MICHEL LEDOUX

Inégalités isopérimétriques et calcul stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 249-259
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__249_0>

Inégalités isopérimétriques et calcul stochastique

Michel Ledoux

Cet article d'exposition présente une approche simple basée sur le calcul stochastique mise en évidence par B. Maurey permettant d'établir certaines inégalités de type isopérimétrique pour les mesures gaussiennes, ainsi que quelques unes de leurs applications usuelles notamment à des questions d'intégrabilité de normes de processus gaussiens ou de variables génériques des chaos de Wiener.

Les inégalités isopérimétriques forment un domaine des mathématiques dans lequel, ainsi que dans ses applications, interagissent la géométrie, l'analyse et la théorie de la mesure (*voir* par exemple [O] pour une introduction). Ces dernières années, les inégalités isopérimétriques et leurs variantes sont en particulier devenues un outil privilégié dans l'étude de diverses questions de géométrie locale des espaces de Banach, à commencer par le célèbre théorème des sections presque sphériques des corps convexes d'A. Dvoretzky. Le lecteur trouvera dans la synthèse [MS] une présentation détaillée de ce type d'applications. Si, le plus souvent, l'inégalité isopérimétrique sur la sphère est l'outil préféré, il y a quelquefois avantage à considérer l'inégalité isopérimétrique dans l'espace de Gauss; ce point de vue procure, en particulier, une approche très intuitive du théorème de Dvoretzky à partir de l'invariance par rotation gaussienne (*cf.* [P]).

Un trait fondamental du cadre gaussien est de pouvoir aisément formuler l'ensemble des résultats en dimension infinie; les inégalités de base restent cependant celles en dimension finie. L'inégalité isopérimétrique gaussienne a été établie par C. Borell [B1] à partir de l'inégalité isopérimétrique sur les sphères et de l'argument limite bien connu du lemme de Poincaré. Rappelons brièvement ces deux faits. Soit S_ρ^{n-1} la sphère de centre l'origine et de rayon ρ dans $\mathbf{R}^n$, σ_ρ^{n-1} la mesure uniforme normalisée sur S_ρ^{n-1}; à tout ensemble mesurable A de S_ρ^{n-1}, associons une calotte sphérique H (c'est-à-dire une boule pour la distance géodésique sur S_ρ^{n-1}) de même mesure que A. L'inégalité isopérimétrique énonce alors que, pour tout réel $r \geq 0$,

$$\sigma_\rho^{n-1}(A_r) \geq \sigma_\rho^{n-1}(H_r)$$

où A_r et H_r sont les voisinages respectifs d'ordre r (pour la distance géodésique) de A et H. Comme dans toutes les inégalités de ce type, l'intérêt réside bien entendu dans la possibilité d'un calcul explicite du membre de droite en fonction de r et $\sigma_\rho^{n-1}(H) = \sigma_\rho^{n-1}(A)$. Le lemme de Poincaré assure quant à lui que la famille de mesures $(\sigma_{\sqrt{n}}^{n-1})$ est asymptotiquement gaussienne au sens où, pour tout entier k et tout ensemble mesurable A de $\mathbf{R}^k$, si $\Pi_{n,k}$ est la projection canonique de $\mathbf{R}^{n+k}$ sur $\mathbf{R}^k$, la suite

$$\sigma_{\sqrt{n}}^{n+k-1}(\Pi_{n,k}^{-1}(A) \cap S_{\sqrt{n}}^{n+k-1})$$

converge, quand n tend vers l'infini, vers la mesure gaussienne canonique de A dans $\mathbf{R}^k$. C'est une des formalisations possibles de l'idée intuitive bien répandue (*cf.* [MK]) suivant laquelle la mesure de Wiener peur être visualisée comme la distribution uniforme sur une sphère de dimension infinie de rayon racine carrée de l'infini. Cet argument limite et l'inégalité isopérimétrique sur les sphères donnent donc lieu à l'inégalité correspondante dans l'espace de Gauss (de dimension finie) qui se décrit ainsi : soit $\gamma = \gamma_n$ la mesure canonique de Gauss sur $\mathbf{R}^n$ de densité

$$\gamma(dx) = (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\tfrac{1}{2}|x|^2\right) dx.$$

Désignons par Φ la fonction de répartition de cette densité en dimension 1 :

$$\Phi(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\tfrac{1}{2}x^2\right) dx, \qquad t \in [-\infty, +\infty].$$

Nous noterons en outre par Ψ la fonction $1 - \Phi$ et par Φ^{-1} la fonction inverse de Φ. (A titre de petit pense-bête, noter que $\Phi^{-1}(0) = -\infty$, $\Phi^{-1}(\frac{1}{2}) = 0$, $\Phi^{-1}(1) = +\infty$; rappelons également l'inégalité usuelle : $\Psi(t) \leq \exp(-t^2/2)$ pour $t \geq 0$.) *L'inégalité isopérimétrique gaussienne indique que pour tout borélien A de $\mathbf{R}^n$ et tout réel $r \geq 0$,*

$$\Phi^{-1} \circ \gamma(A + rB) \geq \Phi^{-1} \circ \gamma(A) + r \tag{1}$$

où $A + rB = \{x \in \mathbf{R}^n : x = a + rb,\ x \in A,\ |b| \leq 1\}$ est le voisinage euclidien d'ordre r de A, B désignant la boule euclidienne unité (fermée) de $\mathbf{R}^n$. Autrement dit, si au borélien A on associe un demi-espace $H = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, u\rangle > \lambda\}$, $|u| = 1$, $\lambda \in \mathbf{R}$, de même mesure $\gamma(H) = \gamma(A)$, la mesure du voisinage d'ordre r de A est plus grande que celle du voisinage d'ordre r de H puisque

$$\gamma(A + rB) \geq \Phi(\Phi^{-1} \circ \gamma(A) + r) = \gamma(H + rB).$$

C'est l'interprétation de l'inégalité sur les sphères à la limite avec la correspondance entre les calottes sphériques et les demi-espaces; en outre, il y a égalité dans (1) pour les demi-espaces et ces ensembles, comme les calottes sur les sphères, sont les éléments extrémaux de l'inégalité [E3].

Si l'inégalité isopérimétrique gaussienne apparaît, après un passage à la limite, comme une conséquence relativement aisée de l'inégalité sur les sphères, la démonstration de cette dernière reste assez délicate (*voir* toutefois [FLM]) et s'appuie sur une technique de symétrisation due à J. Steiner. L'un des traits marquants des travaux d'A. Ehrhard [E1], [E2] est une approche directe de l'isopérimétrie gaussienne par l'introduction d'une technique de symétrisation propre adaptée à la mesure de Gauss, dont une conséquence est une démonstration intrinsèque de l'inégalité de Borell. Ce point de vue a également permis à A. Ehrhard d'établir une inégalité du type de Brunn-Minkowski gaussienne et de développer tout un calcul isopérimétrique gaussien ainsi que ses applications aux intégrales de Dirichlet et aux solutions extrémales [E2], [E3].

Il est probable que l'on puisse déduire inversement l'inégalité isopérimétrique sur les sphères de l'inégalité dans l'espace de Gauss (qu'il faudrait très certainement considérer dans sa version infini-dimensionnelle) mais, à notre connaissance, cette question, a priori non triviale, n'a pas encore été examinée à ce jour.(En terme de concentration, *noter* toutefois [MS], p. 141.)

A ce stade de l'exposition, il vaut la peine d'indiquer comment l'inégalité (1) est d'ordinaire employée dans les applications : le plus souvent, on l'applique à des ensembles de mesure plus grande que $\frac{1}{2}$ (par exemple) ; il s'ensuit alors que pour tout $r \geq 0$,

$$\Phi^{-1} \circ \gamma(A + rB) \geq \Phi^{-1}(\tfrac{1}{2}) + r = r\,,$$

et donc, par composition avec Φ et passage au complémentaire,

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : x \notin A + rB) \leq \Psi(r) \leq \exp\left(-\tfrac{1}{2}r^2\right). \tag{2}$$

Cette inégalité exprime ainsi une décroissance extrèmement rapide, lorsque r devient grand, de la mesure gaussienne du complémentaire du voisinage euclidien d'ordre r d'un borélien de mesure au moins $\frac{1}{2}$. Cette propriété participe des phénomènes de concentration de la mesure dont on pourra trouver un présentation en [GM].

L'objet de cet exposé va être de montrer, en suivant B. Maurey (*cf.* [P]), comment des arguments simples de calcul stochastique (essentiellement la formule d'Itô pour le mouvement brownien) permettent de retrouver, sinon l'inégalité (2), du moins des inégalités suffisament proches pour la plupart des applications, que ce soit à la géométrie des espaces de Banach ou à l'intégrabilité des processus gaussiens ou dérivés. La précision perdue empêche cependant l'accès à l'isopérimétrie elle-même et ses solutions extrémales.

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbf{R}^n$, issu de l'origine, $(P_t)_{t\geq 0}$ son semi-groupe. Pour toute fonction f sur $\mathbf{R}^n$ à valeurs réelles suffisament régulière, une application immédiate de la formule d'Itô montre que

$$f(B_1) - \mathbf{E}f(B_1) = P_0 f(B_1) - P_1 f(B_0) = \int_0^1 \nabla(P_{1-t}f)(B_t)\,.\,dB_t.$$

Une telle identité met d'ores et déjà en évidence une inégalité de Poincaré gaussienne (*voir* par exemple dans cet ordre d'idée [C]) :

$$\mathbf{E}|f(B_1) - \mathbf{E}f(B_1)|^2 \leq \mathbf{E}|\nabla f(B_1)|^2.$$

Ce type d'inégalités est étroitement lié à l'isopérimétrie et aux phénomènes de concentration de la mesure (*cf.* [O], [GM]) et suggère ainsi l'intérêt de la formule précédente pour ces questions. Désignons par $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ la norme de Lipschitz, supposée finie, de f, i.e.

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} = \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|};\ x, y \in \mathbf{R}^n,\ x \neq y\right\},$$

et supposons pour simplifier $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$. Ainsi,

$$|P_{1-t}f(x) - P_{1-t}f(y)| \leq |x-y|$$

ce qui équivaut à dire que, pour tout t de [0,1] et presque tout x,

$$|\nabla(P_{1-t}f)(x)| \leq 1.$$

Si τ désigne le temps aléatoire $\int_0^1 |\nabla(P_{1-t}f)|^2(B_t)\,dt$, presque sûrement $\tau \leq 1$. L'intégrale stochastique $\int_0^1 \nabla(P_{1-t}f)(B_t).\,dB_t$ ayant même loi qu'un mouvement brownien unidimensionnel $(X_t)_{t\geq 0}$ au temps τ, il en résulte que, pour tout réel $u > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{f(B_1) - \mathbf{E}f(B_1) > u\} &= \mathbf{P}\{X_\tau > u\}\\ &\leq \mathbf{P}\{\max_{0\leq t\leq 1} X_t > u\} = 2\,\Psi(u).\end{aligned}$$

En reformulant ce résultat dans les notations du début de l'exposé et en vertu d'un simple argument d'approximation, *pour toute fonction lipschitzienne f telle que $\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ et tout réel $u > 0$, nous avons donc*

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : f(x) > \textstyle\int f\,d\gamma + u) \leq 2\,\Psi(u). \tag{3}$$

Il est à noter que la constante numérique 2 du membre de droite de cette inégalité ne peut être améliorée comme le montre le choix, sur $\mathbf{R}$, de la fonction $f(x) = |x| \wedge a$ pour $a > 0$ suffisament petit. Signalons également qu'outre cette inégalité, B. Maurey et G. Pisier [P] établissent des inégalités plus générales pour fonctions à valeurs vectorielles ; les techniques sont alors différentes et l'argument précédent ne semble plus en mesure de fournir la conclusion. Par ailleurs, mentionnons qu'A. de Acosta et J. Zinn [AZ] ont donné une démonstration de (3) à partir d'un raisonnement sur les sommes de variables aléatoires indépendantes et le théorème limite central.

Bien que la formule (3) soit déjà efficace dans nombre de situations comme nous le verrons plus loin, il nous faut à présent tâcher d'exploiter cette inégalité afin de nous rapprocher de l'inégalité isopérimétrique (2). Considérons un borélien A de mesure gaussienne $\gamma(A) > 0$. Pour tout réel r positif, posons

$$f_{r,A}(x) = \min(d(x,A), r)$$

où $d(x,A)$ est la distance euclidienne du point x à l'ensemble A. Clairement $\|f_{r,A}\|_{\mathrm{Lip}} \leq 1$ de sorte que ces fonctions, lorsque r varie, sont suceptibles de l'application de l'inégalité (3). Posons $M_{r,A} = \int f_{r,A}\,d\gamma$; cette inégalité pour $f_{r+\varepsilon,A}$ et $u = r - M_{r+\varepsilon,A}$ qui est positif pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit fournit :

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : \min(d(x,A), r+\varepsilon) > r) \leq 2\,\Psi(r - M_{r+\varepsilon,A}),$$

et donc, lorsque ε tend vers 0,

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : x \notin A + rB) \leq 2\,\Psi(r - M_{r,A}) \tag{4}$$

puisque $d(x, A) > r$ si et seulement si $x \notin A + rB$. La comparaison de ce que nous venons d'obtenir avec l'inégalité de Borell (2) indique qu'il nous faut à présent contrôler $M_{r,A} = \int f_{r,A} d\gamma$, si possible à partir uniquement de r et de la mesure de A. Nous utilisons à cet effet une simple formule récursive :

$$\begin{aligned} M_{r,A} &= \int_0^r \gamma(x \in \mathbf{R}^n : d(x, A) > t)\, dt \\ &\leq \int_0^r \min\{\gamma(A^c), 2\,\Psi(t - M_{t,A})\}\, dt. \end{aligned}$$

Une première estimation est alors

$$M_{r,A} \leq r\,\gamma(A^c).$$

Celle-ci fournit

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : x \notin A + rB) \leq 2\,\Psi(r\,\gamma(A)) \leq 2\,\exp\left(-\tfrac{1}{2}\, r^2 \gamma(A)^2\right),$$

inégalité qu'il est d'ores et déjà instructif de comparer à (2). Mais, en reportant dans la formule récursive, on a aussi

$$M_{r,A} \leq \int_0^r \min\{\gamma(A^c),\, 2\,\Psi(t\gamma(A))\}\, dt.$$

Si nous désignons alors par $\delta(u)$ la fonction décroissante sur $]0,1]$ définie par

$$\delta(u) = \int_0^\infty \min\{1 - u,\, 2\,\Psi(tu)\}\, dt,$$

nous avons $M_{r,A} \leq \delta \circ \gamma(A)$ uniformément en r ; c'est l'estimation que nous retenons pour l'application à (4). A noter pour ce qui va suivre que $\delta \circ \gamma(A) \to 0$ quand $\gamma(A) \to 1$. Ainsi donc, pour tout réel $r \geq 0$,

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : x \notin A + rB) \leq 2\,\Psi(r - \delta \circ \gamma(A)).$$

Comme il est aisé d'observer que, pour $\varepsilon > 0$,

$$\Psi(r - \varepsilon) \leq 2\,\exp\left(\varepsilon r + \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\right) \Psi(r),$$

nous concluons finalement que pour tout r positif

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : x \notin A + rB) \leq 4\,\exp\left[\delta \circ \gamma(A)\, r + \tfrac{1}{2}\delta \circ \gamma(A)^2)\right] \Psi(r). \tag{5}$$

Si nous comparons ce que nous venons d'obtenir, à très peu de frais, avec l'inégalité (2), nous remarquons bien sûr un facteur supplémentaire dans le terme majorant. Ce facteur toutefois est du premier ordre en r alors que $\Psi(r)$ décroît en $\exp(-r^2/2)$; en outre, il est affecté d'un coefficient qui peut être rendu arbitrairement petit pourvu que la mesure de A soit suffisament grande. Grâce à ces deux propriétés, *l'inégalité* (5) *peut être utilisée dans la majeure partie des applications* comme *l'inégalité isopérimétrique* (2) *fournissant des résultats ayant le* même *ordre de précision.* A titre d'exemples, nous décrivons brièvement ci-dessous quelques applications à l'intégrabilité de normes de vecteurs gaussiens et des variables génériques des chaos de Wiener généralement déduites de l'inégalité de Borell. Signalons que, comme l'inégalité isopérimétrique de Borell [B1], l'inégalité (5) peut être énoncée pour des mesures de Gauss dans des espaces de dimension infinie et le procédé usuel d'approximation sera explicité plus loin dans un cas particulier. La formulation en dimension infinie fait intervenir en lieu et place de B, la boule euclidienne unité dans $\mathbf{R}^n$, la boule unité de l'espace autoreproduisant associé à la mesure gaussienne considérée (l'espace des fonctions de Cameron-Martin dans le cas de la mesure de Wiener, par exemple). Il nous reste à mentionner, pour conclure cette première partie, que nous ignorons s'il est possible de déduire la véritable inégalité isopérimétrique des arguments décrits précédemment. Il faudrait très certainement reprendre les choses au niveau de (3), sinon avant.

Les principales applications de l'inégalité isopérimétrique gaussienne concernent à ce jour, outre l'isopérimétrie elle-même (travaux de C. Borell et A. Ehrhard), la géométrie des espaces de Banach (théorème de Dvoretzky) et les propriétés d'intégrabilité de certaines variables gaussiennes. Nous renvoyons à [P] (*cf.* également [MS]) pour le premier type d'applications. Nous esquissons par contre brièvement le second type de conséquences à partir des inégalités, plus faibles mais tout aussi efficaces, précédentes. Nous nous servirons indistinctement de (3) ou (5) suivant les cas. Nous concentrons d'abord notre attention sur l'intégrabilité des vecteurs gaussiens.

Soit $(X_t)_{t\in T}$ un processus gaussien centré sur un ensemble T supposé dénombrable pour éviter toute question de mesurabilité; *on suppose que*

$$\mathbf{P}\{\sup_T |X_t| < \infty\} = 1$$

(ou seulement > 0), et on s'intéresse aux propriétés d'intégrabilité de la loi du sup. Le premier résultat dans cette direction est le théorème de X. Fernique [F], H.J. Landau et L.A. Shepp [LS] (*voir* aussi [MaS]) qui découle immédiatement de ce qui précède. Le seul petit travail consiste à se ramener à la gaussienne canonique sur $\mathbf{R}^n$. Soit $T_o = \{t_1, \ldots, t_n\}$ une partie finie de T; désignons par $\Gamma = U\,U^t$ la matrice de covariance symétrique définie (semi-) positive du vecteur gaussien $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ dans $\mathbf{R}^n$. Ce vecteur a même loi que $U\,\Lambda$ où Λ suit la loi gaussienne canonique $\gamma = \gamma_n$ dans $\mathbf{R}^n$. Considérons alors

$$\begin{aligned} f : \mathbf{R}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longrightarrow \|Ux\|_\infty \end{aligned}$$

où $\|.\|_\infty$ est la norme sup de $\mathbf{R}^n$. La norme lipschitzienne $\|f\|_{\mathrm{Lip}}$ de f est inférieure ou égale à la norme $\|U\|$ de U en tant qu'opérateur de $\mathbf{R}^n$ muni de la norme euclidienne dans $\mathbf{R}^n$ muni de la norme sup et celle-ci vaut, par construction,

$$\|U\| = \sup_{i \le n} (\mathbf{E}X_{t_i}^2)^{1/2}.$$

L'inégalité (3) appliquée à f fournit, pour tout $u > 0$,

$$\mathbf{P}\{\sup_{T_o} |X_t| > \mathbf{E} \sup_{T_o} |X_t| + u\} \le 2\,\Psi(u/\|U\|). \tag{6}$$

En considérant $-f$ on a également

$$\mathbf{P}\{\sup_{T_o} |X_t| + u < \mathbf{E} \sup_{T_o} |X_t|\} \le 2\,\Psi(u/\|U\|). \tag{6'}$$

Soit alors $\sigma = \sup_T (\mathbf{E}X_t^2)^{1/2}$, fini sous notre hypothèse. Choisissons u suffisament grand pour que $2\,\Psi(u/\sigma) \le \frac{1}{2}$ ainsi qu'un réel M également assez grand pour que

$$\mathbf{P}\{\sup_T |X_t| \le M\} > \frac{1}{2}.$$

Comme $\|U\| \le \sigma$, par intersection entre la probabilité précédente et celle de (6'), il s'ensuit que

$$\mathbf{E} \sup_{T_o} |X_t| \le M + u.$$

Les choix de M et u étant faits indépendamment de $T_o \subset T$ sous la seule hypothèse $\mathbf{P}\{\sup_T |X_t| < \infty\} = 1$, il en résulte d'ores et déjà que $\mathbf{E} \sup_T |X_t| < \infty$. En outre, on peut alors passer à présent à la limite dans (6) sur les parties finies de T, *et obtenir ainsi, pour tout* $u > 0$,

$$\mathbf{P}\{\sup_T |X_t| > \mathbf{E} \sup_T |X_t| + u\} \le 2\,\Psi(u/\sigma).$$

En particulier,

$$\lim_{u \to \infty} \frac{1}{u^2} \operatorname{Log} \mathbf{P}\{\sup_T |X_t| > u\} = -\frac{1}{2\sigma^2} \tag{7}$$

ou, de façon équivalente,

$$\mathbf{E}\left(\exp \frac{1}{2\alpha^2} \sup_T |X_t|^2\right) < \infty \quad \textit{si et seulement si} \quad \alpha > \sigma.$$

Cette brève discussion montre que la taille d'un processus gaussien borné se mesure essentiellement à partir de *2 paramètres* : le nombre $\sigma = \sup_T (\mathbf{E}X_t^2)^{1/2}$ lié aux moments faibles et une quantité, médiane ou espérance, liée à la topologie forte de la norme sup. Cette observation est encore plus clairement mise en évidence par le théorème suivant dû à M. Talagrand [T] qui précise l'intégrabilité précédente ; ce résultat est établi par Talagrand à l'aide de l'inégalité de Borell (2) mais en lui substituant (5) la démonstration est la même. Reprenons le processus gaussien de tout à l'heure et considérons

$$\tau = \inf\{\lambda > 0 : \mathbf{P}\{\sup_T |X_t| \leq \lambda\} > 0\},$$

autrement dit le premier saut, en fait l'unique, de la loi du sup. *M. Talagrand montre alors que pour tout* $\tau' > \tau$,

$$\mathbf{E}\left(\exp \frac{1}{2\sigma^2}(\sup_T |X_t| - \tau')^2\right) < \infty,$$

précisant ainsi l'intégrabilité précédente.

Pour plus de détails sur toutes ces questions, le lecteur pourra consulter la thèse d'A. Ehrhard [E4] où une discussion sur la densité du maximum d'un processus gaussien complète et prolonge celle-ci. Outre les outils précédents, l'auteur s'appuie sur une inégalité de type Brunn-Minkowski établie à l'aide de la symétrisation gaussienne [E1]. Il est bon de comparer celle-ci à l'inégalité isopérimétrique : *si A et A' sont des convexes de $\mathbf{R}^n$, pour tout λ de* [0,1],

$$\Phi^{-1} \circ \gamma(\lambda A + (1-\lambda)A') \geq \lambda \Phi^{-1} \circ \gamma(A) + (1-\lambda)\Phi^{-1} \circ \gamma(A') \tag{8}$$

où la somme $\lambda A + (1-\lambda)A'$ est comme toujours entendue au sens de Minkowski. Il n'est pas connu à ce jour si cette inégalité de concavité s'étend, comme c'est le cas pour l'inégalité analogue avec la mesure de Lebesgue, à tous les boréliens de $\mathbf{R}^n$. Cette extension présenterait un intérêt certain car il est aisé de constater que l'inégalité (8) contient en fait l'inégalité isopérimétrique (1). En effet, si r est un réel positif, (8) appliquée à A et $A' = \frac{r}{1-\lambda}B$ où B est la boule euclidienne unité de $\mathbf{R}^n$ fournit :

$$\Phi^{-1} \circ \gamma(\lambda A + rB) \geq \lambda \Phi^{-1} \circ \gamma(A) + (1-\lambda)\Phi^{-1} \circ \gamma\left(\frac{r}{1-\lambda}B\right).$$

L'inégalité isopérimétrique apparaît lorsque λ tend vers 1 puisque

$$\lim_{\lambda \to 1} (1-\lambda)\Phi^{-1} \circ \gamma\left(\frac{r}{1-\lambda}B\right) = r,$$

ce qui se constate, soit par un calcul direct, soit par (7) ($\Phi^{-1}(1-u)$ est équivalent à $(2\,\mathrm{Log}\frac{1}{u})^{1/2}$ lorsque $u \to 0$).

Nous terminons cette discussion par une application des inégalités isopérimétriques à l'intégrabilité des variables génériques des chaos de Wiener due à C. Borell [B2]. Nous énonçons les principales conclusions en renvoyant le lecteur à [B2] pour les détails. Dans un cadre simplifié, en se limitant en particulier au deuxième chaos, l'idée de la démonstration se formule en fait très aisément : soit la forme quadratique

$$Q(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \qquad x = (x_i)_{i \leq n} \in \mathbf{R}^n.$$

La question consiste à examiner le degré d'intégrabilité de $|Q|$ sous la loi gaussienne canonique $\gamma = \gamma_n$ dans $\mathbf{R}^n$, plus précisément à déterminer le comportement asymptotique de $\gamma(x \in \mathbf{R}^n : |Q(x,x)| > t)$ lorsque t croît vers l'infini. Comme l'a montré C. Borell, les outils précédents sont parfaitement adaptés à l'étude de cette question. Introduisons le nombre

$$\sigma = \sup_{|x| \leq 1} |Q(x,x)|.$$

Le résultat principal indique :

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \operatorname{Log} \gamma(x \in \mathbf{R}^n : |Q(x,x)| > t) = -\frac{1}{2\sigma}\,; \tag{9}$$

en particulier,

$$\int \exp \frac{1}{2\alpha} |Q| \, d\gamma < \infty \quad \textit{pour tout} \quad \alpha > \sigma.$$

Les étapes de la démonstration sont les suivantes. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire mais fixé, et soit, pour tout $r > 0$,

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n : \sup_{|y| \leq 1} \frac{1}{r^2} |Q(x,x) + rQ(x,y) + rQ(y,x)| < \varepsilon\}.$$

On peut trouver r_o assez grand tel que, pour tout $r \geq r_o$, on ait $\gamma(A) \geq \frac{1}{2}$ (par exemple). B désignant comme toujours la boule unité de $\mathbf{R}^n$, l'inclusion suivante est satisfaite :

$$A + rB \subset \{x \in \mathbf{R}^n : |Q(x,x)| \leq r^2(\sigma + \varepsilon)\}.$$

Ainsi, en vertu de l'inégalité isopérimétrique (5), pour $r \geq r_o$,

$$\gamma(x \in \mathbf{R}^n : |Q(x,x)| > r^2(\sigma + \varepsilon)) \leq 4 \exp[\delta(\tfrac{1}{2})r + \delta(\tfrac{1}{2})^2] \, \Psi(r),$$

de sorte que

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r^2} \operatorname{Log} \gamma(x \in \mathbf{R}^n : |Q(x,x)| > r^2(\sigma + \varepsilon)) \leq -\frac{1}{2},$$

soit la moitié de (9). A partir d'une décomposition appropriée de γ, il n'est pas difficile de se convaincre que l'inégalité inverse est aussi satisfaite. *Pour les éléments des chaos d'ordre $d \geq 2$, on a*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{2/d}} \operatorname{Log} \gamma(x \in \mathbf{R}^n : |Q(x,\ldots,x)| > t) = -\frac{1}{2\sigma^{2/d}},$$

identité qui s'établit de la même façon.

Des résultats standards sur les intégrales stochastiques multiples permettent d'interpréter ces conclusions relativement aux chaos de Wiener associés à un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ (*cf.* [B2], qui contient aussi des choses plus générales). Le chaos de Wiener de degré d associé à $(B_t)_{t\geq 0}$ est constitué des variables aléatoires X de la forme

$$X = \int_0^\infty dB_{s_1} \int_0^{s_1} dB_{s_2} \dots \int_0^{s_{d-1}} dB_{s_d}\, f(s_1, \dots, s_d)$$

où f est une fonction déterministe de carré intégrable i.e.

$$\int_0^\infty ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{d-1}} ds_d\, f^2(s_1, \dots, s_d) < \infty.$$

Posons

$$\sigma = \sup \left\{ \left| \int_0^\infty ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \dots \int_0^{s_{d-1}} ds_d\, f(s_1, \dots, s_d)\, g(s_1) \dots g(s_d) \right| \right\}$$

où le sup parcourt les fonctions g sur $\mathbf{R}_+$ telles que $\int_0^\infty g^2(s)\, ds \leq 1$. Alors, *le théorème de C. Borell* [B2] *énonce :*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t^{2/d}} \operatorname{Log} \mathbf{P}\{|X| > t\} = -\frac{1}{2\sigma^{2/d}}\,;$$

en particulier,

$$\mathbf{E}\left(\exp \frac{1}{2} \left|\frac{X}{\alpha}\right|^{2/d}\right) < \infty \quad \textit{pour tout} \quad \alpha > \sigma.$$

Il est probable que l'extension de Talagrand [T] décrite précédemment pour les processus gaussiens ait ici un analogue.

Je remercie M. Yor pour l'intérêt qu'il a témoigné à l'exposition de ces résultats.

[AZ] ACOSTA, A. DE, ZINN, J., Communication à la Conférence Probability in Banach spaces VI, Danemark 1986.
[B1] BORELL, C., The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space, *Invent. Math.*, **30**, 1975, p. 207–216.
[B2] BORELL, C., Tail probabilities in Gauss space [Vector space measures and applications, Dublin 1977], *Lecture Notes in Math.* **644**, 1978, p. 71–82, Springer-Verlag.
[B3] BORELL, C., Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **70**, 1985, p. 1–13.
[C] CHEN, L.H.Y., Poincaré-type inequalities via stochastic integrals, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **69**, 1985, p. 251–277.
[E1] EHRHARD, A., Symétrisation dans l'espace de Gauss, *Math. Scand.*, **53**, 1983, p. 281–301.
[E2] EHRHARD, A., Inégalités isopérimétriques et intégrales de Dirichlet gaussiennes, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, **17**, 1984, p. 317–332.

[E3] Ehrhard, A., Eléments extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minkowski gaussiennes, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **22**, 1986, p. 149–168.

[E4] Ehrhard, A., Convexité de mesures gaussiennes [Thèse de l'Université Louis Pasteur, Strasbourg (1985)].

[F] Fernique, X., Intégrabilité des vecteurs gaussiens, *C.R. Acad. Sci. Paris, Série A*, **270**, 1970, p. 1698–1699.

[FLM] Figiel, T., Lindenstrauss, J., Milman, V.D., The dimensions of almost spherical sections of convex bodies, *Acta Math.*, **139**, 1977, p. 53–94.

[GM] Gromov, M., Milman, V.D., A topological application of the isoperimetric inequality, *Amer. J. Math.*, **105**, 1983, p. 843–854.

[LS] Landau, H.J., Shepp, L.A., On the supremum of a Gaussian process, *Sankhya*, **A 32**, 1970, p. 369–378.

[MK] McKean, H.P., Geometry of differential space, *Ann. Probability*, **1**, 1973, p. 197–276.

[MaS] Marcus, M.B., Shepp, L.A., Sample behavior of Gaussian processes, *Proc. of the Sixth Berkeley Symposium on Math. Stat. and Prob.* **2**, 1972, p. 423–441.

[MS] Milman, V.D., Schechtman, G., Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces, *Lecture Notes in Math.* **1200**, 1986, Springer-Verlag.

[O] Osserman, R., The isoperimetric inequality, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**, 1978, p. 1182–1238.

[P] Pisier, G., Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces [Probability and Analysis, Varenna 1985], *Lecture Notes in Math.* **1206**, 1986, p. 167–241, Springer-Verlag.

[T] Talagrand, M., Sur l'intégrabilité des vecteurs gaussiens, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **68**, 1984, p. 1–8.

Institut de Recherche Mathématique Avancée,
Laboratoire associé au C.N.R.S.,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes, F-67084 Strasbourg