RÉMI LÉANDRE

Calcul des variations sur un brownien subordonné

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 414-433
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__414_0>

CALCUL DES VARIATIONS SUR UN BROWNIEN SUBORDONNE

Rémi Léandre
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
25030 Besançon Cedex

INTRODUCTION

C'est à J.M. Bismut que revient l'idée de généraliser le calcul de Malliavin aux processus de sauts. Il l'applique dans [B.1] à l'équation différentielle

$$dx_t = X_o(x_t)dt + dz_t, \tag{0.1}$$

X_o étant un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ et z_t un processus de sauts à accroissements indépendants. Sa méthode est basée sur une utilisation adéquate de l'exponentielle de Girsanov.

K. Bichteler, J.B. Gravereaux et J. Jacod ([B.G.J] donnent une version différente du calcul de Malliavin et l'appliquent à l'équation différentielle

$$x_t(x) = x + \sum_{s \leq t}^{c} \gamma(x_{s^-}, \Delta z_s), \tag{0.2}$$

γ étant une application "suffisamment" régulière de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^d$, z_s un processus à accroissements indépendants et $\overset{c}{\Sigma}$ l'opérateur de somme compensée ([J]).

Toutefois, on se heurte à un inconvénient majeur. Notons μ la mesure de Lévy de z_t. Pour que la solution de (0.2) ait une densité C^∞, il faut supposer que :

$$\operatorname*{Inf}_{x \in \mathbb{R}^d \;;\; z \in \operatorname{Supp} \mu} \left| I + \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x,z) \right| > C > 0. \tag{0.3}$$

Bismut pense contourner ce problème en remarquant qu'il y a plusieurs façons de construire un processus de sauts. Ainsi le processus de Cauchy n'est pas seulement un processus de mesure de Lévy $\frac{dr}{r^2}$ mais un mouvement brownien subordonné à un processus croissant. C'est la raison pour laquelle il introduit les processus de bord ([B.2]).

Rappelons comment il les construit. Considérons des champs de vecteurs

$X_o,\dots,X_m,X'_o,\dots,X'_m$ sur $\mathbb{R}^d$, C^∞, de dérivées de tous ordres bornées. Soit $(w_1,\dots,w_m,z)$ un mouvement brownien $m+1$-dimensionnel. Le temps local L_t de z_t possède un processus inverse à droite noté A_t. Introduisons le processus <u>continu</u> x_t (solution de l'équation de Stratonovitch) :

$$dx_t = 1_{z_t<0}\,(X_o(x_t)dt + \Sigma X_i(x_t)dw_i) + 1_{z_t>0}\,(X'_o(x_t)dt + \Sigma X'_i(x_t)dw_i). \tag{0.4}$$

Bien entendu, il s'agit d'un cas particulier de processus de bord ([B.2], [L]).

La remarque essentielle est alors la suivante : alors que le processus x_t est continu, le processus x_{A_t} est un processus de sauts purs.

Il y a un double intérêt à considérer ce modèle de processus de sauts : d'une part , on n'a pas à introduire de gênantes conditions du type (0.3) pour montrer qu'il possède une densité C^∞. D'autre part, le calcul des variations sur x_{A_t} résulte en grande partie du calcul des variations classiques sur le brownien, du moins si l'on fixe une trajectoire de A_t (cf. [B.M] pour un problème du même genre).

Le calcul des variations sur le processus de Poisson résulterait donc du calcul des variations sur les diffusions, si toutes les solutions de (0.2) se représentaient comme solutions de (0.4). Malheureusement, ceci est faux, et l'on ne sait pas quels sont exactement les semi-groupes de Markov représentés par (0.4).

Aussi, nous modifions dans cet article l'équation (0.4) afin de réobtenir par le biais du mouvement brownien une grande partie des solutions de (0.2).

Et donc nous espérons montrer qu'en grande partie le calcul des variations sur les processus de sauts résulte du calcul des variations sur le mouvement brownien.

Nous remercions J.M. Jacod pour l'aide qu'il a bien voulu nous accorder.

I. GENERALITES

w_t est le mouvement brownien p-dimensionnel sur l'espace canonique $\mathbb{C}[\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^p]$, noté Ω, muni de la probabilité P_Ω. ω est l'élément générique de Ω.

$\tilde{w}_t$ est un autre mouvement brownien, $\tilde{p}$-dimensionnel sur $C[\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{\tilde{p}}] = \tilde{\Omega}$, d'élément générique $\tilde{\omega}$, muni de la probabilité $P_{\tilde{\Omega}}$.

A_t est un processus de sauts, à accroissements indépendants, purement discontinu, défini sur l'espace canonique $\Omega_1 = \mathbb{D}[\mathbb{R}^+,\mathbb{R}]$, d'élément générique $A_.$, muni de la probabilité P_A. On suppose de plus que A_t est <u>strictement croissant</u>, et que sa mesure de Lévy, $d\mu$, vérifie :

$$\int_o^\infty d\mu(u) = \infty \qquad \int_o^1 u^p\, d\mu(u) < \infty \qquad \text{pour tout } p>1. \tag{1.1}$$

Soit :

(1.2) $$L_t = \inf\{s\ ;\ A_s > t\} \qquad \bar{L}_t = A_{(L_t)-}$$

P est la probabilité $P_\Omega \times P_{\tilde{\Omega}} \times P_A$ sur $\Omega \times \tilde{\Omega} \times \Omega_1$.

Soit une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \tilde{\mathbb{R}}^p$ dans $\mathbb{R}$: $(x,z,\tilde{z}) \to \gamma(x,z,\tilde{z})$.

On suppose que γ est C^∞ en toutes ses variables, que toutes ses dérivées sont bornées, que :

(1.3) $$\gamma(x,0,0) = 0$$

et qu'il existe un réel $K_1 > 0$ tel que :

(1.4) $$\frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{z}}(x,z,\tilde{z}) = 0 \qquad \text{si } |\tilde{z}| \leq K_1.$$

D est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}$ dont toutes les dérivées sont bornées.

Considérons l'équation de Stratonovitch :

(1.5) $$\begin{aligned} dx_t &= \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x_{\bar{L}_t}, w_t - w_{\bar{L}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\bar{L}_t}) \circ dw_t + \\ &+ \frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{z}}(x_{\bar{L}_t}, w_t - w_{\bar{L}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\bar{L}_t}) \circ d\tilde{w}_t + D(x_{\bar{L}_t})dL_t \end{aligned}$$

c'est-à-dire l'équation d'Ito :

(1.6) $$\begin{aligned} dx_t &= \frac{\partial \gamma}{\partial z}(x_{\bar{L}_t}, w_t - w_{\bar{L}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\bar{L}_t})dw_t + \\ &+ \frac{\partial \gamma}{\partial \tilde{z}}(x_{\bar{L}_t}, w_t - w_{\bar{L}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\bar{L}_t})d\tilde{w}_t + D(x_{\bar{L}_t})dL_t + \\ &+ \frac{1}{2}\Delta_z\, \gamma(x_{\bar{L}_t}, w_t - w_{\bar{L}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\bar{L}_t})dt + \\ &+ \frac{1}{2}\Delta_{\tilde{z}}\, \gamma(x_{\bar{L}_t}, w_t - w_{\bar{L}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\bar{L}_t})dt, \end{aligned}$$

Δ_z désignant le laplacien par rapport à z et $\Delta_{\tilde{z}}$ celui par rapport à $\tilde{z}$.

x_t est le processus continu sous-jacent au processus de sauts x_{A_t}. Par la suite, c'est le processus de sauts x_{A_t} qui nous intéressera. Aussi, il est important de déterminer les sauts de x_{A_t}. Pour cela, on remarque que la formule d'Ito implique que :

(1.7) $$\Delta x_{A_t} = \gamma(x_{A_{t-}}, w_{A_t} - w_{A_{t-}}, \tilde{w}_{A_t} - \tilde{w}_{A_{t-}}).$$

(1.7) montre que le processus x_{A_t} semble être une solution d'une équation du type (0.2), le rôle du processus directeur étant joué par $(w_{A_t}, \tilde{w}_{A_t})$ que l'on notera $(z_t, \tilde{z}_t)$.

$(z_t, \tilde{z}_t)$ est en effet un processus à accroissements indépendants par rapport à la filtration F_{A_t} déduite de la filtration canonique sur $\Omega \times \tilde{\Omega} \times \Omega_1$ par changement de temps.

La mesure de Lévy de $(z_t, \tilde{z}_t)$, ν, vérifie :

$$(1.8) \qquad \int f(u,v)\,d\nu(u,v) = \int_0^\infty d\mu(s)\; E[f(w_s, \tilde{w}_s)].$$

Un premier inconvénient apparaît alors ; on ne sait pas quelles mesures de Lévy on obtient ainsi. Un deuxième semble aussi intervenir : x_{A_t} n'est pas exactement une solution d'une équation du type (0.2) à cause des diverses compensations qui interviennent. Mais en fait il disparaît à cause de la proposition suivante :

<u>Proposition I.2</u> : <u>Considérons la solution</u> x_t <u>de</u> (1.5). x_{A_t} <u>est aussi la solution de l'équation</u> :

$$(1.9) \qquad y_t = x_0 + \sum_{s \leq t}^{c} \gamma(y_{s-}, \Delta z_s, \Delta \tilde{z}_s) + \int_0^t \tilde{D}(y_s)\,ds$$

<u>avec</u>

$$(1.10) \qquad \begin{aligned} \tilde{D}(x) = D(x) &+ \int_0^\infty d\mu(s)\; E[\tfrac{1}{2} \int_0^s \Delta_z\, \gamma(x, w_u, \tilde{w}_u)\,du] + \\ &+ \int_0^\infty d\mu(s)\; E[\tfrac{1}{2} \int_0^s \Delta_{\tilde{z}}\, \gamma(x, w_u, \tilde{w}_u)\,du]. \end{aligned}$$

<u>Preuve</u> : Introduisons le processus A_t^ε défini par :

$$(1.11) \qquad A_t^\varepsilon = \sum_{s \leq t} 1_{]\varepsilon,\infty[}(\Delta A_s)\Delta A_s.$$

Considérons les processus associés z_s^ε et $\tilde{z}_s^\varepsilon$, et l'équation (1.9) analogue à l'équation (1.9), $\tilde{D}$ étant transformé en $\tilde{D}_\varepsilon$:

$$(1.12) \qquad \begin{aligned} \tilde{D}_\varepsilon(x) = D(x) &+ \int_\varepsilon^\infty d\mu(s)\; E[\tfrac{1}{2} \int_0^s \Delta_z\, \gamma(x, w_u, \tilde{w}_u)\,du] + \\ &+ \int_\varepsilon^\infty d\mu(s)\; E[\tfrac{1}{2} \int_0^s \Delta_{\tilde{z}}\, \gamma(x, w_u, \tilde{w}_u)\,du]. \end{aligned}$$

Posons :

$$(1.13) \qquad L_t^\varepsilon = \inf\{s\ ;\ A_s^\varepsilon > t\}\ ;\ \bar{L}_t^\varepsilon = A^\varepsilon_{(L_t^\varepsilon)-}.$$

L'analogue de (1.5) est alors :

$$(1.5)^{\varepsilon} \qquad \begin{aligned} dx_t^{\varepsilon} &= \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x^{\varepsilon}_{\overline{L}^{\varepsilon}_t}, w_t - w_{\overline{L}^{\varepsilon}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\overline{L}^{\varepsilon}_t}) \circ dw_t + \\ &+ \frac{\partial\gamma}{\partial \tilde{z}}(x^{\varepsilon}_{\overline{L}^{\varepsilon}_t}, w_t - w_{\overline{L}^{\varepsilon}_t}, \tilde{w}_t - \tilde{w}_{\overline{L}^{\varepsilon}_t}) \circ d\tilde{w}_t + D(x^{\varepsilon}_{\overline{L}^{\varepsilon}_t})\, dL_t^{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Remarquons que si $p>1$,

$$(1.14) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} E[\sup_{s \leq t} (|x_s^{\varepsilon} - x_s|^p + |y_s^{\varepsilon} - y_s|^p)] \to 0.$$

Il suffit donc de montrer que $x^{\varepsilon}_{A_t^{\varepsilon}}$ et y_t^{ε} coïncident, et de faire tendre ε vers 0, pour montrer la proposition.

De plus, <u>la masse de la mesure de Lévy de A_t^{ε} étant finie</u>, A_t^{ε} ne possède qu'un nombre fini de sauts. On peut donc résoudre l'équation $(1.5)^{\varepsilon}$ trajectoire par trajectoire pour le processus de A_t^{ε}, w_t, $\tilde{w}_t$.

En vertu du caractère intrinsèque de la différentielle de Stratonovitch et A_s^{ε} n'ayant qu'un nombre fini de sauts, on a

$$(1.15) \qquad \begin{aligned} &\int_0^{A_t^{\varepsilon}} \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x^{\varepsilon}_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, w_s - w_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, \tilde{w}_s - \tilde{w}_{L^{\varepsilon}_s}) \circ dw_s + \\ &+ \int_0^{A_t^{\varepsilon}} \frac{\partial\gamma}{\partial \tilde{z}}(x^{\varepsilon}_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, w_s - w_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, \tilde{w}_s - \tilde{w}_{L^{\varepsilon}_s}) \circ d\tilde{w}_s = \\ &= \sum_{s \leq t} \gamma(x^{\varepsilon}_{A^{\varepsilon}_{s-}}, \Delta z_s^{\varepsilon}, \Delta \tilde{z}_s^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

De plus le processus :

$$\begin{aligned} &\int_0^{A_t^{\varepsilon}} \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x^{\varepsilon}_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, w_s - w_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, \tilde{w}_s - \tilde{w}_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}) dw_s + \\ &+ \int_0^{A_t^{\varepsilon}} \frac{\partial\gamma}{\partial \tilde{z}}(x^{\varepsilon}_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, w_s - w_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}, \tilde{w}_s - \tilde{w}_{\overline{L}^{\varepsilon}_s}) d\tilde{w}_s \end{aligned}$$

est une martingale locale dans l'échelle des temps définie par A_s^{ε}.

Posons :

$$(1.16)\quad \begin{aligned} Y_t^\varepsilon = \sum_{s\leq t} \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, \Delta z^\varepsilon_s, \Delta\tilde{z}^\varepsilon_s) - \sum_{s\leq t} \int_{A^\varepsilon_{s-}}^{A^\varepsilon_s} \{\tfrac{1}{2}\Delta_z\, \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, w_s - w_{A^\varepsilon_{s-}}, \tilde{w}_s - \tilde{w}_{A^\varepsilon_{s-}}) + \\ + \tfrac{1}{2}\Delta_{\tilde{z}}\, \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, w_s - w_{A^\varepsilon_s}, \tilde{w}_{A_s} - \tilde{w}_{A^\varepsilon_{s-}})\}\, ds. \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, Y_t^ε est une martingale locale par rapport à la filtration changée de temps.

Par suite le processus Z_t^ε défini par :

$$(1.17)\quad Z_t^\varepsilon = \sum_{s\leq t} \int_{A^\varepsilon_{s-}}^{A^\varepsilon_s} \Delta_z\, \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, w_u - w_{A^\varepsilon_{s-}}, \tilde{w}_u - \tilde{w}_{A^\varepsilon_{s-}})du - \sum_{s\leq t} \int_o^{\Delta A^\varepsilon_s} E[\Delta_z \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, w_u, \tilde{w}_u)]du$$

est une martingale locale lorsqu'on fixe une trajectoire de A_t. A_t, w_t et $\tilde{w}_t$ étant indépendants, c'est encore une martingale locale par rapport à la filtration F_{A_t}.

Posons :

$$(1.18)\quad Z_t'^\varepsilon = \sum_{s\leq t} \int_o^{\Delta A^\varepsilon_s} E[\Delta_z \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, w_u, \tilde{w}_u)]du - \int_o^t ds \int_\varepsilon^\infty d\mu(u)\, E[\Delta_z \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, w_u, \tilde{w}_u)]du.$$

Par définition de la mesure de Lévy de A_t, c'est une martingale locale.

On effectue le même raisonnement pour $\tilde{\gamma}$.

On obtient que le processus $Y_t^\varepsilon + \frac{1}{2}(Z_t^\varepsilon + \tilde{Z}_t^\varepsilon + Z_t'^\varepsilon + \tilde{Z}_t'^\varepsilon)$ est une martingale locale. On a donc finalement :

$$(1.19)\quad x^\varepsilon_{A^\varepsilon_t} = x_o + \sum_{s\leq t}^{c} \gamma(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}}, \Delta z^\varepsilon_s, \Delta\tilde{z}^\varepsilon_s) + \int_o^t \tilde{D}_\varepsilon(x^\varepsilon_{A^\varepsilon_{s-}})ds.$$

II. CALCUL DES VARIATIONS SUR LE MOUVEMENT BROWNIEN PRINCIPAL

Rappelons d'abord les définitions suivantes ([B.G.J], [I.W]).

Soit L l'opérateur de Malliavin sur $L^2(\Omega)$.

Soit H^p l'espace des fonctionnelles de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(2.1)\quad \|\phi\|_{L^p} + \|L\phi\|_{L^p} < \infty$$

et soit $H^\infty = \bigcap_{p>2} H^p$.

Γ est l'opérateur carré du champ défini par :

$$(2.2)\quad \Gamma[\phi,\phi] = L(\phi^2) - 2\phi L(\phi).$$

Rappelons que :

$$|\Gamma[\phi,\phi']| \leq |\Gamma[\phi,\phi]|^{\frac{1}{2}} \, |\Gamma[\phi',\phi']|^{\frac{1}{2}}. \tag{2.3}$$

Introduisons une fonctionnelle d dimensionnelle $\phi = (\phi_i)$, et une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$. On a la relation classique suivante :

$$\begin{aligned} L(f\circ\phi) &= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi)L\phi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(\phi)\,\Gamma(\phi_i,\phi_j) = \\ &= \langle Df, L\phi\rangle + \frac{1}{2}\langle\{D^2f,\Gamma(\phi)\}\rangle. \end{aligned} \tag{2.4}$$

D'où la relation classique

$$\begin{aligned} \Gamma[f\circ\phi] &= \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi)\,\Gamma[\phi_i,\phi_j]\,\frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi) = \\ &= \langle D(f\circ\phi),\Gamma,D(f\circ\phi)\rangle. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Rappelons enfin comment l'on calcule $\Gamma\phi$ et $L\phi$ si ϕ est une fonctionnelle "simple" de la forme $\phi = f(w_{t_1}, w_{t_2}-w_{t_1},\ldots,w_{t_n}-w_{t_{n-1}})$, pour une certaine fonction f C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et une subdivision $t_1<t_2<\ldots<t_n$. On a :

$$\Gamma[\phi,\phi] = \sum_{1\leq j\leq n}(t_j-t_{j-1})\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(w_{t_1},\ldots,w_{t_j}-w_{t_{j-1}},\ldots,w_{t_n}-w_{t_{n-1}})\right|^2 \tag{2.6}$$

et

$$\begin{aligned} L(\phi) &= \sum_{1\leq j\leq n}\left\langle w_{t_j}-w_{t_{j-1}},\frac{\partial f}{\partial x_j}(w_{t_1},\ldots,w_{t_j}-w_{t_{j-1}},\ldots,w_{t_n}-w_{t_{n-1}})\right\rangle - \\ &- \sum_{1\leq j\leq n}(t_j-t_{j-1}).\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(w_{t_1},\ldots,w_{t_j}-w_{t_{j-1}},\ldots,w_{t_n}-w_{t_{n-1}}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

La partie technique de cet article va consister à montrer que les solutions de (1.5) sont dans H^∞. Les calculs seront très semblables à ceux de [B.G.J] ou en partie à ceux de [St]. Aussi nous ne les justifierons pas en détail. La seule différence réelle est que nous fixerons une trajectoire de A_t, et ensuite intégrerons en A_t les formules d'intégration par parties, de façon très semblable à ce qui a été fait dans [B.M].

Considérons $\ell+1$ fonctions C^∞ de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ noté $\gamma^j(y,z)$.

Soit $D(y)$ un champ de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{R}^d$.

Considérons l'équation différentielle stochastique suivante :

$$y_t = y_o + \sum_{s\leq t}^{c}\gamma^o(y_{s-},\Delta z_s) + \int_o^t D(y_s)ds + \sum_{j=1}^{\ell}\gamma^j(y_{s-},\Delta z_s)(\Delta A_s)^j. \tag{2.8}$$

Supposons qu'il existe une décomposition de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_q}$ avec $d_1 + d_2 + \ldots + d_q = d$ qui possède la propriété * suivante, étant entendu que l'on a décidé de ranger les coordonnées y_i d'un point de $\mathbb{R}^d$ par ordre croissant dans les sous-espaces $\mathbb{R}^{d_i}$.

* La $i^{\text{ème}}$ coordonnée $D_i(y)$ de $D(y)$ et la $i^{\text{ème}}$ coordonnée $\gamma_i^j(y,z)$ de $\gamma^j(y,z)$ ne dépendent que des coordonnées précédentes dans la décomposition de $\mathbb{R}^d$ en $\mathbb{R}^{d_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{d_q}$. Cela signifie que si l'on pose

$$M_\ell = d_1 + \ldots + d_\ell . \tag{2.9}$$

$D_i(y)$ et $\gamma_i^j(y,z)$ ne dépendent que de y_k pour $k \leq M_r$ si $M_{r-1} < i \leq M_r$. *

Si le système de fonctions D et γ^j vérifient (*), on dit que (2.8) est graduée ([B.G.J], [St]).

Définissons maintenant les paramètres de contrôle d'une équation graduée.

<u>Définition II.1</u> : <u>On dit que</u> $(C(r),\theta(r))$ $(r \in \mathbb{N})$ <u>contrôlent l'équation graduée</u> (2.8) <u>si</u>

i) <u>Pour tout</u> r, <u>tout</u> $n \in \mathbb{N}$, $n \leq r$

$$\sup_{n \leq r} \left\{ \left| \frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}} D(y) \right| , \sup_{z \in \mathbb{R}^p} \left| \frac{\partial^{(n)}}{\partial y^{(n)}} \gamma^j(y,z) \right| ; j = 0,\ldots,\ell \right\} \leq C(r)\,(1 + |y|^{\theta(r)}). \tag{2.10}$$

ii) <u>Si</u> $n' \geq 1$ <u>et</u> $1 \leq n+m \leq r$

$$\sup_{z} \left\{ \left| \frac{\partial^{(n+m)}}{\partial y^{(n)}\, \partial z^{(m)}} \gamma^j(y,z) \right| ; j = 0,\ldots,\ell \right\} \leq C(r)\,(1 + |y|^{\theta(r)}). \tag{2.11}$$

iii) <u>Pour tout</u> n+1-<u>uple</u> $(i,i_1,\ldots,i_n)$ <u>tel que</u> $M_{r-1} < i,i_1,\ldots,i_n \leq M_r$, <u>on a</u> :

$$\sup_{z,y} \left| \frac{\partial^{(n)}}{\partial y_{i_1},\ldots,\partial y_{i_n}} \gamma_i^j(y,z) \right| \leq C(r) \tag{2.12}$$

$$\sup_{z,y} \left| \frac{\partial^{(n)}}{\partial y_{i_1},\ldots,\partial y_{i_n}} D_i(y,z) \right| \leq C(r). \tag{2.13}$$

Nous avons la proposition suivante qui est l'analogue de [St] et de [B.G.J].

<u>Proposition II.3</u> : <u>Supposons que</u> y_s <u>est la solution de l'équation différentielle</u> (2.8) <u>graduée et contrôlée par</u> C(r) <u>et</u> $\theta(r)$.

Alors $L(y_s)$ et $\Gamma[y_s,y_s]$ existent presque sûrement.

De plus, le triplet $(y_s, \Gamma[y_s,y_s],L(y_s))$ est solution d'une équation différentielle graduée sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ dont les paramètres de contrôle ne dépendent que des paramètres de contrôle de l'équation initiale.

Preuve : Elle est semblable à celle du théorème 8.1 de [B.G.J]. Aussi, nous n'en détaillerons pas les calculs.

Première étape : Approximation de Peano

Soit un réel $\varepsilon > 0$.

Introduisons le processus A_t^ε égal à $\sum_{s \leq t} 1_{[\varepsilon,\infty[}(\Delta A_s)$. Considérons le processus de sauts $w_{A_t^\varepsilon}$ associé à A_t^ε : notons-le z_t^ε. Comme A_t^ε possède une mesure de Lévy de masse finie, il ne saute qu'un nombre fini de fois sur $[0,t]$.

On associe naturellement à z_t^ε la solution y_t^ε de l'équation (2.8.ε)

$$(2.8.\varepsilon) \quad y_t^\varepsilon = y_o + \sum_{s\leq t}^{c} \gamma^o(y_{s-}^\varepsilon,\Delta z_s^\varepsilon) + \int_o^t D(y_s^\varepsilon)ds + \sum_{j=1}^{\ell} \gamma^j(y_{s-}^\varepsilon,\Delta z_s^\varepsilon)\,(\Delta A_s^\varepsilon)^j .$$

Notons ν^ε la mesure de Lévy de z_s^ε. On a :

$$(2.14) \qquad \int |z|^2 d\nu^\varepsilon(z) = \int_\varepsilon^\infty d\mu(s)\ E[|w_s|^2] < \infty .$$

Par suite $\int |z|^2\, d|(\nu-\nu^\varepsilon)(z)|$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

Comme $\int_o^\infty s^p\, d\mu(s) < \infty$ si $p > 1$, il résulte des calculs de [B.G.J] Ch.4 que pour $p > 1$:

$$(2.15) \qquad \lim_{\varepsilon\to 0} E[\sup_{s\leq t} |y_s^\varepsilon - y_s|^p] = 0.$$

Deuxième étape : Calcul des variations sur l'approximation de Peano, une trajectoire du processus subordinateur A_t^ε étant fixée

On remarque que le processus A_t^ε ne possède qu'un nombre fini de sauts. Aussi, lorsqu'on fixe une trajectoire de A_t^ε, le processus y_t^ε ne dépend que d'un nombre fini de sauts $w_{A_t^\varepsilon} - w_{A_{t-}^\varepsilon}$. On peut donc appliquer le calcul des variations sur y_t^ε en utilisant (2.6) et (2.7).

Notons s_k^ε la suite croissante des instants s où $\Delta A_s^\varepsilon \neq 0$.

On obtient la formule suivante si $t \in [s_{k-1}^\varepsilon, s_k^\varepsilon]$

$$\Gamma[y_t^\varepsilon,y_t^\varepsilon] = \Gamma[y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}}] + \Gamma[y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}}] \sum_{0\leq j\leq \ell} (\Delta A^\varepsilon_{s^\varepsilon_k})^j \frac{\partial\gamma^j}{\partial y}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}})+$$

$$+ \sum_{0\leq j\leq \ell} (\Delta A^\varepsilon_{s^\varepsilon_k})^j \frac{\partial\gamma^j}{\partial y} (y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}})\, \Gamma[y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}}]+$$

$$+ \sum_{0\leq j'\leq j\leq \ell} (\Delta A^\varepsilon_{s^\varepsilon_k})^{j+j'} [<\frac{\partial\gamma^{j'}}{\partial y}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z_{s^\varepsilon_k}),\Gamma[y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}}],\frac{\partial\gamma^j}{\partial j}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z_{s^\varepsilon_k})>+$$

$$(2.16)\quad + \Delta A^\varepsilon_{s_k} <\frac{\partial\gamma^j}{\partial z}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z^k_{s^\varepsilon_k})\ \frac{\partial\gamma^{j'}}{\partial z}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z^k_{s^\varepsilon_k})>]+$$

$$+ \int_{s^\varepsilon_{k-1}}^t \Gamma[y_s^\varepsilon,y_s^\varepsilon]\ [\frac{\partial D}{\partial y}(y_s^\varepsilon) - \int \frac{\partial\gamma^o}{\partial y}(y_s^\varepsilon,z)d\nu^\varepsilon(z)]\,ds +$$

$$+ \int_{s^\varepsilon_{k-1}}^t [\frac{\partial D}{\partial y}(y_s^\varepsilon) - \int \frac{\partial\gamma^o}{\partial y}(y_s^\varepsilon,z)d\nu^\varepsilon(z)]\ \Gamma[y_s^\varepsilon,y_s^\varepsilon]\,ds + 2 \sum_{0\leq j\leq \ell} (\Delta A_{s^\varepsilon_k})^j$$

$$<\int_{s^\varepsilon_{k-1}}^t \{\frac{\partial D}{\partial y}(y_s^\varepsilon) - \int \frac{\partial\gamma^o}{\partial y}(y_s^\varepsilon,z)d\nu^\varepsilon(z)\},\Gamma[y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},y_s^\varepsilon],\frac{\partial\gamma^j}{\partial y}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z^\varepsilon_{s^\varepsilon_k})>.$$

On obtient une formule analogue pour $L(y_t^\varepsilon)$ si $t\in[s^\varepsilon_{k-1},s^\varepsilon_k]$:

$$L(y_t^\varepsilon) = L(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}}) + \int_{s^\varepsilon_{k-1}}^t <\frac{\partial D}{\partial y}(y_s^\varepsilon),L(y_s^\varepsilon)>ds +$$

$$+ \sum_{0\leq j\leq \ell} (\Delta A_{s^\varepsilon_{k-1}})^j <\frac{\partial\gamma^j}{\partial y}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z_{s^\varepsilon_{k-1}}),L(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}})> +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{s^\varepsilon_{k-1}}^t <\{\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(y_s^\varepsilon),\Gamma[y_s^\varepsilon,y_s^\varepsilon]\}>ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0\leq j\leq \ell} <\{\frac{\partial^2\gamma^j}{\partial y^2}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z_k^\varepsilon),\Gamma(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}})\}> +$$

(2.17)

$$+ \frac{1}{2} \sum_{0\leq j\leq \ell} (\Delta A_{s^\varepsilon_k})^{j+1} <\{\frac{\partial^2\gamma^j}{\partial z^2}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z_k^\varepsilon),Id\}> +$$

$$+ \sum_{0\leq j\leq \ell} (\Delta A_{s^\varepsilon_k})^j <\frac{\partial\gamma^j}{\partial z}(y^\varepsilon_{s^\varepsilon_{k-1}},\Delta z_k^\varepsilon),\Delta z_k^\varepsilon),\Delta z_k^\varepsilon> -$$

$$- \int_{D^{\varepsilon}_{k-1}}^{t} \int < \frac{\partial \gamma^{o}}{\partial y} (y^{\varepsilon}_{s},z) d\nu^{\varepsilon}(z), L(y^{\varepsilon}_{s})> ds -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{0 \leq j \leq \ell} \int_{s^{\varepsilon}_{k-1}}^{t} <\int \{\frac{\partial^2 \gamma^{o}}{\partial y^2} (y^{\varepsilon}_{s},z) d\nu^{\varepsilon}(z), \Gamma[y^{\varepsilon}_{s},y^{\varepsilon}_{s}]\} > ds,$$

ces deux derniers termes intervenant à cause des compensations.

<u>Troisième étape</u> : <u>Passage à la limite dans l'approximation de Peano</u>

Introduisons les solutions (y_s,U_s,V_s) de l'équation différentielle graduée sur $\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d$ suivante (pour voir qu'elle est bien graduée, on peut consulter [B.G.J] Chapitre 8)

$$(2.18) \quad y_t = y_o + \sum_{s \leq t}^{c} \gamma^{o}(y_{s-},\Delta z_s) + \int_o^t D(y_s) ds + \sum_{1 \leq j \leq \ell\,;\, s \leq t} (\Delta A_s)^j \gamma^j(y_{s-},\Delta z_s)$$

$$U_t = \sum_{0 \leq j,j' \leq \ell} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^{j+j'+1} < \frac{\partial \gamma^j}{\partial z} (y_{s-},\Delta z_s), \frac{\partial \gamma^{j'}}{\partial z} (y_{s-},\Delta z_s)> +$$

$$+ \sum_{1 \leq j \leq \ell} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^j (<U_{s-}, \frac{\partial \gamma^j}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s)> + <\frac{\partial \gamma^j}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s), U_{s-}>) +$$

$$(2.18)' \quad + \sum_{s \leq t}^{c} (<U_{s-}, \frac{\partial \gamma^{o}}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s)> + <\frac{\partial \gamma^{o}}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s), U_{s-}>) +$$

$$+ \int_o^t (<U_s, \frac{\partial D}{\partial y}(y_s)> + <\frac{\partial D}{\partial y}(y_s), U_s>) ds +$$

$$+ \sum_{0 \leq j' \leq j \leq \ell} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^{j+j'} <\frac{\partial \gamma^j}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s), U_{s-}, \frac{\partial \gamma^{j'}}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s)>$$

$$V_t = \int_o^t <\frac{\partial D}{\partial y}(y_s), V_s) ds + \sum_{1 \leq j \leq \ell} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^j <\frac{\partial \gamma^j}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s), V_{s-}> +$$

$$+ \sum_{s \leq t} <\frac{\partial \gamma^{o}}{\partial y} (y_{s-},\Delta z_s), V_{s-}> + \frac{1}{2} \int_o^t <\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(y_s), U_s> ds +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j \leq \ell} \sum_{s \leq t} (\Delta A_s)^j <\{\frac{\partial^2 \gamma^j}{\partial y^2} (y_{s-},\Delta z_s), U_{s-}\}> +$$

$$(2.18)'' \quad + \frac{1}{2} \sum_{s \leq t}^{c} <\{\frac{\partial^2 \gamma^{o}}{\partial y^2} (y_{s-},\Delta z_s), U_{s-}\}> +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{s\leq t}\ \sum_{0\leq j\leq \ell}(\Delta A_s)^{j+1}<\{\frac{\partial^2\gamma^j}{\partial z^2}(y_{s-},\Delta z_s),Id\}>+$$

$$+\sum_{0\leq j\leq \ell}(\Delta A_s)^j<\frac{\partial\gamma^j}{\partial z}(y_{s-},\Delta z_s),\Delta z_s>.$$

On vérifie que pour tout $p>1$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} E[\sup_{s\leq t}|(y_s^\varepsilon,\Gamma[y_s^\varepsilon,y_s^\varepsilon],L(y_s^\varepsilon))-(y_s,U_s,V_s)|^p]=0 \tag{2.19}$$

et que les paramètres de contrôle de (2.18) ne dépendent que de ceux de l'équation initiale donnant y_s.

<u>Remarque</u> : On a démontré incidemment que pour la solution y_t d'une équation graduée, $E[\sup_{s\leq t}|y_s-y_o|^p]$ est finie et ne dépend que des paramètres de contrôle de l'équation. La raison essentielle en est que $E[A_t^p]<\infty$ à cause de (1.1).

Revenons maintenant à notre équation unidimensionnelle initiale :

$$y_t=y_o+\sum_{s\leq t}^{c}\gamma(y_{s-},\Delta z_s)+\int_o^t D(y_s)ds. \tag{2.20}$$

On montre comme dans [L.1] qu'elle possède un flot stochastique dès que γ possède la propriété suivante

$$\inf_{y\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}^p}|1+\frac{\partial\gamma}{\partial x}(y,z)|\geq c>0. \tag{2.21}$$

Si (2.21) est réalisée, on peut de plus calculer $\Gamma[y_t,y_t]$ par la proposition suivante :

<u>Proposition II.4</u> : <u>Si</u> (2.21) <u>est réalisée</u>, <u>on a</u> :

$$\Gamma[y_t,y_t]=\sum_{s\leq t}\Delta A_s\left(\frac{\partial y_t}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial y_s}{\partial y}\right)^{-2}<\frac{\partial\gamma}{\partial z}(y_{s-},\Delta z_s),\frac{\partial\gamma}{\partial z}(y_{s-},\Delta z_s)>. \tag{2.22}$$

<u>Preuve</u> : Il suffit de montrer que le terme de droite vérifie l'équation (2.18)" avec $\ell=0$ et $d=1$. Ceci résulte du fait que

$$\frac{\partial y_t}{\partial y}=1+\sum_{s\leq t}^{c}\frac{\partial\gamma}{\partial y}(y_{s-},\Delta z_s)\frac{\partial y_{s-}}{\partial y}+\int_o^t\frac{\partial D}{\partial y}(y_{s-})\frac{\partial y_s}{\partial y}ds. \tag{2.23}$$

Les calculs de [L], deuxième partie, impliquent que :

$$(2.24)\quad \begin{aligned}\left(\frac{\partial y_t}{\partial y}\right)^{-1} &= 1 - \int_0^t \frac{\partial D}{\partial y}(y_{s-})\left(\frac{\partial y_s}{\partial y}\right)^{-1} ds - \sum_{s\leq t}^{c} \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma}(y_{s-},\Delta z_s)\left(\frac{\partial y_{s-}}{\partial y}\right)^{-1} - \\ &- \sum_{s\leq t} \left(\frac{\partial y_{s-}}{\partial y}\right)^{-1} \left[\left(1+\frac{\partial \gamma}{\partial y}(y_{s-},\Delta z_s)\right)^{-1} - 1 + \frac{\partial \gamma}{\partial y}(y_{s-},\Delta z_s)\right].\end{aligned}$$

Le reste résulte alors de la formule d'Ito.

Remarque : Pour simplifier, considérons le cas où w est unidimensionnel. On pourrait effectuer un calcul des variations comme dans [B.G.J] ou dans [B.1]. Pour cela, il faudrait introduire une fonction λ convenable de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^+$, à support compact, égale à $|z|^2$ sur un voisinage de 0, et C^∞. On obtiendrait alors une autre forme quadratique de Malliavin définie par :

$$(2.25)\quad \tilde{\Gamma}[y_t,y_t] = \left(\frac{\partial y_t}{\partial y}\right)^2 \sum_{s\leq t} \lambda(\Delta z_s)\left(\frac{\partial y_s}{\partial y}\right)^{-2} . \left\langle\frac{\partial \gamma}{\partial z}(y_{s-},\Delta z_s), \frac{\partial \gamma}{\partial z}(y_{s-},\Delta z_s)\right\rangle.$$

Comme $|\Delta z_s|^2$ est "de l'ordre" de ΔA_s quand ΔA_s est très petit, $\tilde{\Gamma}(y_t,y_t)$ est "très voisine" de $\Gamma(y_t,y_t)$. Toutefois, on verra par la suite qu'il est plus intéressant de considérer $\Gamma(y_t,y_t)$. $\tilde{\Gamma}(y_t,y_t)$ résulterait aussi d'un calcul des variations sur le Brownien w_s. Voici comment il faudrait procéder. Fixons provisoirement une trajectoire de A_t. Une fonctionnelle brownienne ϕ est dite A.simple si elle s'écrit $f(w_{A_{t_1}} - w_{A_{t_{1-}}},\dots,w_{A_{t_n}} - w_{A_{t_{n-}}})$ pour une subdivision $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ de $[0,t]$ et si $\Delta A_{t_i} \neq 0$. La fonctionnelle ϕ A-simple est dite C^∞ si sa fonction représentative f est C^∞.

L'opérateur d'Ornstein-Ühlenbeck $L_{\lambda,A.}$ associé à λ et à la trajectoire de A. opère sur les fonctionnelles A.simples ϕ C^∞ de la façon suivante :

$$(2.26)\quad \begin{aligned} L_{\lambda,A.}(\phi) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda(w_{A_{t_i}} - w_{A_{t_{i-}}})}{\Delta A_{t_i}} (w_{A_{t_i}} - w_{A_{t_{i-}}}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(w_{A_{t_o}},\dots,w_{A_{t_i}} - w_{A_{t_{i-}}},\dots) - \\ &- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda}{\partial x}(w_{A_{t_i}} - w_{A_{t_{i-}}}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(w_{A_{t_o}},\dots,w_{A_{t_i}} - w_{A_{t_{i-}}},\dots) - \\ &- \sum_{i=1}^{n} \lambda(w_{A_{t_i}} - w_{A_{t_{i-}}}) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(w_{A_{t_o}},\dots,w_{A_{t_i}} - w_{A_{t_{i-}}},\dots). \end{aligned}$$

On vérifie qu'il est formellement auto-adjoint, et on développe dans ce cas particulier la méthode de [B.G.J]. Ceci permettrait d'obtenir à nouveau (2.25).

Théorème II.5 : Soit ϕ une fonctionnelle à valeurs réelles appartenant à H^∞.

Posons

(2.27) $$C_o(\phi) = \{\Gamma[\phi,\phi], L(\phi)\}.$$

Supposons que $C_o \subset H^\infty$. Définissons par récurrence

(2.28) $$C(\phi) = C_{r-1} \cup \{\Gamma[\phi,u], L(u), \quad u \in C_{r-1} \cup \{\phi\}\}$$

et supposons que $C_r \subset H^\infty$.

Notons

(2.29) $$A_r(q) = \sup_{u \in C_{r+2}} E_\Omega[|u|^q]$$

(2.30) $$B(q) = E\;[\Gamma[\phi,\phi]^{-q}].$$

Si pour $q > 1$, $B(q)$ est finie, la loi de ϕ possède une densité f C^∞. De plus il existe des constantes >0, $C(r)$, $C'(r)$, $q(r)$ et $q'(r)$ qui ne dépendent que de l'entier $r \geqq 1$ telles que :

(2.31) $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\frac{d^r}{dx^r} f(x)\right| \leq C'(r) + C(r) A_{r+2}(q(r)) B(q'(r)).$$

Remarque : On pourrait, au moyen de la proposition (I.2), montrer que :

(2.32) $$y_t - y_o - \int_o^t D(y_s)\,ds - \sum_{j=1}^{\ell} \gamma^j(y_{s-}, \Delta z_s)(\Delta A_s)^j + \\ + \int_o^t ds \int_o^\infty d\mu(u) \int_o^u E[\tfrac{1}{2} \Delta_z \gamma^o(y_{s-}, w_v)]\,dv = x_{A_t}$$

avec

(2.33) $$x_t = \int_o^t \frac{\partial\gamma}{\partial z}(y_{\overline{L}_s}, w_s - w_{\overline{L}_s})\,dw_s + \frac{1}{2}\int_o^t \Delta_z(y_{\overline{L}_s}, w_s - w_{\overline{L}_s})\,ds.$$

Il en résulterait la proposition suivante.

Proposition II.6 : Il existe un ensemble F de trajectoires de A_t de probabilité 1 tel que :

i) Si $A. \in F$, l'équation (2.32) a une solution $y_t(A.)$ dépendant mesurablement de $A.$ De plus $y_t(A.)$ est C^∞ au sens de Malliavin.

ii) De plus, si l'on définit $A_r(q,A.)$ par :

(2.29)' $$A_r(q,A.) = \sup_{u \in C_{r+2}(y_t(A.))} E_\Omega[|u|^q]$$

on a pour tout $p>0$:

(2.34) $$E_{A.}[(A_r(q,A.))^p] < C(p) < \infty.$$

III. APPLICATIONS

Dans le modèle défini par (0.2), il fallait éliminer les grands sauts du processus directeur pour obtenir une densité C^∞. Nous allons montrer que d'une certaine façon le modèle que nous considérons ici permet d'éviter cet écueil.

Nous reprenons les hypothèses de la première partie.

Théorème III.1 : Supposons que la mesure de Lévy $d\mu$ du processus croissant A_t est de la forme $g(v)dv$. Supposons de plus que

(3.1) $$\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{R}^p} \left|1+\frac{\partial\gamma}{\partial x}(x,z,0)\right| > 0.$$

Supposons que l'on peut trouver un $\varepsilon \in]0,1[$ tel que :

(3.2) $$\underline{\lim}_{u\to 0}\ u^{\varepsilon} \int_0^u d\mu(v) > 0.$$

Considérons la solution de :

(3.3) $$y_t = x + \sum_{s\leq t}^{c} \gamma(y_{s-},\Delta z_s,\Delta\tilde{z}_s) + \int_0^t D(y_s)ds.$$

Si

(3.4) $$\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R}} \left\langle\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0,0),\frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,0,0)\right\rangle > C > 0,$$

le processus y_t possède une densité C^∞.

Preuve : Fixons d'abord une trajectoire du processus subordinateur A_t.

Rappelons que K_1 a été défini en (1.4).

Introduisons une suite t_n de réels tendant vers t en croissant strictement.

Soit $\tilde{\Omega}_n(A.)$ l'ensemble des trajectoires du mouvement brownien $\tilde{\omega}$ tel que :

i) Pour tout s de $[A_{t_n},A_t]$, $|\tilde{\omega}_s - \tilde{\omega}_{A_t}| < K_1$.

ii) Il existe un temps $s\in [A_{t_{n-1}},A_{t_n}[$ tel que $|\tilde{\omega}_s - \tilde{\omega}_{A_t}| > K_1$.

i) et ii) ont bien un sens car le processus A_t croît strictement d'après (3.2).

On peut interpréter $\tilde{\Omega}_n(A.)$ à l'aide du mouvement brownien $s \to \tilde{\omega}_{A_t - s} - \tilde{\omega}_{A_t}$.
En effet si l'on note par T le temps de sortie de $]-K_1, K_1[$ de ce brownien, $\tilde{\Omega}_n(A.)$ se caractérise par le fait que $T \in]A_t - A_{t_n}, A_t - A_{t_{n-1}}]$. De plus $\tilde{\Omega}_o$ se caractérise par le fait que $T > A_t$.

On connait d'après [I.M.K] p. 25 la loi de T. Il en résulte que :

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} P_{\tilde{\Omega}}\{\tilde{\Omega}_n(A.)\} &\leq C \int_{A_t - A_{t_n}}^{A_t - A_{t_{n-1}}} \exp\left[-\frac{c}{s}\right] \frac{ds}{s^{\frac{3}{2}}} \leq \\ &\leq C \exp\left[-\frac{C}{A_t - A_{t_n}}\right] \sqrt{A_{t_n} - A_{t_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Supposons que $\tilde{\omega}$ soit dans $\tilde{\Omega}_n(A.)$. y_s est régie après le temps t_n par l'équation :

$$(3.6)\qquad y_s = y_{t_n} + \sum_{t_n \leq u \leq s}^{c} \gamma(y_{u-}, \Delta z_u, 0) + \int_{t_n}^{s} D(y_u)\,du$$

et donc $\tilde{y}_s(y_{t_n}) = y_t - y_{t_n}$ est régie par :

$$(3.7)\qquad \begin{aligned} \tilde{y}_s(y_{t_n}) = {} & \sum_{t_n \leq u \leq s}^{c} \gamma(\tilde{y}_{u-}(y_{t_n}) + y_{t_n}, \Delta z_u, 0) + \\ & + \int_{t_n}^{s} D(\tilde{y}_u(y_{t_n}) + y_{t_n})\,du. \end{aligned}$$

Rappelons que dans (3.7), A. est fixé ainsi que $\tilde{\omega}$. L'équation (3.7) dépend donc de A. et $\tilde{\omega}$. Toutefois les paramètres de contrôle de (3.7) ne dépendent que de ceux de l'équation originelle (3.3), et non de A. et de $\tilde{\omega}$.

Considérons les espaces $C_r(\tilde{y}_t(y)\,|\,A.,n)$ correspondant à (3.7) par (2.28) lorsqu'on a fixé A. et n.

Il existe un sous-ensemble F de probabilité 1 de l'ensemble des trajectoires de A_s qui possède la propriété suivante : si $A. \in F$, les éléments de $C_r(\tilde{y}_t(y)\,|\,A.,n)$ sont les coordonnées d'une équation différentielle graduée dont les paramètres de contrôle ne dépendent que des normes uniformes de toutes les dérivées de γ et D.

On peut donc poser :

$$(3.8)\qquad K(y\,|\,A.,n) = \Gamma_{A_{t_n}}\left[(\tilde{y}_t(y), \tilde{y}_t(y))\,|\,A.,n)\right],$$

$\Gamma_{A_{t_n}}$ indiquant que l'on ne fait le calcul des variations qu'après A_{t_n}.

D'après la proposition II.4 et le théorème II.5, $\tilde{y}_t(y)$ possède une densité C^∞ lorsqu'on a fixé A. et n dès que :

(3.9) $$E\,[K(y|A.,n))^{-p}] < \infty \quad \text{pour tout } p.$$

Notons $f_y(x|A.,n)$ cette densité.

D'après le théorème II.5, elle vérifie :

(3.10) $$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{d^r}{dx^r} f_y(x|A.,n)\right| \leq C_r\, A_r(y|A.,n) B_r(y|A.,n)$$

avec

(3.11) $$A_r(y|A.,n) = \sup_{u\in C_{r+2}(y|A.,n)} E_\Omega[|u|^{q(r)}]$$

(3.12) $$B_r(y|A.,n) = E_\Omega[(K(y|A.,n))^{-q'(r)}],$$

C_r, $q(r)$, $q'(r)$ étant des réels ne dépendant que de r.

Fixons toujours A. et $\tilde{\omega}$ dans $\tilde{\Omega}_n(A.)$. Notons dans ce cas $dP_n(y|A.,n)$ la loi de y_{t_n}.

Soit g(x) la densité de y_t, A. et $\tilde{\omega}$ <u>étant redevenus aléatoires</u>. On a la relation fondamentale issue de l'indépendance de A_t, $\tilde{\omega}$ et ω.

(3.13) $$g(x) = \sum_{n\geq 0} E_{A.}[E_{\tilde{\Omega}}[1_{\tilde{\Omega}_n(A.)}(\tilde{\omega}) \int f_y(x+y|A.,n)dP(y|A.,n)]].$$

Pour montrer que g est C^∞, il ne reste qu'à appliquer les théorèmes de dérivation sous le signe $\int$, en utilisant la majoration (3.10) des dérivées de $f\,(x+y\ |A.,n)$. Ceci nous montre qu'il suffit de prouver que l'on a pour tout réel q

(3.14) $$\sum_{n\geq 0} E_{A.}[E_{\tilde{\Omega}}[1_{\tilde{\Omega}_n(A.)}(\tilde{\omega}) \int (A_r(y|A.,n))^q dP(y|A.,n)]] < \infty$$

et que

(3.15) $$\sum_{n\geq 0} E_{A.}[E_{\tilde{\Omega}}[1_{\tilde{\Omega}_n(A.)}(\tilde{\omega}) \int (B_r(y|A.,n))^{-q} dP(y|A.,n)]] < \infty.$$

<u>Occupons-nous d'abord de</u> (3.14).

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il suffit de montrer que :

(3.16) $$\sum_{n\geq 0} [E_{A.}[P_{\tilde{\Omega}}\{\tilde{\Omega}_n(A.)\}]]^{\frac{1}{2}}\ [E_{A.}[E_{\tilde{\Omega}}[(\int A_r(y|A.,n)^{2\alpha}\ dP(y|A.,n))]]]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

D'après (3.5),

(3.17) $$E_{A.}[P_{\tilde{\Omega}}\{\tilde{\Omega}_n(A.)\}] \leq C\,E_{A.}[\sqrt{A_{t_n} - A_{n-1}}] \leq C\sqrt{t_n - t_{n-1}}.$$

Pour majorer le deuxième terme du produit intervenant dans (3.16), on conditionne par la tribu $F_{A_{t_n}}$, et on remarque que d'après la proposition II.6, on a :

(3.18) $$\sup_{\tilde{\omega},A.} E_{A.}[\int A_r(y|A.,n)^{2\alpha} | F_{A_{t_n}}] < C < \infty.$$

Donc $E_{A.}[\int A_r(y|A.,n)^{2\alpha} dP(y|A.,n)] < \infty$, car la mesure $dP(y|A.,n)$ est $F_{A_{t_n}}$ mesurable et donc

(3.19) $$E_{\tilde{\Omega}}[E_{A.}[\int A_r(y|A.,n)^{2\alpha} dP(y|A.,n)]] < C.$$

Il n'y a plus qu'à choisir une suite t_n tendant assez rapidement vers t pour que $\Sigma(t_{n-1}-t_n)^{\frac{1}{q}} < \infty$ et pour en déduire (3.16).

<u>Occupons-nous maintenant de</u> (3.17).

(3.7) possède un flot stochastique, et l'on a d'après la proposition II.4,

(3.20) $$K(y,A.,n) = \left(\frac{\partial\tilde{y}_t(y)}{\partial y}\right)^2 \sum_{t_n \leqq s \leqq t} (\Delta A_s)\left(\frac{\partial\tilde{y}_s(y)}{\partial y}\right)^{-2} .$$
$$. < \frac{\partial\gamma}{\partial z}(\tilde{y}_{s-}(y),\Delta z_s,0), \frac{\partial\gamma}{\partial z}(\tilde{y}_{s-}(y),\Delta z_s,0)>.$$

Rappelons que A. et n sont fixés. On peut choisir un réel $C_1 > 0$ pour que :

(3.21) $$\operatorname*{Inf}_{x\in\mathbb{R},\ |z|<C_1} < \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,z,0), \frac{\partial\gamma}{\partial z}(x,z,0)> \ > C > 0$$

car les dérivées de tous ordres de γ sont bornées et car γ vérifie (3.4).

Soit T'_n le temps d'arrêt :

(3.22) $$T'_n = \inf\{s \geqq t_n \mid |w_{A_s} - w_{A_{t_n}}| \geqq C_1\}.$$

D'après la formule de définition (3.20) de K(y,A.,n), on a :

$$K(y,A.,n) \geqq C \cdot (A_{T'_n \wedge t} - A_{t_n}) \cdot \left(\frac{\partial\tilde{y}_t(y)}{\partial y}\right)^2 .$$
$$. \operatorname*{Inf}_{t_n \leqq s \leqq t} \left(\frac{\partial\tilde{y}_s(y)}{\partial y}\right)^{-2} .$$

Grâce à la proposition II.6, à la formule (2.24) et à la formule (3.1) qui implique que $\tilde{y}_t$ possède un flot stochastique, on montre que l'on peut contrôler la contribution de $\left(\frac{\partial\tilde{y}_t(y)}{\partial y}\right)^{+2} \operatorname*{Inf}_{t_n\leqq s\leqq t} \left(\frac{\partial\tilde{y}_s(y)}{\partial y}\right)^{-2}$ de la même façon que la contribution de $A_r(y|A.,n)^{2\alpha}$ dans (3.16).

Aussi, il ne reste plus qu'à montrer que

$$(3.23) \qquad \sum_{n\geq 0} [E_{A.}[E_{\tilde{\Omega}}[1_{\tilde{\Omega}_n(A.)}(\tilde{\omega}) \int E_{\Omega}[(A_{T'_n \wedge t} - A_{t_n})^{-2\alpha}] dP(y|A.,n)]]]^2 < \infty.$$

Il résulte de la majoration exponentielle de [S.V] que

$$(3.24) \qquad E_{\Omega}[(A_{T'_n \wedge t} - A_{t_n})^{-2\alpha}] \leq C(A_t - A_{t_n})^{-\beta}$$

pour un β convenablement choisi.

D'après (3.5), il suffit de montrer que

$$(3.25) \qquad \sum_{n\geq 1} E_{A.}[(A_t - A_{t_n})^{-\beta} \exp[-\frac{C}{A_t - A_{t_n}}] \sqrt{A_{t_{n-1}} - A_{t_n}}] < \infty$$

pour un certain réel $C > 0$ et que

$$(3.26) \qquad E_{A.}[(A_t)^{-\beta}] < \infty$$

pour montrer (3.17).

(3.25) résulte du fait que $(A_t - A_{t_n})^{-\beta} \sqrt{A_{t_{n-1}} - A_{t_n}} \exp[-\frac{C}{A_t - A_{t_n}}] \leq$ $\leq C(A_t - A_{t_n})^2 \wedge 1$ et du fait que l'on peut choisir une suite t_n tendant assez rapidement vers t pour que la série $\Sigma E[(A_t - A_{t_n})^2]$ converge.

De plus, classiquement ([B.1], p. 200-210)

$$(3.27) \qquad \begin{aligned} E_{A.}[(A_t)^{-\beta}] &= C \int_0^\infty u^{\beta-1} E[\exp[-uA_t]] du = \\ &= C \int_0^\infty u^{\beta-1} \exp[\int_0^\infty (\exp[-uv] - 1) d\mu(v)] du. \end{aligned}$$

Or d'après les théorèmes taubériens de [B.1] p. 200-210, le terme $\exp[\int_0^\infty (\exp[-uv] - 1) d\mu(v)]$ est à décroissance rapide en raison de (3.2).

Remarque : La difficulté d'écriture de cette preuve provient du fait que l'on doit intégrer deux fois le calcul des variations partielles sur ω : la première fois en $\tilde{\omega}$, la deuxième en A. .

Ceci nous permet d'effectuer le calcul des variations sur la fin des trajectoires de $\tilde{\omega}$, et donc de faire apparaître une perturbation $\tilde{z}_s$ du processus z_s, qui puisse faire disparaître la condition (0.3) qui intervient dans le calcul des variations classiques sur les processus de sauts ([B.G.J]).

En contrepartie, cette perturbation $\tilde{z}_s$ n'est pas indépendante de z_s. De plus, on doit supposer que γ vérifie des hypothèses de non-dégénérescence globales. Si l'on compare au cas des diffusions, ce résultat est très insuffisant : en effet il suffit d'imposer au générateur de la diffusion une condition de non dégénérescence au point de départ de la diffusion pour que celle-ci possède une densité C^∞ ([St]).

BIBLIOGRAPHIE.

[B.1] J.M. BISMUT : Calcul des variations stochastiques et processus de sauts. Z.W. 63. 147-235, 1983.

[B.2] J.M. BISMUT : The calculus of boundary process. Annales de l'E.N.S. XVII 4 (1984).

[B.M] J.M. BISMUT, D.MICHEL : Diffusions conditionnelles I. J.F.A 44 174-211 (1981).

[B.G.J] K. BICHTELER, J.B. GRAVEREAUX, J. JACOD : Malliavin Calculus for processes with jumps, Gordon and Breach, 1987.

[J] J. JACOD : Calcul stochastique et problèmes de martingales. Lect. Notes in Math. 714. Springer (1979).

[I.M.K] K. ITO, H.P. MAC KEAN : Diffusion processes and their sample paths. Grund. Math. Wissen. Band 125. Springer (1974).

[I.W] N. IKEDA, S. WATANABE : Stochastic differential equations and diffusion processes. North-Holland. (1981)

[L] R. LEANDRE : Thèse de troisième cycle. Université de Besançon. (1984).

[L 1] R. LEANDRE : Flot d'une équation différentielle avec semi-martingale directrice discontinue. Séminaire de Proba n° XIX. 271-274. Lect. Notes in Math. 1123. Berlin. Springer. (1985).

[St] D.W. STROOCK : The Malliavin Calculus and its applications. Ecole de Probabilité de Saint-Flour. Lect. Notes in Math 976. 267-382. Springer (1983).

[S.V] D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN : Multidimensional diffusion processes. Grund. Math. Wissen. Band 233. Springer (1974).