

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

## **Distributions, noyaux, symboles, d'après Kree**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 22 (1988), p. 467-476

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1988\\_\\_22\\_\\_467\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__467_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

DISTRIBUTIONS, NOYAUX, SYMBOLES d'après KREE  
par P.A. Meyer

Cet exposé est lié à la fois au travail sur les distributions de Hida ( Meyer-Yan , Sém. Prob. XXI p. 8-26 ) et aux exposés sur les noyaux de Maassen ( Sém. Prob. XX, p. 307-312 et XXI p. 39-47 ). Il s'agit de réunir les deux aspects, en représentant les opérateurs sur  $L^2(\Omega)$  ( où  $\Omega$  est l'espace de Wiener ) par leur " noyau-distribution ", et en introduisant un calcul symbolique sur les opérateurs, qui est un " calcul pseudo-différentiel en dimension infinie ". Ce calcul a été développé par P. Krée et B. Lascar entre autres, dans les années autour de 1975, dans une tentative pour répondre aux besoins mathématiques de la théorie quantique des champs. A la suite des récents travaux d'analyse de Wiener, Krée a repris ces questions dans une optique plus probabiliste, dans l'article [ ]. Le présent exposé en donne une version dans la situation concrète qui nous est familière. Cela aboutit certainement à défigurer la théorie, mais la rend aussi ( me semble-t-il ) beaucoup plus abordable.

Nous laissons entièrement de côté l'axiomatique des " espaces chaotiques " que présente Krée, afin d'unifier les différentes interprétations probabilistes de l'espace de Fock ( Wiener, Poisson, et d'autres peut être encore inconnues ) ; nous laissons de côté aussi les distributions vectorielles ( sauf situations concrètes ). Le lecteur qui ignore tout des espaces nucléaires se rassurera en pensant que le rédacteur en ignore presque tout, et que le tribut qui leur est payé est purement verbal.

Il y a de fortes ressemblances entre certains résultats présentés ici et des résultats de S. Ustunel, mais il ne s'agit pas exactement de la même chose : nous travaillons ici sur des distributions "à la Hida" et Ustunel sur des distributions "à la Watanabe" . La partie formelle des raisonnements est la même dans les deux cas, mais les résultats du type de Watanabe exigent plus de travail ( Krée dispose d'ailleurs d'une technique, celle des espaces normaux de distributions, permettant de traiter les deux types de manière unifiée ).

J'ai utilisé pour la rédaction des notes non publiées de J.A. Yan ( préparées pour une suite éventuelle du travail Meyer-Yan du Sém. XXI ).

## NOTATIONS ET DEFINITIONS GENERALES

L'espace usuel des fonctions  $C^\infty$  à support compact sur  $\mathbb{R}_+^k = ]0, \infty[$  est noté  $\mathcal{D}$ , et muni de sa topologie (nucléaire) usuelle, pour laquelle son dual est l'espace  $\mathcal{D}'$  des distributions. Sur  $(\mathbb{R}_+^k)^k$  ( $k \geq 1$ ) nous distinguons l'espace  $\mathcal{D}_k$  des fonctions-test de son sous-espace dense  $\mathcal{D}^k$ : ce dernier est un produit tensoriel algébrique  $k$ -uplé de  $\mathcal{D}$  par lui-même, il est donc engendré par les  $f_1 \otimes \dots \otimes f_k$  ( $f_i \in \mathcal{D}$ ), tandis que le premier est un produit tensoriel complété. La présence d'un  $s$  en indice indique que l'on se restreint aux fonctions ou distributions symétriques (ainsi  $\mathcal{D}_s^k$  est engendré par les  $f^{\otimes k}$ ,  $f \in \mathcal{D}$ ); le dual commun de  $\mathcal{D}_k$  et  $\mathcal{D}^k$  est  $\mathcal{D}'_k$ , l'espace des distributions sur  $(\mathbb{R}_+^k)^k$ . Le dual de  $\mathcal{D}_{ks}$  est  $\mathcal{D}'_{ks}$ , mais nous convenons que si  $f$  est une fonction-test symétrique,  $F$  une distribution symétrique (en dimension  $k$ ), on prend

$$(1) \quad (F, f)_s = k! (F, f)_{\text{ordinaire}}$$

Dans cet exposé, nous ne considérons que des fonctions-test et distributions REELLES.

Soit  $\langle , \rangle$  une forme bilinéaire symétrique (continue) sur  $\mathcal{D}$ ; on l'étend à  $\mathcal{D}^k$  par la formule  $\langle f_1 \otimes \dots \otimes f_k, g_1 \otimes \dots \otimes g_k \rangle = \langle f_1, g_1 \rangle \dots \langle f_k, g_k \rangle$  et à  $\mathcal{D}_s^k$  par la formule (différente !)

$$(2) \quad \langle f^{\otimes k}, g^{\otimes k} \rangle = k! \langle f, g \rangle^k \quad (\text{analogue à (1)}).$$

Nous désignons par  $\mathcal{V}$  la somme directe des  $\mathcal{D}_s^k$  ( $y$  compris  $\mathbb{R}$  pour  $k=0$ ). La lettre  $\mathcal{V}$  est l'initiale de "variable aléatoire test", qui se comprendra dans un instant. Si l'on remplace  $\mathcal{D}_s^k$  par son complété  $\mathcal{D}_{ks}$ , on obtient un espace un peu plus gros  $\overline{\mathcal{V}}$ . Si l'on munit chaque espace de sa topologie naturelle (nucléaire),  $\mathcal{V}$  ou  $\overline{\mathcal{V}}$  de sa topologie de somme directe loc. convexe,  $\overline{\mathcal{V}}$  est aussi nucléaire, et  $\mathcal{V}$  y est dense. Leur dual commun est noté  $\mathcal{V}'$  (qui s'interprétera comme l'espace des v.a. généralisées). La forme bilinéaire  $\langle , \rangle$  considérée plus haut peut être étendue à  $\mathcal{V}$  en utilisant la formule (2) au niveau  $k$ , et en convenant que deux espaces  $\mathcal{D}_s^j$ ,  $\mathcal{D}_s^k$  de niveaux différents sont orthogonaux. Si l'on prend pour  $\langle , \rangle$  le produit scalaire usuel  $\int f(t)g(t)dt$  - ce qui sera presque toujours le cas - le complété de  $\mathcal{V}$  est l'espace de Fock usuel  $\mathfrak{F}$ .

Passons aux interprétations probabilistes: à la suite  $\underline{f} = \sum_k f_k/k! \in \mathcal{V}$  ( $f_k \in \mathcal{D}_s^k$ ,  $f_k=0$  sauf pour un nombre fini d'indices) nous associons la v.a.  $I(\underline{f}) = \sum_k I_k(f_k)/k!$ , où  $I_k$  est l'intégrale stochastique multiple de Wiener. Avec les conventions adoptées ci-dessus,  $I$  est isométrique du Fock dans  $L^2(\Omega)$ . De même à la série formelle  $\underline{F} = \sum_k F_k/k! \in \mathcal{V}'$  on associe la v.a. généralisée sur l'espace de Wiener notée symboliquement

$$I(\underline{F}) = \sum_k I_k(F_k)/k!$$

mais dont la définition véritable est donnée par la formule

$$(3) \quad (I(\underline{F}), I(\underline{f})) = \sum_k (F_k, f_k)_s / k!^2 = \sum_k (F_k, f_k) / k!$$

Krée distingue soigneusement ce qui se passe sur le Fock  $\mathfrak{F}$  de ce qui se passe sur  $L^2(\Omega)$ , de sorte que tout résultat a deux lectures, avec des flèches d'isomorphismes dans tous les sens. Nous préférons ici identifier les deux espaces (  $I$  est une excellente notation pour la "transformation chaotique" ci-dessus, mais aussi pour l'application identique ).

Les vecteurs exponentiels  $\mathcal{E}(z)$  sont les éléments du Fock

$$(4) \quad \mathcal{E}(z) = \sum_k z^{\otimes k} / k!$$

$z$  parcourant  $\mathcal{A}$  ( et non  $L^2(\mathbb{R}_+)$  comme dans les exposés précédents de la série ). Ce sont en fait les "vecteurs-test" les plus utilisés, et il est bien regrettable que notre espace  $\mathcal{V}$  soit trop petit pour les contenir ! La fonction caractéristique de la v.a. généralisée  $\underline{F} = \sum_k F_k / k!$  n'est pour cette raison qu'une série formelle, et non une vraie fonction analytique sur  $\mathcal{A}$  :

$$(5) \quad \begin{aligned} F^\wedge(z) &= \sum_k (F_k, z^{\otimes k})_s / k!^2 = \sum_k (F_k, z^{\otimes k}) / k! \\ &= (\underline{F}, \mathcal{E}(z)) \text{ (formellement)} \end{aligned}$$

Par exemple, prenons  $F_k = y^{\otimes k}$ , de sorte que  $\underline{F}$  est la fonction  $\mathcal{E}(y)$ . Alors  $(F_k, z^{\otimes k}) = \langle y, z \rangle^{k^k}$ , et on obtient que la f.c. de  $\mathcal{E}(y)$  est  $e^{\langle y, z \rangle}$ , ce qui est bien la valeur de  $\langle \mathcal{E}(y), \mathcal{E}(z) \rangle$  sur l'espace de Wiener.

Au lieu de la terminologie lourde de fonction caractéristique de  $\underline{F}$ , je dirais volontiers le symbole de  $F$ .

Une petite digression : si l'on veut un espace de v.a. test contenant les vecteurs exponentiels, on peut procéder ainsi : demander que la v.a. test  $\underline{f} = \sum_k I_k(f_k) / k!$  soit telle que pour toute forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  symétrique  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  continue sur  $\mathcal{A}$ , la suite  $\langle f_k, f_k \rangle / k!$  soit à décroissance rapide. Je pense qu'on aboutit ainsi à un espace nucléaire de v.a. test.

Tout ceci se trouve déjà dans l'article de Meyer-Yan du Sém. XXI sur les distributions de Hida : notre espace  $\mathcal{V}$  de v.a. test est un peu plus petit que celui du Sém. XXI, qui était  $\overline{\mathcal{V}}$ . Pour la commodité du lecteur, reprenons quelques résultats bien connus :

- Si  $F$  et  $G$  sont deux v.a. généralisées, on peut définir leur produit de Wick  $H = F : G$  ( ou  $F \circ G$  selon l'humeur du moment ), dont la fonction caractéristique est  $H^\wedge(z) = F^\wedge(z) G^\wedge(z)$ .

- Si  $F$  est une v.a. généralisée,  $a_u^+ F$  ( $u \in \mathcal{A}$ ) est le produit de Wick  $u : F$  (ou plus exactement  $\tilde{u} : F$ ), donc sa fonction caractéristique est  $\langle u, z \rangle F^\wedge(z)$ . On notera que  $u$  peut ici être remplacé par une distribution.

- L'opérateur d'annihilation  $a_u^-$  ( $u \in \mathcal{B}$ ) opère sur les v.a. généralisées, la f.c. de  $a_u^- F$  étant  $D_u F^{\wedge}(z)$  étant  $D_u F^{\wedge}(z)$ , la dérivée de  $F^{\wedge}(z)$  dans la direction de  $u$ .

#### PROCESSUS GENERALISES. GRADIENT ET DIVERGENCE

A côté des v.a. test et des v.a. généralisées, nous allons considérer des processus-test ( éventuellement à  $k$  indices temporels ) et des processus généralisés ( à  $k$  indices ).

Pour  $k=1$ , un processus classique est un objet  $(X_t)$  qui, lorsqu'on forme  $\int X_t f(t) dt$ , donne une variable aléatoire. Un processus généralisé est un objet qui, lorsqu'on le "contracte" de manière analogue avec  $f \in \mathcal{B}$ , donne une v.a. généralisée. Les processus à  $k$  indices s'obtiennent en remplaçant  $\mathcal{B}$  par  $\mathcal{B}_k$  - en principe, pas de symétrie ici.

Passons aux définitions précises : un processus-test à  $k$  indices est un élément de  $\mathcal{V}_{(k)} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{B}_k$  (produit tensoriel algébrique ; on pourrait se restreindre à  $\mathcal{V} \otimes \mathcal{B}^k$  pour avoir un plus petit espace). Comme  $\mathcal{V}$  est une somme directe dénombrable d'espaces nucléaires (non complets), il en est de même de  $\mathcal{V}_{(k)}$  ; on le munit de la topologie somme directe correspondante, et on forme le dual (nucléaire)  $\mathcal{V}'_{(k)}$ , espace des processus généralisés à  $k$  indices. Par exemple, un élément typique de  $\mathcal{V}_{(1)}$  est de la forme  $y^{\otimes p} \otimes (y \in \mathcal{B}, v \in \mathcal{B})$  : ceci représente un processus non adapté  $(X_t)$ , produit d'une intégrale stochastique  $p$ -uple en  $\omega$  par la fonction  $v(t)$ . Si  $f \in \mathcal{B}$ , l'intégrale  $\int X_t f(t) dt$  est la v.a.  $y^{\otimes p} \langle y, v \rangle$ . Cette opération s'étend en la contraction  $f$  qui applique continûment  $\mathcal{V}_{(1)}$  dans  $\mathcal{V}$ . Comme  $\mathcal{V}_{(1)}$  est dense dans  $\mathcal{V}'_{(1)}$ , on vérifie sans peine que la contraction avec  $f$  s'étend en une application continue de  $\mathcal{V}'_{(1)}$  dans  $\mathcal{V}'$ . Il y a là quelques détails évétesques que nous omettons.

La fonction caractéristique d'un processus généralisé  $X$  ( $k=1$ ) est formellement la valeur de  $X$  sur  $\mathcal{E}(z) \otimes z'$ , i.e. une fonction  $X^{\wedge}(z, z')$  sur  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ , linéaire par rapport à la seconde variable  $z'$ . En fait,  $\mathcal{E}(z) \otimes z'$  n'est pas un processus-test, et  $X^{\wedge}(z, z')$  est donc une série formelle. Plus généralement, la f.c. d'un processus généralisé à  $k$  indices est une fonction (série formelle...)  $k$ -linéaire par rapport à ses dernières variables.

Après ces définitions un peu pénibles à avaler, voici des exemples. Le gradient  $\nabla F$  d'une v.a. généralisée  $F$  est un processus généralisé qui, par contraction avec  $u \in \mathcal{B}$ , donne  $a_u^- F$  ( la dérivée de  $F$  suivant  $u$  ). Pour voir que cela existe, on commence par une v.a. test typique  $F = y^{\otimes p}$  ; alors  $a_u^- F = p y^{\otimes p-1} \langle u, y \rangle$ , et l'on vérifie aussitôt que  $\nabla F$  est le processus généralisé  $p y^{\otimes p-1} \otimes y$ . Alors  $\nabla$  définit un opérateur continu de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}_{(1)}$ , et se prolonge par continuité en un opérateur de  $\mathcal{V}'$  dans

1. Pour alléger, on a supprimé le  $\otimes$  de  $y^{\otimes p}$  par endroits.

$\mathcal{V}'_1$  - ce que l'on cherchait à construire.

Soit  $F$  une v.a. généralisée, de f.c.  $F^\wedge(z)$ ; quelle est la f.c. de  $\nabla F$ ? L'exemple précédent va nous éclairer. On a dans ce cas

$$\begin{aligned} F^\wedge(z) &= \langle z^p/p!, y^p \rangle = \langle z, y \rangle^p \\ \text{et} \quad (\nabla F)^\wedge(z, z') &= p \langle z^{p-1}/(p-1)!, y^{p-1} \rangle \langle z', y \rangle \\ &= p \langle z, y \rangle^{p-1} \langle z', y \rangle \\ &= D_z F^\wedge(z) \end{aligned}$$

(dérivée de la série formelle  $F^\wedge(z)$  dans la direction  $z'$ ). Cette règle est générale (on la vérifie sur  $\mathcal{V}$  et on l'étend par continuité à  $\mathcal{V}'$ ). Plus généralement, l'opérateur  $\nabla$  transforme les processus généralisés à  $k$  indices en processus généralisés à  $k+1$  indices, et  $\nabla^k$  transforme les v.a. généralisées en processus généralisés à  $k$  indices.

En ce qui concerne  $\nabla^k$ , nous nous bornerons à la formule

$$\nabla^k(z^p) = p(p-1)\dots(p-k+1)z^{p-k} \otimes z \otimes \dots \otimes z \quad (k \text{ facteurs})$$

Cette formule met en évidence la symétrie de  $\nabla^k(z^p)$  par rapport à ses  $k$  variables "temporelles". Cependant, il n'est pas raisonnable de se limiter aux processus-test ou processus généralisés possédant une telle symétrie (cela a une conséquence : lorsqu'on étend le produit scalaire aux processus, on n'insère pas de factorielle à la manière de la formule (1)).

Nous définissons ensuite l'opérateur de divergence  $\delta$ , qui sera l'adjoint du gradient, et en particulier transformera les processus généralisés à  $k$  indices en processus généralisés à  $k-1$  indices. Prenons  $k=1$  pour commencer, et calculons  $\delta(y^p \otimes u)$  ( $y, u \in \mathcal{B}$ ); comme le gradient fait descendre d'un chaos, il nous suffit de calculer

$$\begin{aligned} \langle z^{p+1}, \delta(y^p \otimes u) \rangle &= \langle \nabla z^{p+1}, y^p \otimes u \rangle = (p+1) \langle z^p \otimes z, y^p \otimes u \rangle = \\ (p+1)! \langle z, y \rangle^p \langle z, u \rangle &= \langle a_u^- z^{p+1}, y^p \rangle = \langle z^{p+1}, a_u^+ y^p \rangle \end{aligned}$$

Ainsi,  $\delta(y^p \otimes u) = a_u^+ y^p$ , et plus généralement  $\delta(F \otimes u) = a_u^+ F$  pour toute v.a. généralisée  $F$  et tout  $u \in \mathcal{B}$  (et même  $u \in \mathcal{B}'$ !). En ce qui concerne les f.c., celle de  $F \otimes u$  est  $F^\wedge(z) \langle u, z' \rangle$ , et celle de  $a_u^+ F$  est  $F^\wedge(z) \langle u, z \rangle$ ; on voit que la règle générale est la suivante : si un processus généralisé  $(X_t)$  a une f.c.  $X^\wedge(z, z')$ , la v.a. généralisée  $\circ X$  a pour f.c.  $X^\wedge(z, z)$ .

Petit exercice : on a  $\nabla z^p = p z^{p-1} \otimes z$ , et en appliquant  $\delta$  on trouve  $p z^p$ . Ainsi  $\delta \nabla z^p = p z^p$  (opérateur de nombre).

OPERATEURS ET SYMBOLES D'OPERATEURS

En théorie classique des distributions, le théorème des noyaux de Schwartz dit que tout opérateur continu  $A : \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{B}'(\mathbb{R}^n)$  provient d'une distribution  $G$  sur  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , telle que  $\langle f, Ag \rangle = \langle f \otimes g, G \rangle$  ( $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ ,

$g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ) ; on dit que  $G$  est le noyau de l'opérateur  $A$  . Le théorème des noyaux est d'une très grande importance conceptuelle, d'une importance pratique beaucoup plus douteuse, car les distributions sont des objets bien compliqués ! Quoi qu'il en soit, ce théorème fournit un bon schéma pour poser les problèmes.

Ici, nous considérerons des opérateurs continus de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{V}'$ , comme formant la classe la plus large d'opérateurs raisonnables. Puisque  $\mathcal{V}$  est une somme directe des  $\mathcal{D}_{jS}$  (à une identification près) et  $\mathcal{V}'$  un produit des  $\mathcal{D}'_{kS}$ , un tel opérateur  $A$  peut être considéré comme une matrice d'opérateurs continus  $A_{jk} : \mathcal{D}_{jS} \rightarrow \mathcal{D}'_{kS}$ , donc de noyaux distributions sur  $]0, \infty[^j \times ]0, \infty[^k$ , séparément symétriques par rapport aux deux couples de variables. Un moyen de dire cela proprement consiste à introduire les éléments de matrice

$$(6) \quad \langle \mathcal{V}^j, A z^k \rangle = A_{jk}(\mathcal{V}^j, z^k) = a_{jk}(y, z) \quad (y, z \in \mathcal{D})$$

et  $A_{jk}$  s'interprète comme une distribution sur  $\mathbb{R}_+^{*j} \times \mathbb{R}_+^{*k}$ , tandis que  $a_{jk}(y, z)$  est un polynôme homogène de degré  $j$  en  $y$  et  $k$  en  $z$  .

Il existe une autre manière de faire, plus intéressante. Introduisons le symbole de l'opérateur  $A$  comme l'expression formelle

$$(7) \quad \hat{A}(y, z) = e^{-\langle \mathcal{V}, z \rangle} \langle \mathcal{E}(y), A \mathcal{E}(z) \rangle = e^{-\langle \mathcal{V}, z \rangle} \sum a_{jk}(y, z) / j! k!$$

Le coefficient  $e^{-\langle \mathcal{V}, z \rangle}$  a été choisi de telle sorte que  $\hat{1}(y, z) = 1$  . Le symbole se développe lui aussi sous la forme

$$(8) \quad \hat{A}(y, z) = \sum \alpha_{jk}(y, z) / j! k!$$

où  $\alpha_{jk}$  est un polynôme homogène continu de degré  $j$  en  $y$  et  $k$  en  $z$ , facile à calculer en fonction des  $a_{jk}$ , et correspondant aussi à un noyau-distribution  $G_{jk}$  . Avant d'aller plus loin, calculons quelques symboles.

- Opérateurs d'annihilation :  $a_f^- \mathcal{E}(z) = \langle f, z \rangle \mathcal{E}(z)$ , d'où le symbole  $\langle f, z \rangle$ .
- Opérateurs de création :  $a_g^+$  a pour symbole  $\langle \mathcal{V}, g \rangle$  (par passage à l'adjoint).
- Opérateurs de nombre :  $a_u^0$  a pour symbole  $\langle \mathcal{V}, uz \rangle$  ( et en particulier  $\langle \mathcal{V}, z \rangle$  pour l'opérateur  $N$ , correspondant à  $u=1$  ).

En particulier les symboles de  $da_t^+$ ,  $da_t^-$ ,  $da_t^0$  sont  $z(t)dt$ ,  $y(t)dt$ ,  $z(t)y(t)dt$ . Il n'est pas très difficile maintenant de calculer le symbole d'un opérateur du type considéré en physique (notation de Maassen plutôt que de Berezin)

$$(9) \quad \begin{aligned} A &= \int f_{jk}(s_1, \dots, s_j, t_1, \dots, t_k) da_{s_1}^+ \dots da_{s_j}^+ da_{t_1}^- \dots da_{t_k}^- \\ \hat{A}(y, z) &= \int f_{jk}(s_1, \dots, s_j, t_1, \dots, t_k) y(s_1) \dots y(s_j) z(t_1) \dots z(t_k) \\ &\quad ds_1 \dots ds_j dt_1 \dots dt_k \end{aligned}$$

En notation de Berezin, on écrit  $a_{\pm}^{\pm} dt$  au lieu de la notation analogue à celle d'une intégrale stochastique  $da_{\pm}^{\pm}$  ; si l'on se rappelle aussi que les distributions sont parfois écrites comme des densités formelles ( $(F, f) = \int F(s) f(s) ds$  par ex. ), on aboutit à l'expression suivante pour l'opérateur A de symbole donné par (8),  $G_{jk}$  étant le noyau-distribution associé au polynôme  $\alpha_{jk}$

$$(10) \quad A = \sum_{jk} \frac{1}{j!k!} \int G_{jk}(s_1, \dots, s_j, t_1, \dots, t_k) a_{s_1}^+ \dots a_{s_j}^+ a_{t_1}^- \dots a_{t_k}^- ds_1 \dots ds_j dt_1 \dots dt_k$$

Ainsi, on passe directement du symbole à l'expression de l'opérateur au moyen des créateurs et annihilateurs, et le symbole est la même chose que la fonction génératrice de Berezin. Ceci est bien satisfaisant. Dans ce contexte, l'opérateur de nombre joue un rôle secondaire : il permet de traiter explicitement certains types de singularités du noyau distribution sur la diagonale.

Signalons que la multiplication ponctuelle des symboles correspond (comme la multiplication ponctuelle des f.c.) à une opération simple sur les opérateurs, appelée produit de Wick, et notée  $:AB:$  par les physiciens ( nous préférons la noter  $A:B$ , comme il convient pour une opération associative et commutative ! ).

Krée introduit encore une autre écriture du type (10), importante pour certaines estimations d'analyse fonctionnelle, et due à B. Lascar. Considérons un opérateur du type  $Af = a_{u_1}^+ \dots a_{u_j}^+ a_{v_1}^- \dots a_{v_k}^- f(f \in \mathcal{V})$  ; c'est un opérateur différentiel d'ordre  $j+k$  sur l'espace de Wiener. La partie annihilation peut être conçue comme la formation du processus à  $k$  indices  $\nabla^k f$  (opérateur différentiel d'ordre  $k$ ) suivie de la contraction avec  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$  (opérateur d'ordre 0), après quoi on reforme un processus à  $j$  indices en tensorisant par  $u_1 \otimes \dots \otimes u_j$  (ordre 0) et on réalise la partie création en appliquant  $\delta^j$  (opérateur différentiel d'ordre  $j$ ). Le principe est général : tout opérateur A peut être écrit  $\sum_{jk} \delta^j U_{jk} \nabla^k$ , où  $U_{jk}$  transforme les processus-test à  $k$  indices en processus généralisés à  $j$  indices, et se construit simplement à partir des noyaux  $G_{jk}$  de (10). Cette représentation et la représentation (10) ne sont en fait que deux réécritures l'une de l'autre, plus ou moins commodes suivant le cas.

## CALCUL SYMBOLIQUE

Nous arrivons maintenant au calcul symbolique proprement dit : il s'agit dans la mesure du possible de tout récrire en remplaçant les vecteurs par leurs f.c. et les opérateurs par leurs symboles.



La première étape consiste à se faire un petit tableau de f.c., en recopiant certaines formules du début de l'exposé

$v \in \mathcal{F}$  a pour f.c. (symbole) la fonction linéaire  $\langle v, z \rangle$   
 $v_1 \circ \dots \circ v_n \in \mathcal{F}^n$  a pour symbole le polynôme  $\langle v_1, z \rangle \dots \langle v_n, z \rangle$   
 $\mathcal{E}(v) \in \mathcal{E}$  a pour symbole  $e^{\langle v, z \rangle}$

On prolonge le produit scalaire aux polynômes en décidant que

$$(11) \quad \langle \langle u, z \rangle, \langle v, z \rangle^k \rangle = 0 \text{ si } j \neq k, \quad k! \langle u, v \rangle^k \text{ si } j=k$$

Le produit scalaire peut être étendu à certains espaces de séries formelles ; en tout cas, le produit scalaire d'un polynôme et d'une série formelle est bien défini, et l'on a la formule

$$(12) \quad \langle P(z), e^{\langle v, z \rangle} \rangle = P(v)$$

( vérification : si  $P(z) = \langle u, z \rangle^k$ , on retombe sur (11) ).

Une autre formule utile ( c'est Girsanov sous forme abstraite ! )

$$(13) \quad \langle P(z) e^{\langle u, z \rangle}, F(z) \rangle = \langle P(z), F(z+u) \rangle$$

( vérification formelle : prendre  $F(z) = e^{\langle a, z \rangle}$ ,  $F(z+u) = e^{\langle a, u \rangle} F(z)$ , et appliquer (12) : le côté gauche comme le côté droit valent tous deux  $P(u) e^{\langle a, u \rangle}$ . Nous nous bornerons ici aux calculs formels... )

Maintenant, donnons nous un opérateur A de symbole  $A^{\wedge}(y, z)$ , un vecteur f de symbole (f.c.)  $f^{\wedge}(z)$ . Comment calcule-t-on le symbole (f.c.) de  $g = Af$  ? La formule est la suivante

$$(14) \quad g^{\wedge}(y) = \langle A^{\wedge}(y, z), f^{\wedge}(y+z) \rangle \text{ (produit scalaire en } z \text{)}$$

( vérification formelle : par définition  $g^{\wedge}(y) = \langle \mathcal{E}(y), Af \rangle$ . Prenons  $f = \mathcal{E}(u)$ , alors par définition du symbole  $g^{\wedge}(y) = \langle \mathcal{E}(y), A\mathcal{E}(u) \rangle$  est égal à  $e^{\langle y, u \rangle} A^{\wedge}(y, u)$ . D'autre part, d'après (13) on peut récrire (14) sous la forme  $\langle A^{\wedge}(y, z) e^{\langle y, z \rangle}, f^{\wedge}(z) \rangle = \langle A^{\wedge}(y, z) e^{\langle y, z \rangle}, e^{\langle u, z \rangle} \rangle = A^{\wedge}(y, u) e^{\langle y, u \rangle}$  d'après (12).

Nous en arrivons à la formule fondamentale de ce calcul, qui donne le symbole du composé  $C = AB$  de deux opérateurs - du moins, lorsque ces deux opérateurs sont composables. Voici cette belle formule

$$(15) \quad C^{\wedge}(x, y) = \langle A^{\wedge}(x, y+z), B^{\wedge}(x+z, y) \rangle$$

( vérification formelle : prenons un vecteur k, posons  $Bk = f$ ,  $Af = g$  .

Définissons C par (15) et posons  $Cf = h$  . Nous avons d'après (14)

$$h^{\wedge}(x) = \langle C^{\wedge}(x, r), k^{\wedge}(x+r) \rangle_r = \langle \langle A^{\wedge}(x, r+s), B^{\wedge}(x+s, r) \rangle_s, k^{\wedge}(x+r) \rangle_r$$

$$g^{\wedge}(x) = \langle A^{\wedge}(x, t), f^{\wedge}(x+t) \rangle_t = \langle A^{\wedge}(x, t), \langle B^{\wedge}(x+t, u), k^{\wedge}(x+t+u) \rangle_u \rangle_t$$

Prenons maintenant  $k^{\wedge}(z) = e^{\langle a, z \rangle}$  . Dans la première ligne  $k^{\wedge}(x+r) = e^{\langle a, x \rangle} e^{\langle a, r \rangle}$  . Le premier facteur sort et le second nous donne par (12)

$$(16) \quad e^{\langle a, x \rangle} \langle A^{\wedge}(x, a+s), B^{\wedge}(x+s, a) \rangle_s$$

Dans la seconde ligne,  $k^{\wedge}(x+t+u) = e^{\langle a, x+t+u \rangle}$ , donc

$$\langle B^{\wedge}(x+t, u), k^{\wedge}(x+t+u) \rangle_u = e^{\langle a, x+t \rangle} B^{\wedge}(x+t, a)$$

A nouveau  $a^{\langle a, x \rangle}$  sort, et nous appliquons (13) pour faire disparaître  $e^{\langle a, t \rangle}$ ; nous obtenons

$$e^{\langle a, x \rangle} \langle A^{\wedge}(x, t+a), B^{\wedge}(x+t, a) \rangle_t$$

qui est bien égal à (16). Les formules (14) et (15) offrent une grande parenté avec les formules de Maassen pour l'action d'un noyau sur un vecteur et la multiplication des noyaux.

On peut donner une forme plus explicite à (14) et (15) en utilisant la formule de Taylor

$$\langle f(x+z), g(y+z) \rangle_z = \sum_k \frac{1}{k!} \langle \nabla^k f(x+.), \nabla^k g(y+.) \rangle$$

( le produit scalaire des gradients est celui des fonctions  $k$ -linéaires non nécessairement symétriques, sans factorielle en tête ). Nous ne récrivons pas les formules obtenues, qui ressemblent beaucoup à celles du calcul pseudo-différentiel classique en dimension finie ( noter cependant que l'on a ici un calcul exact, et non modulo des opérateurs réguliers ; c'est peut être pour cela qu'il est finalement peu maniable ).

#### UN PETIT DICTIONNAIRE

Nous espérons avoir donné envie au lecteur de regarder l'article de Krée d'un peu plus près. Voici une correspondance entre les notations adoptées par Krée et celles que nous avons utilisées dans le cas particulier ici présenté.

L'espace  $X'$  correspond ici à  $\mathcal{D}$  ( le fait d'appeler  $X'$  un espace qui n'est pas un dual n'arrange pas les choses ! )

L'espace noté  $(X')_n^-$  correspond ici au produit tensoriel symétrique non complété  $\mathcal{D}^k$ , et la somme des  $\mathcal{D}^k$ , c'est à dire  $\mathcal{V}$  pour nous, est notée  $(X')^-$ . Considéré comme espace de v.a.,  $\mathcal{V}$  est aussi noté  $\rho(X)$ .

L'espace noté  $H'$  correspond ici à  $L^2(\mathbb{R}_+)$ , et ses puissances tensorielles symétriques sont les  $(H')_n^-$  à une constante de normalisation portant sur la norme près.

Le Fock  $\mathfrak{F}$  est appelé  $(H')^-$ .

L'espace des v.a. généralisées  $\mathcal{V}'$  correspond à un sous-espace de l'espace des séries formelles noté  $\text{Pôl}(X')$ . Celui-ci, vu du côté des v.a., est le dual algébrique  $(\rho(X))^{\mathfrak{F}}$ .

Faute de temps, nous n'avons pas du tout traité la partie de l'article de Krée relative à l'intégration stochastique des processus généralisés ou des processus d'opérateurs.

#### REFERENCES

KREE (P.). La théorie des distributions en dimension quelconque ( ou calcul chaotique ) et l'intégration stochastique. Actes du Colloque d'Analyse Stochastique de Silivri (1986). A paraître aux Lecture Notes in Mathematics.

BEREZIN (F.A.). The mathematics of second quantization. Academic Press, New York 1966 ( original russe 1965 ).

Il y a sur les équations aux dérivées partielles en dimension infinie, le calcul pseudo-différentiel sur les espaces de Hilbert, etc. une littérature considérable, malheureusement peu accessible aux non-spécialistes. Le lecteur intéressé pourra consulter les séminaires sur les équations aux dérivées partielles en dimension infinie, Institut Henri-Poincaré, 1975/76 et 1976/77 , ainsi que des articles de B. LASCAR (J. Funct. An. 35, 1980 ; Comm. PDE 1, 1976 et 2, 1977 ) et KREE-RACZKA (Ann. IHP sér. B, 28, 1978 ).

Voici enfin deux références aux travaux de S. USTUNEL sur les distributions du type de Watanabe, leurs gradients, divergences, etc.

- Representations of the distributions on Wiener space and stochastic calculus of variations. JFA 70, 1987, p. 126-139
- Construction du calcul stochastique sur un espace de Wiener abstrait CRAS Paris, 305, 1987, 279-282.