$P\int_{[0,T[} H_s^q\, dA_s \leq P(L_S^q A_S) + \frac{1}{\theta} \leq \{P(L_S^q)^r\}^{1/r} \{P(A_S^{r/(r-1)})\}^{(r-1)/r} + \frac{1}{\theta}$$

et cette quantité est finie car $\frac{r}{r-1} < \frac{r}{r-p}$, et A_S est $\frac{r}{r-p}$ intégrable.

(3) Ce résultat se démontre avec les mêmes méthodes. Compte tenu de (1) ,et de l'inégalité $(p-1)n^*\alpha n-2c < (r-1)n^*\alpha n-2c$ il suffit de vérifier

$$\sup P \int_{[0,T[} (H_s^q)^p\, dA_s \leq P \int_{[0,S[} (L_s^q)^p\, dA_s$$

$$+ P \int_{[S,T[} M_s \exp \int_{[S,s[} p\psi(u)\, dA_u\, dA_s$$

où M est une martingale locale exponentielle.

$$P \int_{[0,T[} (L_s^q)^p\, dA_s \leq P\{ (L_S^q)^p A_S\} \text{ car } (L_s^q)^p \text{ est une sousmartingale}$$

$$\leq \{ P(L_S^q)^r\}^{p/r} \{ P(A_S)^{r/r-p} \}^{r-p/r}$$

et le second terme se majore comme dans la démonstration de (2) par

$$P\int_{[S,T[} M_s \exp p\beta(A_s - A_S)\, dA_s \leqslant \frac{-1}{p\beta}$$

(A2) Il nous reste à terminer la démonstration concernant la compacité de la famille $\mathfrak{K}(x)$.

Théorème 2:
Sous les hypothèses du théorème 1, $\mathfrak{K}(x)$ *est compact*

Démonstration : Il reste à montrer que la famille des densités H^q (I.2.4) est relativement compacte pour la topologie $\sigma(L^1, L^\infty, dP.dA)$. Nous allons utiliser l'hypothése (c) pour nous ramener à une mesure finie.

Soit $d\tilde{A}_t$ la mesure définie par $d\tilde{A}_t = dA_t$ pour $t \leqslant S$
$= \exp -\xi(A_t - A_S)\, dA_t$ pour $t \geqslant S$

où ξ est une constante positive.

La mesure $dP.d\tilde{A}$ est finie. La famille $\tilde{H}^q$ définie par

$$\tilde{H}^q_t = H^q_t \quad \text{si } t \leqslant S$$
$$= \exp \xi(A_t - A_S)\, H^q_t \quad \text{si } t \geqslant S$$

est uniformément intégrable par rapport à $dP.d\tilde{A}$:

$$P\int_{[0,T[} (\tilde{H}^q_t)^p\, d\tilde{A}_t \leqslant P\int_{[0,S[} (H^q_t)^p\, dA_t$$

$$+P\int_{[S,T[} M_s \{\exp\int_{[S,s[} p\, \psi(u)\, dA_u\} \exp p\xi(A_s - A_S)\, d\tilde{A}_s$$

le second terme du second membre est majoré par

$$P\int_{[S,T[} M_s \exp \{p\beta+\xi(p-1)\}\, (A_s - A_S)\, dA_s\,.$$

si ξ est tel que $p\beta+\xi(p-1) < 0$ alors cette quantité est majorée par $(-1)/p\beta+\xi(p-1)$.

L'uniforme intégrabilité et donc la relative compacité de $\tilde{H}^q$ par rapport à $dP.d\tilde{A}$ en résultent. C'est exactement la relative compacité de H^q dans $\sigma(L^1, L^\infty, dP.dA)$.

BIBLIOGRAPHIE

[Bi] J.M.BISMUT
Théorie probabiliste du contrôle des diffusions
Mémoirs Amer. Math Soc. 167 (1975)

[B.G] R.M.BLUMENTHAL, R.K.GETOOR
Markov Processes and Potential theory.
Academic Press - 1968

[B.Y.] P.BREMAUD,M.YOR.
Changes of filtrations and of probability measures.
Z.Wahrsch.Verw.gebiete.45 (1978) 269-295.

[C.J.P.S.] E.CINLAR,J.JACOD,P.PROTTER,M.J.SHARPE.
Semi-martingales and Markov processes.
Z.Wahrsch.Verw.Gebiete.54 (1980) 161-219.

[Da] M.H.A.DAVIS.
On the existence of optimal policies in stochastic control. SIAM journal of control 11 (1973) 587-594

[E.H.J.1] N.EL KAROUI, D.HUU NGUYEN, M.JEANBLANC PICQUE.
Compactification methods in the control of degenerate diffusions .Existence of an optimal control.
Stochastics 20 (1987) 169-219

[E.H.J.2] N.EL KAROUI, D.HUU NGUYEN, M.JEANBLANC PICQUE.
Existence of an optimal markovian filter for the control under partial observations.
To appear in SIAM journal of Control

[E.L.M] N.EL KAROUI, J.P.LEPELTIER, A.MILLET.
A probabilistic approach of the reduite.
Submitted to Probability theory and related fields

[E.K] N.EL KAROUI.
Les aspects probabilistes du contrôle stochastique.
Ecole d'été de Saint Flour 1979
Lect. Notes in Math. n°876. 74-239. Springer Verlag.

[El] R.J.ELLIOT.
The optimal control of a stochastic system.
SIAM Journal of Control 15 (1977)

[Fö] H.FOLLMER.
The exit measure of a supermartingale.
Z.Wahrsch Verw.Gebiete 21 (1972) 154-166

[Ge] R.K.GETOOR.
Markov Processes:Ray Processes and Right Processes.
Lecture notes in mathematics 440.
Springer Verlag 1975.

[J.M.] J.JACOD, J.MEMIN.
Sur un type de convergence intermédiaire entre la convergence en loi et la convergence en probabilité. Séminaire de Strasbourg XV.
Lecture notes in mathematics n°850.
Springer Verlag.1979-1980.

[Kr] N.V.KRYLOV.
Controlled diffusion processes. Springer Verlag(1980)

[L.M.] D.LEPINGLE, J.MEMIN .
Intégrabilité uniforme et dans L^r des martingales exponentielles. Séminaire de probabilité. Rennes 1978

[Ya] J.A.YAN.
A propos de l'intégrabilite uniforme des martingales exponentielles .Séminaire de Strasbourg XVI .
Lecture notes in mathematics 920.
Springer Verlag .

[Yo] Ch.YOEURP.
Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de Strasbourg X.
Lecture notes in mathematics 511.
Springer Verlag.1976