SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SOPHIE WEINRYB
MARC YOR

Le mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$ comme limite centrale de temps locaux d'intersection

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 225-248
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__225_0>

LE MOUVEMENT BROWNIEN DE LEVY INDEXE PAR $\mathbb{R}^3$ COMME LIMITE CENTRALE DE TEMPS LOCAUX D'INTERSECTION

Sophie Weinryb [1] et Marc Yor [2]

1. *Introduction.*

Dans tout ce travail, (β_t) et (β'_t) désignent - sauf précision contraire - deux mouvements browniens à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, indépendants, indexés par $t \in \mathbb{R}_+$.

(1.1) Pour tout $t > 0$, il existe un processus mesurable $(\alpha(x,t)\ ;\ x \in \mathbb{R}^3)$ tel que : pour toute fonction borélienne $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$,

$$\text{(1.a)} \qquad \int_0^t du \int_0^u ds\ f(\beta_u - \beta'_s) = \int dx\ f(x)\ \alpha(x,t)$$

Il existe en outre une version bicontinue du processus $(\alpha(x,t)\ ;\ x \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$ qui vérifie plus précisément : P-p.s., pour tous $t > 0$, $N > 0$, et $\eta \in (0,\frac{1}{2})$,

$$\text{(1.b)} \qquad \sup_{s \leq t\ ;\ |x|,|y| \leq N} \frac{|\alpha(x,s)-\alpha(y,s)|}{|x-y|^{1/2-\eta}} < \infty$$

(voir Geman-Horowitz-Rosen [2] ; Rosen [7]); nous donnons ci-dessous en (3.6) une démonstration de (1.b) à l'aide du calcul stochastique).

C'est cette version que nous considérerons toujours dans la suite.

L'objet principal de notre travail est la démonstration du

__*Théorème A*__ : *Le processus continu :*

$$(\beta_t, \beta'_t\ ;\ n^{1/2}(\alpha(\tfrac{y}{n},t) - \alpha(0,t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$$

converge en loi vers :

$$(\beta_t, \beta'_t\ ;\ c\ B_{\alpha(0,t)}(y) \qquad ;\ y \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0)$$

---

(1) *Centre de Mathématiques appliquées. Ecole Polytechnique Palaiseau (91.128)*

(2) *Laboratoire de Probabilités - Université P. et M. Curie - Tour 56 - 4, Place Jussieu - 75252 PARIS CEDEX 05*

où $(B_u(y)\ ;\ u \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^3)$ *est un processus gaussien centré, indépendant de* (β,β'), *qui a pour covariance* :

$$E[B_s(x)\ B_t(y)] = (s \wedge t)\ \Gamma(x,y),$$

avec $\Gamma(x,y) = \frac{1}{2}\{|x| + |y| - |x-y|\}$, *et* c *une constante universelle.*

<u>Commentaires A</u> : 1) En particulier, pour tout $u > 0$, le processus $(B_u(x), x \in \mathbb{R}^3)$ a même loi que $(\sqrt{u}\, X_x\ ;\ x \in \mathbb{R}^3)$, où $(X_x, x \in \mathbb{R}^3)$ est un mouvement brownien de Lévy, indexé par $\mathbb{R}^3$, lequel est caractérisé par :

(1.c) $(X_x, x \in \mathbb{R}^3)$ est un processus gaussien centré tel que :

$$X_0 = 0 \quad \text{et} \quad E[(X_x - X_y)^2] = |x-y|.$$

2) Le théorème A est à rapprocher d'un résultat analogue pour le mouvement brownien réel $(\beta_t\ ;\ t \geq 0)$ (voir Yor [8]) :
si $(\ell_t^a\ ;\ a \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ désigne la famille bicontinue des temps locaux du mouvement brownien $(\beta_t, t \geq 0)$, alors :

(1.d)
$$\left(\beta_t\ ;\ \frac{n^{1/2}}{2}(\ell_t^{a/n} - \ell_t^0)\ ;\ a \in \mathbb{R},\ t \geq 0\right)$$

converge en loi vers : $\left(\beta_t\ ;\ B_{(\ell_t^0, a)}\ ;\ a \in \mathbb{R},\ t \geq 0\right)$

où $(B_{(u,a)}\ ;\ a \in \mathbb{R},\ u \geq 0)$ désigne un drap brownien nul sur les axes, indépendant de β.

Fixons maintenant $\lambda > 0$, et posons $\tau_\lambda = \inf\{t : \ell_t^0 > \lambda\}$.

On déduit du théorème central limite (1.d) :

$$\text{(1.e)} \qquad \left(\frac{n^{1/2}}{2}(\ell_{\tau_\lambda}^{a/n} - \lambda)\ ;\ a \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} (\sqrt{\lambda}\ \gamma_a\ ;\ a \geq 0),$$

où $(\gamma_a\ ;\ a \geq 0)$ désigne un mouvement brownien réel, issu de 0 en $a = 0$.

Le résultat (1.e) peut également être obtenu comme conséquence du célèbre théorème suivant, dû à Ray [6] et Knight [3] :

(1.f) le processus $(\ell_{\tau_\lambda}^a\ ;\ a \geq 0)$ est le carré d'un processus de Bessel de dimension 0, issu de $\sqrt{\lambda}$ en $a = 0$.

3) Par analogie avec le commentaire 2) ci-dessus, on peut réénoncer partiellement le théorème A sous la forme suivante :
fixons $t > 0$; conditionnellement à $\alpha(0,t) = x$, le processus

$$\left(n^{1/2}(\alpha(\tfrac{y}{n} ; t) - \alpha(0 ; t)) ; y \in \mathbb{R}^3\right)$$

converge en loi vers : $(c\sqrt{x}\, X_y ; y \in \mathbb{R}^3)$,

où $(X_y ; y \in \mathbb{R}^3)$ est un mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$, issu de 0 en $y = 0$.

Remarquons que l'on obtient le même théorème central limite en considérant :

$$\text{(1.g)} \qquad \frac{c}{2}\, n^{1/2}\, (|Y_{y/n} + \xi|^2 - |\xi|^2)$$

où $(Y_y ; y \in \mathbb{R}^3)$ est un mouvement brownien de Lévy, indexé par $\mathbb{R}^3$, valant 0 en $y = 0$, et $\xi \in \mathbb{R}^d$, $|\xi|^2 = x$.

En effet, on a :

$$|Y_{y/n} + \xi|^2 - |\xi|^2 = |Y_{y/n}|^2 + 2(Y_{y/n},\xi) \overset{(d)}{=} \frac{1}{n}\,|Y_y|^2 + \frac{2}{n^{1/2}}\,(Y_y,\xi)$$

et, finalement, l'expression (1.g) a même loi asymptotique que $(c\sqrt{x}\, X_y ; y \in \mathbb{R}^3)$.

Ce commentaire suggère fortement d'étudier la loi du processus $(\alpha(y ; t), y \in \mathbb{R}^3)$ pour t fixé, ou lorsque t est remplacé par un temps exponentiel indépendant des mouvements browniens β et β', et de la comparer à celle du carré de la norme d'un mouvement brownien de Lévy indexé par $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

(1.2) Le mouvement brownien de Lévy, caractérisé par (1.c), est un cas particulier des mouvements browniens fractionnaires. Pour tout $0 < \mu < 2$, il existe un processus gaussien centré $(X_x^{(\mu)} ; x \in \mathbb{R}^3)$ dont la loi est caractérisée par :

$$(1.\text{c})_\mu \qquad X_0^{(\mu)} = 0 \ ; \ E[(X_x^{(\mu)} - X_y^{(\mu)})^2] = |x-y|^\mu .$$

Nous dirons que $X^{(\mu)}$ est un mouvement brownien fractionnaire d'indice μ (pour différentes constructions de ces processus, voir l'exposé précédent dans ce volume).
Nous nous proposons d'énoncer, ci-dessous, un théorème central limite - qui généralise le théorème A - dans lequel figure, comme limite en loi, un processus gaussien centré $(B_u^{(\mu)}(x) ; u \geq 0, x \in \mathbb{R}^3)$ ayant pour covariance :

$$\text{(1.h)} \qquad E[B_s^{(\mu)}(x)\, B_t^{(\mu)}(y)] = (s \wedge t)\, \Gamma_\mu(x,y),$$

où $\qquad \Gamma_\mu(x,y) = \frac{1}{2}\left(|x|^\mu + |y|^\mu - |x-y|^\mu\right)$

Pour cela, nous introduisons les fonctionnelles du couple (β,β')

$$(I_p(y,t)\ ;\ y \in \mathbb{R}^3, t \geq 0)$$

indexées par p, pour $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$, et définies comme suit :

(i) lorsque $\frac{1}{2} < p < 1$, $I_p(y,t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t du \int_0^u ds \frac{1}{|\beta_u - \beta'_s - y|^{p+2}}$.

Cette expression est finie P-p.s., grâce à la formule de densité d'occupation (1.a), et à la continuité des temps locaux d'intersection.

(ii) lorsque $p = 1$, $I_1(y,t) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(y,t)$.

(iii) lorsque $1 < p < \frac{3}{2}$,

$$I_p(y,t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_0^t du \int_0^u ds \frac{1_{|\beta_u-\beta'_s-y|\geq\varepsilon}}{|\beta_u-\beta'_s-y|^{p+2}} - \frac{4\pi\alpha(y,t)}{(p-1)\varepsilon^{p-1}}\right)$$

Cette limite existe grâce à la propriété de continuité (1.b) et à la formule de densité d'occupation (1.a).

Nous pouvons maintenant énoncer le

<u>Théorème A_p</u> : *Soit p tel que $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$, et $\tilde{p} = 3-2p$.*

Le processus continu :

$$\left(\beta_t, \beta'_t\ ;\ n^{\frac{3}{2}-p}\left(I_p\left(\tfrac{y}{n},t\right) - I_p(0,t)\right)\ ;\ y \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\right)$$

converge en loi vers :

$$\left(\beta_t; \beta'_t\ ;\ c_p\, B^{(\tilde{p})}_{\alpha(0,t)}(y) \qquad ;\ y \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\right)$$

où $(B^{(\tilde{p})}_u(y)\ ;\ u \geq 0,\ y \in \mathbb{R}^3)$ est un processus gaussien centré indépendant de (β,β') et dont la covariance est donnée par la formule (1.h), avec $\mu = \tilde{p}$.

<u>Commentaire</u> A_p : De même que pour le théorème A, il existe un théorème analogue concernant le mouvement brownien réel $(\beta_t)_{t\geq 0}$.

Introduisons, pour $\frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}$, les processus $(i_p(y\,;t)\ ;\ y \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ définis par :

(i) lorsque $\frac{1}{2} < p < 1$, $i_p(y,t) = \int_0^t ds \frac{1}{|\beta_s - y|^p}$

(ii) lorsque $p = 1$, $i_p(y,t) = \ell_t^y$, temps local de β en y.

(iii) lorsque $1 < p < \frac{3}{2}$, $i_p(y,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_0^t ds \frac{1_{|\beta_s - y| \geq \varepsilon}}{|\beta_s - y|^p} - \frac{2\, \ell_t^y}{(p-1)\varepsilon^{p-1}} \right)$.

Cette limite existe grâce au caractère localement hölderien d'ordre $(\frac{1}{2} - \eta)$ $(\eta > 0)$ des temps locaux dans la variable d'espace, et à la formule de densité d'occupation.

Alors, le processus $(\beta_t \; ; \; n^{\frac{3}{2}-p} (i_p(\frac{y}{n},t) - i_p(0,t) \; ; \; y \in \mathbb{R}, t \geq 0)$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers :

$$(\beta_t \; ; \; c_p \, B^{(\tilde{p})}_{(\ell_t^0, y)} \; ; \; y \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

où $(B^{(\tilde{p})}_{(u,y)}, u \geq 0, y \in \mathbb{R})$ est un processus gaussien centré, indépendant de β, et dont la covariance est donnée par la formule (1.h), avec $\mu = \tilde{p} \equiv 3-2p$.

(1.3) A l'aide de versions adéquates de la formule d'Itô, la démonstration du théorème A_p découlera aisément du théorème limite B ci-dessous, relatif à une certaine intégrale stochastique par rapport au couple (β, β').
Introduisons tout d'abord quelques notations :

si φ et ψ sont deux matrices 3×3, on note $((\varphi,\psi)) = \sum_{i,j=1}^{3} \varphi_{ij} \psi_{ij}$ le produit scalaire (de Hilbert-Schmidt) entre φ et ψ, et $\|\varphi\| = ((\varphi,\varphi))^{1/2}$. Appelons champ de matrices toute application mesurable $\Phi : \mathbb{R}^3 \to M_{3\times 3}$. Un champ de matrices est dit de carré intégrable si $\int dx \, \|\Phi(x)\|^2 < \infty$. Dans la suite, si $x,y \in \mathbb{R}^3$, $A \in M_{3\times 3}$, on note $x \cdot y$ le produit scalaire entre x et y, $A \cdot x$ l'image de x par A et $x \cdot A \cdot y$ le produit scalaire de x et $A \cdot y$.

__Théorème B__ : Soit $\Phi : \mathbb{R}^3 \to M_{3\times 3}$ un champ de matrices de carré intégrable. Définissons, pour $n \in \mathbb{N}$: $D_n(\Phi,t) = n^{3/2} \int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \Phi(n(\beta_u - \beta'_s)) \cdot d\beta'_s$ $(t \geq 0)$. Alors :

1) le processus $(\beta_t, \beta'_t \; ; \; D_n(\Phi,t) \; ; \; t \geq 0)$ converge en loi, lorsque $n \to \infty$, vers :

$$(\beta_t, \beta'_t \; ; \; \mathbb{B}_{\alpha(0,t)}(\Phi) \; ; \; t \geq 0)$$

où $(\mathbb{B}_u(\Phi)\ ;\ u \geq 0, \Phi)$ *est un processus gaussien centré, indépendant de* (β,β') *et ayant pour covariance :*

$$E[\mathbb{B}_s(\Phi)\,\mathbb{B}_t(\Psi)] = (s\wedge t)\int dx\ \{(\Phi(x),\Psi(x))\}.$$

2) pour tout $p > 1$, *il existe une constante universelle* C_p *telle que :*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} E\Big[\sup_{s\leq t} |D_n(\Phi,s)|^{2p}\Big] \leq C_p(\int dx\ \|\Phi(x)\|^2)^p\ t^{p/2}.$$

<u>Commentaire B</u> : L'analogue du théorème B pour le mouvement brownien réel $(\beta_t, t\geq 0)$ est le suivant :

Soit $\Phi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonction borélienne, de carré intégrable.

1) le processus $(\beta_t\ ;\ n^{1/2}\int_0^t d\beta_u\ \Phi(n\ \beta_u)\ ;\ t\geq 0)$ converge en loi, lorsque $n\to\infty$, vers :

$$(\beta_t\ ;\ \mathbb{B}_{\ell_t^0}(\Phi)\ ;\ t\geq 0)\ ;$$

où (ℓ_t^0) est le temps local de β en 0 et $(\mathbb{B}_u(\Phi)\ ;\ u\geq 0, \Phi)$ est un processus gaussien, centré, indépendant de β, et ayant pour covariance

$$E[\mathbb{B}_s(\Phi)\,\mathbb{B}_t(\Psi)] = (s\wedge t)\int dx\ \Phi(x)\ \Psi(x)$$

2) pour tout $p > 1$, il existe une constante universelle C_p telle que

$$\sup_n E\Big[\sup_{s\leq t}|n^{1/2}\int_0^s d\beta_u\ \Phi(n\beta_u)|^{2p}\Big] \leq C_p(\int dx\ \Phi^2(x))^p\ t^{p/2}.$$

2. *<u>Réduction de la démonstration du théorème</u>* A_p *<u>à celle du théorème</u>* B.

Il s'agit, à l'instar de la méthode de Papanicolaou-Stroock-Varadhan [5] de ramener l'étude asymptotique des intégrales (de Riemann) doubles qui figurent dans l'énoncé du théorème A_p à celle d'intégrales stochastiques doubles.

(2.1) Pour faciliter la lecture, nous écrivons tout d'abord deux formules qui se déduisent de la formule d'Itô classique au moyen du théorème de Fubini :

(i) pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe C^2, on a :

$$\text{(2.a)}\quad \int_0^t ds(\varphi(\beta_t-\beta'_s)-\varphi(\beta_s-\beta'_s)) = \int_0^t d\beta_u\cdot\int_0^u ds\ \nabla\varphi(\beta_u-\beta'_s) + \frac{1}{2}\int_0^t du\int_0^u ds\ \Delta\varphi(\beta_u-\beta'_s)$$

(ii) Supposons maintenant que φ s'écrive sous la forme $\varphi = \Delta\psi$, avec ψ fonction de classe C^4. On a alors, à partir de la formule (2.a), la formule plus compliquée :

$$\frac{1}{2}\int_0^t ds\ (\Delta\psi(\beta_t-\beta'_s) - \Delta\psi(\beta_s-\beta'_s))$$

$$(2.b) \qquad = \int_0^t d\beta_u \cdot [\nabla\psi(\beta_u-\beta'_u) - \nabla\psi(\beta_u-\beta'_o) + \int_0^u \mathrm{Hess}(\psi)(\beta_u-\beta'_s)\cdot d\beta'_s]$$

$$+ \frac{1}{4}\int_0^t du \int_0^u ds\ \Delta^2\psi(\beta_u-\beta'_s).$$

Dans la suite, nous ferons largement référence à cette identité ; de façon à ne pas devoir la réécrire sous diverses formes, nous numérotons de ① à ⑥ les différents termes qui apparaissent en (2.b), que nous écrivons maintenant sous la forme abrégée, mais bien commode :

(2.b') ① + ② = ③ + ④ + ⑤ + ⑥.

(2.2) En fait, nous "appliquerons" la formule (2.b) à la fonction

$$\psi(x) = |x|^{2-p}, \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} < p < \frac{3}{2}.$$

Cette application peut être légitimée au moyen des arguments développés en [9], quitte à interpréter le terme ⑥ comme un multiple (universel) de $I_p(0,t)$.

Nous notons l'identité (2.b) ainsi obtenue $(2.b)_{p,0}$.

Changeons maintenant $(\beta'_s\ ;\ s \geq 0)$ en $(\beta'_s + y\ ;\ s \geq 0)$, et notons l'identité (2.b) ainsi obtenue $(2.b)_{p,y}$. Soustrayons membre à membre l'identité $(2.b)_{p,0}$ de $(2.b)_{p,\frac{y}{n}}$, et multiplions les deux membres de l'identité ainsi obtenue par $n^{\frac{3}{2}-p}$ ce qui, avec des notations évidentes, nous fournit l'identité :

$$n^{\frac{3}{2}-p}\left[(2.b)_{p,\frac{y}{n}} - (2.b)_{p,0}\right]$$

dont nous notons $①_n,\dots,⑥_n$ les termes de type ①,...,⑥ tels qu'ils ont été définis en (2.b').

Nous montrerons ci-dessous que, pour p,y fixés, on a :

$$(2.c) \qquad ①_n \xrightarrow{P} 0, \quad ②_n \xrightarrow{P} 0, \quad ③_n \xrightarrow{P} 0, \quad ④_n \xrightarrow{P} 0.$$

Ainsi, l'étude asymptotique de $⑥_n$, c'est-à-dire :

$$\{n^{\frac{3}{2}-p}(I_p(\tfrac{y}{n},t) - I_p(0,t))\,;\; y \in \mathbb{R}^3, t \geq 0\}$$

est ramenée à celle de ⑤$_n$, expression que nous écrivons sous la forme suivante, de façon à pouvoir appliquer immédiatement le théorème B :

$$\text{(2.d)} \qquad n^{\frac{3}{2}} \int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \Phi_y^{(p)}(n(\beta_u - \beta'_s)) \cdot d\beta'_s$$

où : $$\Phi_y^{(p)}(x) = \gamma_p(x-y) - \gamma_p(x)\ ;\ \gamma_p(x) = \frac{1}{|x|^p}\,\sigma_p(x)\ ;\ \sigma_p(x)_{ij} = \delta_{ij} - p\,\frac{x_i x_j}{|x|^2}$$

Le théorème A_p découle alors du théorème B et de la construction des mouvements browniens fractionnaires présentée en [11].

(2.3) Nous montrons maintenant les quatre convergences en probabilité (2.c). Auparavant, remarquons que si l'on note toujours $\psi(x) = |x|^{2-p}$, on a :

$$\nabla\psi(x) = (2-p)\,\frac{x}{|x|^p}\ ;\qquad \Delta\psi(x) = (2-p)(3-p)\,\frac{1}{|x|^p}\,.$$

Pour simplifier la discussion, nous commençons par supposer $\beta_0 \neq \beta'_0$ P-p.s.

(i) Montrons tout d'abord : ②$_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$.

β et β' étant indépendants, et vérifiant : $\beta_0 \neq \beta'_0$, il nous suffit de montrer que pour un mouvement brownien $(\delta_s, s \geq 0)$ issu de $\delta_0 \neq 0$, on a :

$$J_n(t,y) \stackrel{\text{déf}}{=} n^{\frac{3}{2}-p} \int_0^t ds \left| \frac{1}{|\delta_s - \frac{y}{n}|^p} - \frac{1}{|\delta_s|^p} \right| \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

Or, à l'aide de la formule des accroissements finis, et de la majoration :

$$|\nabla(\frac{1}{|\xi|^p})| \leq \frac{c}{|\xi|^{p+1}},$$

on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, J_n(t,y) \leq \lim_{n\to\infty} \left(n^{\frac{1}{2}-p}\,|y| \int_0^t \frac{ds}{|\delta_s|^{p+1}}\right) = 0.$$

La démonstration de : ①$_n \xrightarrow{P} 0$ est tout à fait semblable.

(ii) Pour montrer que ③$_n \xrightarrow{P} 0$, on peut remplacer la martingale locale qui constitue ③$_n$ par son processus croissant, et il s'agit donc de montrer avec les mêmes notations qu'en (i), que, si l'on note en outre $\theta_p(x) = \frac{x}{|x|^p}$, on a :

$$K_n(t,y) \overset{\text{def}}{=} n^{3-2p} \int_0^t ds\ |\theta_p(\delta_s - \tfrac{y}{n}) - \theta_p(\delta_s)|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

De même que précédemment, on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, K_n(t,y) \leq \lim_{n\to\infty} |y|^2\left(n^{1-2p} \int_0^t \frac{ds}{|\delta_s|^{2p}}\right) = 0.$$

La démonstration de : $④_n \xrightarrow{P} 0$ est tout à fait semblable.

(iii) Dans le cas où $\beta_o = \beta'_o$, nous allons montrer directement, avec les notations introduites en (i) et (ii), $(\delta_s, s \geq 0)$ désignant maintenant un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$, issu de 0, que les quantités

$$E[J_n(t,y)] \quad \text{et} \quad E[K_n(t,y)] \quad \text{convergent vers } 0 \text{ lorsque } n \to \infty.$$

On a, par scaling :

$E[J_n(t,y)] = n^{-1/2}\, E[J_1(tn^2,y)]$; $E[K_n(t,y)] = \frac{1}{n}\, E[K_1(tn^2,y)]$

Le problème est donc ramené à l'étude asymptotique, lorsque $t \to \infty$, de $E[J_1(t,y)]$ et $E[K_1(t,y)]$.

Or, à l'aide de la formule suivante, valable pour toute fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$, borélienne :

$$E\left[\int_0^t ds\ f(\delta_s)\right] = c \int \frac{dx}{|x|}\, f(x) \int_{|x|^2/t}^{\infty} e^{-w/2} \frac{dw}{\sqrt{w}},$$

on montre facilement que :

si $p > 1$, $E[J_1(\infty,y)] < \infty$ et $E[K_1(\infty,y)] < \infty$;

si $p = 1$, $E[J_1(t,y)] = 0(\log t)$; $E[K_1(t,y)] = 0(\log t)$;

si $p < 1$, $E[J_1(t,y)] = 0\left(t^{\frac{1}{2}(1-p)}\right)$; $E[K_1(t,y)] = 0(t^{1-p})$.

Ces estimations entraînent aisément le résultat cherché.

(2.4) La réduction que nous venons d'effectuer du théorème A, et plus généralement du théorème A_p, au théorème B, ne nous permet de conclure, en toute rigueur, qu'à la convergence en loi des marginales de rang fini des processus :

$$n^{\frac{3}{2}-p}\ (I_p(\tfrac{y}{n},t) - I_p(0,t))$$

lorsque $n \to \infty$ et que (y,t) décrit $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$.

Pour montrer la convergence en loi des processus continus en $(y,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$, il nous reste à vérifier les critères de tension, dérivés du lemme de continuité de Kolmogorov ou de celui, plus sophistiqué, de Garsia-Rodemich-Rumsey. Par souci de concision, nous ne considérons que le cas $p = 1$, et, parmi les processus qui figurent en ①$_n$, ②$_n$, ③$_n$, ④$_n$:

$$U_n(y,t) = n^{1/2} \int_0^t ds \left(\frac{1}{|\beta_s-\beta'_s-\frac{y}{n}|} - \frac{1}{|\beta_s-\beta'_s|}\right)$$

et

$$V_n(y,t) = n^{1/2} \int_0^t d\beta_u\cdot(\theta(\beta_u-\beta'_u-\tfrac{y}{n}) - \theta(\beta_u-\beta'_u)), \text{ où } \theta(\xi) = \theta_1(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|} .$$

En posant $\delta_u = \beta_u-\beta'_u$, on obtient, pour $k > 0$:

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |U_n(y,s) - U_n(z,s)|^p\Big] \leq n^{k/2}\, E\left[\left(\int_0^t du\left|\frac{1}{|\delta_u-\frac{y}{n}|} - \frac{1}{|\delta_u-\frac{z}{n}|}\right|\right)^k\right]$$

$$\leq \frac{|y-z|^k}{n^{k/2}}\, E\left[\left(\int_0^t \frac{du}{|\delta_u-\frac{y}{n}|\,|\delta_u-\frac{z}{n}|}\right)^k\right]$$

En utilisant la majoration : $\displaystyle \frac{2}{|a|\,|b|} \leq \frac{1}{|a|^2} + \frac{1}{|b|^2}$,

et l'estimation : $\displaystyle \sup_{t\geq 2} E\left[\left(\frac{1}{\log t}\int_0^t \frac{ds}{|B_s-1|^2}\right)^k\right] < \infty$ (voir, par exemple, Yor [10], lemme 2), il vient :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |U_n(y,s) - U_n(z,s)|^k\Big]$$

$$\leq C_k \frac{|y-z|^k}{n^{k/2}} \left(1 + \log n + \log^+\left(\frac{1}{|y|}\right) + \log^+\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)^k$$

$$\leq C_k\, |y-z|^k \left(1 + \log^+\left(\frac{1}{|y|}\right) + \log^+\left(\frac{1}{|z|}\right)\right)^k$$

Cette estimation étant valable pour tout $k > 0$, on déduit aisément du lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey (voir, par exemple, Barlow-Yor [1], p. 203) que la suite des lois des processus U_n est tendue.

On a, de même :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |V_n(y,s) - V_n(z,s)|^k\Big] \leq n^{k/2}\, E\Big[\Big(\int_0^t du\, |\theta(\delta_u - \tfrac{y}{n}) - \theta(\delta_u - \tfrac{z}{n})|^2\Big)^{k/2}\Big]$$

A l'aide de l'inégalité élémentaire : $\left|\frac{a}{|a|} - \frac{b}{|b|}\right| \leq \frac{2|a-b|}{|a|}$, on obtient :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |V_n(y,s) - V_n(z,s)|^k\Big] \leq \frac{|y-z|^k}{n^{k/2}}\, E\Big[\Big(\int_0^t \frac{du}{|\delta_u - \frac{y}{n}|^2}\Big)^{k/2}\Big].$$

On en déduit, de même que précédemment :

$$E\Big[\sup_{s\leq t} |V_n(y,s) - V_n(z,s)|^k\Big] \leq C\, |y-z|^k \Big(1 + \log^+ \frac{1}{|y|}\Big)^{k/2},$$

ce qui implique que la suite des lois des processus V_n est tendue.

3. *Démonstration du théorème B.*

(3.1) Préliminaires.

(i) L'indépendance de (β,β') et $\mathbb{B}$ reposera sur le résultat suivant :

$$(3.a) \qquad F_n(t) \overset{\text{def}}{=} n^{3/2} \int_0^t du \int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h \xrightarrow[n\to\infty]{L^2} 0$$

(Il suffirait de montrer la convergence en probabilité vers 0).

Pour démontrer (3.a), on peut raisonner composante par composante, et on peut donc supposer $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\int dx\,|\Phi(x)|^2 < \infty$.

Faisons, d'autre part, la majoration suivante, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(3.b) \qquad \left(\int_0^t du\, n^{3/2} \int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h\right)^2$$

$$\leq t \int_0^t du\, n^3\left(\int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h\right)^2.$$

L'espérance de l'expression qui figure en (3.b) est donc majorée par :

$$t\, E\left[\int_0^t du\, n^3 \int_0^u |\Phi|^2\ (n(\beta_u-\beta'_h))dh\right] = t \int dx|\Phi|^2(x)\ E[\alpha(\tfrac{x}{n},t)].$$

Or, on montre aisément (voir (3.2) ci-dessous, et plus généralement, (3.6), (i)) :

$$(3.c) \qquad \sup_{y\in\mathbb{R}^3} E[\alpha(y,t)] \leq C\sqrt{t}.$$

On a donc, finalement :

$$E[(F_n(t))^2] \leq C\, t^{3/2} \int dx\ |\Phi(x)|^2.$$

En conséquence de cette estimation a priori, on peut supposer $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ borélienne, bornée, à support compact.

Ecrivons maintenant $F_n(t)$ sous la forme d'une intégrale stochastique en $d\beta'_h$.

On a :

$$F_n(t) = \int_0^t \{n^{3/2} \int_h^t du\ \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\}\cdot d\beta'_h,$$

d'où :

$$E[(F_n(t))^2] = E\Big[n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_h^t dv \; \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta'_h))\Big]$$

$$= 2n^3 \; E\Big[\int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv \; \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta'_h))\Big].$$

Nous montrerons ci-dessous que, pour $f,g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ boréliennes, bornées, à support compact :

$$\text{(3.d)} \qquad n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv \; f(n(\beta_u-\beta'_h))g(n(\beta_v-\beta'_h)) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0,$$

ce qui implique a fortiori : $E[(F_n(t))^2] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire (3.a).

(ii) L'étape suivante dans la démonstration du théorème B consiste à montrer que le processus croissant de l'intégrale stochastique (réelle) :

$$n^{3/2} \int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h$$

qui est précisément :

$$n^3 \int_0^t du \; \Big|\int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h\Big|^2$$

a même limite en probabilité que :

$$n^3 \int_0^t du \int_0^u dh \; \|\Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\|^2.$$

[En effet, à l'aide de la formule de densité d'occupation, on voit facilement que cette dernière expression converge vers $\alpha(0,t) \int dx \; \|\Phi(x)\|^2$].

Pour étudier le comportement asymptotique de :

$$n^3 \int_0^t du \; \Big|\int_0^u \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot d\beta'_h\Big|^2,$$

on peut à nouveau supposer $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, borélienne, et satisfaisant :

$\int dx|\Phi(x)|^2 < \infty$.

Introduisons maintenant les notations :

$$M_u^{(n)}(x) = \int_0^u \Phi(n(x-\beta'_h))\cdot d\beta'_h, \qquad \tilde{M}_u^{(n)}(x) = n^{3/2}\, M_u^{(n)}(x),$$

et
$$N_u^{(n)}(x) = (\tilde{M}_u^{(n)}(x))^2 - \langle \tilde{M}_\bullet^{(n)}(x)\rangle_u .$$

Le processus croissant de $(\tilde{M}_u^{(n)}(x), u \geq 0)$ est :

$$\langle \tilde{M}_\bullet^{(n)}(x)\rangle_u = n^3 \int_0^u |\Phi(n(x-\beta'_h))|^2 dh,$$

et il nous suffira de démontrer :

$$\text{(3.e)} \qquad \int_0^t du\big((\tilde{M}_u^{(n)}(\beta_u))^2 - \langle \tilde{M}_\bullet^{(n)}(\beta_u)\rangle_u\big) \xrightarrow[n\to\infty]{L^1} 0.$$

Remarquons tout d'abord que la norme L^1 du membre de gauche de (3.e) est majorée par :

$$2E\Big[\int_0^t du(\tilde{M}_u^{(n)}(\beta_u))^2\Big] = 2E\Big[\int_0^t du\, n^3 \int_0^u dh\ |\Phi|^2(n(\beta_u-\beta'_h))\Big]$$
$$\leq C\, t^{1/2} \int dx\ |\Phi|^2(x),$$

comme on l'a vu en (i).

On peut donc, pour montrer (3.e), se restreindre au cas où $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est borélienne, bornée, à support compact.

Considérons maintenant :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\ N_u^{(n)}(\beta_u)\Big)^2\Big]$$

$$= 2E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv\ N_u^{(n)}(\beta_u)\ N_v^{(n)}(\beta_v)\Big]$$

$$= 2E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv\ N_u^{(n)}(\beta_u) N_u^{(n)}(\beta_v)\Big]$$

$$= 8n^6\, E\Big[\int_0^t du \int_u^t dv \int_0^u dh\ \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta'_h)) M_h^{(n)}(\beta_u) M_h^{(n)}(\beta_v)\Big].$$

En redistribuant les puissances de n, on se ramène à montrer la convergence vers 0 de l'espérance de :

$$G_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\ \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta'_h)) \tilde{M}_h^{(n)}(\beta_u)\tilde{M}_h^{(n)}(\beta_v),$$

soit : (3.f) $\quad E[G_n(t)] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

(3.2) Démonstration de (3.c).

Par définition de $\alpha(y,t)$, on a, pour toute fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+$ borélienne :

$$E\left[\int_0^t du \int_u^t dv\ f(\beta_u - \beta'_v)\right] = \int dy\ f(y)\ E[\alpha(y,t)]\ ;$$

d'où, en posant $p_s(y) = \dfrac{1}{(2\pi s)^{3/2}} \exp(-\dfrac{|y|^2}{2s})$, on a :

$$E[\alpha(y,t)] = \int_0^t du \int_u^t dv\ p_{u+v}(y) \leq \int_0^t du \int_0^t dv\ p_{u+v}(y).$$

En conséquence :

$$E[\alpha(y,t)] \leq \int_0^t du \int_u^{u+t} dv\ p_v(y) \leq \int_0^{2t} dv\ p_v(y) v \leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{2t} \frac{dv}{\sqrt{v}} = C\cdot\sqrt{t}.$$

(3.3) Démonstration de (3.d).

Il s'agit de montrer la convergence dans L^1 vers 0 de l'expression :

$$H_n(t) = n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\ f(n(\beta_u - \beta'_h))g(n(\beta_v - \beta'_h)).$$

En fait, nous montrerons, plus précisément, que :

$$n^2\ E[H_n(t)] \quad \text{converge vers une limite finie.}$$

Posons : $f_n(y) = n^3\ f(ny)$ et $p_u(x) = \dfrac{1}{(2\pi u)^{3/2}} \exp\left(-\dfrac{|x|^2}{2u}\right)$.

On a :

$$E[H_n(t)]$$

$$= E\left[\int_0^t du \int_u^t dv \int_0^u dh \int dx\ p_h(x)\ f_n(\beta_u + x)\ g(n(\beta_v + x))\right]$$

$$= E\left[\int_0^t du \int_u^t dv \int dy \int_0^u dh\ p_h(y - \beta_u)\ f_n(y) g(n(\beta_v - \beta_u) + ny)\right]$$

$$= E\left[\int_0^t du \int_u^t dv \int dy \int_0^u dh\ p_h(\frac{y}{n} - \beta_u)\ f(y)\ g(n(\beta_v - \beta_u) + y)\right]$$

$$= \int dy\ f(y) \int dx \int_0^t du\ p_u(x) \int_0^u dh\ p_h(\tfrac{y}{n} - x) \int dz \int_0^{t-u} dv\ p_v(z)\ g(nz+y).$$

Or, pour tout $x \neq 0$, on a : $\int_0^u dh\ p_h(\frac{y}{n} - x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^u dh\ p_h(x)$

de sorte que l'intégrale en (dx) converge vers :

$$\frac{1}{2} \int dx \left(\int_0^t du\ p_u(x)\right)^2$$

(il est facile de montrer que cette quantité est finie).

Considérons maintenant l'intégrale en (dz) que nous multiplions par n^2, soit :

$$n^2 \int dz \int_0^{t-u} dv\ p_v(z)\ g(nz+y) = \frac{1}{n} \int d\xi \int_0^{t-u} dv\ p_v(\tfrac{\xi}{n})\ g(\xi+y).$$

Or, on a :

$$\frac{1}{n}\int_0^t dv\ p_v(\tfrac{\xi}{n}) = \frac{1}{n}\int_0^t \frac{dv}{(2\pi v)^{3/2}} \exp\left(- \frac{|\xi|^2}{2(n^2 v)}\right) = \int_0^{tn^2} \frac{dw}{(2\pi w)^{3/2}} \exp\left(- \frac{|\xi|^2}{2w}\right).$$

Cette expression converge, lorsque $n \to \infty$, vers :

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(2\pi w)^{3/2}} \exp\left(- \frac{|\xi|^2}{2w}\right) = \frac{1}{|\xi|} \int_0^\infty \frac{du}{(2\pi u)^{3/2}} \exp(-1/_{2u}) = \frac{1}{2\pi|\xi|}$$

Finalement, on a montré :

$$n^2\ E[H_n(t)] \xrightarrow[n\to\infty]{} \{\frac{1}{2} \int dx \int_0^t du\ p_u(x)\ ^2\} \int dy\ f(y) \int \frac{d\xi}{2\pi|\xi|}\ g(\xi+y).$$

Les remarques suivantes permettent de mieux comprendre le résultat précédent.
En conséquence de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien β, la variable $H_n(t)$ a même espérance que :

$$\tilde{H}_n(t) = n^3 \int_0^t dh \int_h^t du \int_0^{t-u} dv\ f(n(\beta_u - \beta'_h))g(n(\beta''_v + \beta_u - \beta'_h))$$

où β'' est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de 0, indépendant de β et β'.
En utilisant maintenant, d'une part la propriété de scaling pour le mouvement brownien β'', et d'autre part la formule de densité d'occupation qui fait intervenir les temps locaux d'intersection $(\alpha(y\ ;\ dh\ du)\ ;\ y \in \mathbb{R}^3)$ de (β,β'), on obtient :

$$n^2\ \tilde{H}_n(t) \overset{(d)}{=} \int dy\ f(y) \int_{h\le u\le t} \alpha(\tfrac{y}{n}\ ;\ dh\ du) \int_0^{n^2(t-u)} dv\ g(\beta''_v+y),$$

d'où l'on déduit aisément le résultat de convergence en loi :

$$n^2\ \tilde{H}_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \int dy\ f(y) \int_0^\infty dv\ g(\beta''_v+y)\quad \alpha(0;t).$$

Compte-tenu de ce résultat, il est maintenant naturel de se demander si la suite des processus : $(n^2\ H_n(t)\ ;\ t \ge 0)$ converge en loi lorsque $n \to \infty$.
Nous ne savons pas répondre à cette question.

(3.4) Démonstration de (3.f).

Nous ne donnons que les principales étapes de la démonstration, inspirée fortement des arguments de la partie b) du paragraphe (3.3) ci-dessus.

a) Introduisons la fonction de 3 variables :

$$\gamma_h^{(n)}(x,y;z) = E[\tilde{M}_h^{(n)}(x)\ \tilde{M}_h^{(n)}(y)\,|\,\beta'_h=z]$$

et remarquons que l'on a :

$$(3.g)\qquad |\gamma_h^{(n)}(x,y;z)| \le \delta_h^{(n)}(x;z)\ \delta_h^{(n)}(y;z)$$

où l'on note, pour $\xi \in \mathbb{R}^3$: $\delta_h^{(n)}(\xi;z) = E[(\tilde{M}_h^{(n)}(\xi))^2\,|\,\beta'_h=z]^{1/2}$.
On a alors :

$$E[G_n(t)] = n^3\ E\Big[\int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv\ \Phi(n(\beta_u-\beta'_h))\cdot\Phi(n(\beta_v-\beta'_h))\ \gamma_h^{(n)}(\beta_u,\beta_v\ ;\ \beta'_h)\Big].$$

D'après (3.g), la valeur absolue de l'expression qui figure dans la dernière espérance écrite est majorée par :

$$\int_0^t dh \int_h^t du \int_u^t dv |\Phi| (n(\beta_u - \beta'_h)) \ |\Phi| (n(\beta_v - \beta'_h)) \delta_h^{(n)} (\beta_u ; \beta'_h) \delta_h^{(n)} (\beta_v ; \beta'_h) .$$

En conséquence de l'indépendance des accroissements du mouvement brownien β, cette expression a même espérance que :

$$\int_0^t dh \int_h^t du \int_0^{t-u} dv \ |\Phi| (n(\beta_u - \beta'_h)) |\Phi| (n(\beta''_v + \beta_u - \beta'_h)) \ \delta_h^{(n)} (\beta_u ; \beta'_h) \ \delta_h^{(n)} (\beta''_v + \beta_u ; \beta'_h)$$

où β'' désigne un troisième mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, indépendant de β et β'.

En utilisant maintenant, d'une part la propriété de scaling pour le mouvement brownien β'', et d'autre part la formule de densité d'occupation qui fait intervenir les temps locaux d'intersection $(\alpha(y;dh\ du) \ ; \ y \in \mathbb{R}^3)$ de (β,β'), on obtient :

$$E[G_n(t)] \leq \int dx |\Phi| (x) \ E\Big[\int_{h\leq u\leq t} \alpha(\tfrac{x}{n} ; dh\ du) \int_0^{(t-u)n^2} \frac{dw}{n^2} \ |\Phi| (x+\beta''_w) \ ..$$

$$.. \ \delta_h^{(n)} (\tfrac{x}{n} + \beta'_h \ ; \beta'_h) \delta_h^{(n)} \ (\frac{x+\beta''_w}{n} + \beta'_h \ ; \ \beta'_h)\Big] .$$

En remplaçant $(t-u)n^2$ par ∞ comme borne de l'intégrale en dw, et en explicitant la valeur du potentiel en β'' ainsi obtenu, il vient :

$$E[G_n(t)] \leq \int dx \ |\Phi| (x) \int \frac{dy}{2\pi |y|} \ |\Phi| (x+y) \ ..$$

$$.. \ E\Big[\int_{h\leq u\leq t} \alpha(\tfrac{x}{n} ; dh\ du) \ \frac{1}{n^2} \ \delta_h^{(n)} (\tfrac{x}{n} + \beta'_h ; \beta'_h) \delta_h^{(n)} (\tfrac{x+y}{n} + \beta'_h ; \beta'_h)\Big]$$

b) Pour simplifier la discussion, nous considérons simplement :

$$(\tfrac{1}{n} \ \delta_h^{(n)} (\beta'_h ; \beta'_h))^2 \quad \text{au lieu de :} \quad \frac{1}{n^2} \ \delta_h^{(n)} (\tfrac{x}{n} + \beta'_h ; \beta'_h) \delta_h^{(n)} (\tfrac{x+y}{n} + \beta'_h ; \beta'_h) .$$

Nous allons montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$\text{(3.h)} \qquad (\tfrac{1}{n} \ \delta_h^{(n)} (x,x))^2 = O(\tfrac{1}{n})$$

estimation dont on peut déduire, à l'aide des majorations faites en a), que :

$$E[G_n(t)] = O(\tfrac{1}{n}) .$$

c) Pour montrer (3.h), nous utilisons le grossissement de la filtration naturelle de $(\beta'_u\ ;\ u \geq 0)$ par la variable β'_h.

De façon à simplifier les notations, nous remplaçons partout, dans ce sous-paragraphe c), la notation $(\beta'_u, u \geq 0)$ par $(B_u, u \geq 0)$.

Rappelons que la décomposition canonique de $(B_u, u \geq 0)$ dans sa filtration naturelle grossie avec la variable B_h est :

$$B_u = \tilde{B}_u + \int_0^{u\wedge h} ds \frac{B_h - B_s}{h-s} ,$$

où $(\tilde{B}_u, u \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de la variable B_h.

En conséquence de cette décomposition, on a :

$$\left(\frac{1}{n} \delta_h^{(n)}(x,x)\right)^2 \leq 2\{a_h(x,n) + b_h(x,n)\},$$

où :

$$a_h(x,n) = n\, E\left[\int_0^h ds\ |\Phi|^2(n(x-B_s))\,|B_h=x\right]$$

et

$$b_h(x,n) = n\, E\left[\left(\int_0^h ds\ \ |\Phi|\,(n(x-B_s))\ \frac{|B_h-B_s|}{h-s}\right)^2 |B_h=x\right].$$

En retournant le mouvement brownien B au temps h, on obtient les égalités :

$$a_h(x,n) = n\, E\left[\int_0^h ds\ |\Phi|^2(nB_s)\,|B_h=x\right]$$

et

$$b_h(x,n) = n\, E\left[\left(\int_0^h ds\ |\Phi|\,(nB_s)\ \frac{|B_s|}{s}\ \right)^2 |B_h=x\right].$$

On a maintenant, par scaling :

$$a_h(x,n) = \frac{1}{n}\, E\left[\int_0^{hn^2} ds\ \ |\Phi|^2(B_s)\,|B_{hn^2} = xn\right]$$

et

$$b_h(x,n) = \frac{1}{n}\, E\left[\left(\int_0^{hn^2} ds\ |\Phi|\,(B_s)\ \frac{|B_s|}{s}\right)^2 |B_{hn^2} = xn\right].$$

Le résultat (3.h) découle alors de ce que, si l'on note :

$$C_t = \int_0^t ds\ |\Phi|^2(B_s) \quad \text{et} \quad D_t = \int_0^t ds\ |\Phi|(B_s)\ \frac{|B_s|}{s},$$

on a :

(3.i) $$E[C_t | B_t = x\sqrt{t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} E[C_\infty] \ (<\infty)$$

et

(3.j) $$E[D_t^2 | B_t = x\sqrt{t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} E[D_\infty^2] \ (<\infty).$$

La démonstration, aisée mais un peu fastidieuse, de ces deux points est laissée au lecteur. Vérifions simplement que la variable D_∞, associée à un mouvement brownien B issu de 0, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, pour d entier quelconque, appartient à tous les L^p $(p<\infty)$.

Φ étant bornée et à support compact, on peut remplacer $|\Phi|(B_s)$ par $1_{(|B_s|\leq 1)}$ (pour simplifier). On a alors :

$$\|D_\infty\|_p \leq \int_0^\infty \frac{ds}{s}\ \| |B_s|\ 1_{(|B_s|\leq 1)}\|_p \leq \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}}\ \| |B_1|\ 1_{(|B_1|\leq \frac{1}{\sqrt{s}})}\|_p.$$

Or, quand $\varepsilon \to 0$, on a l'estimation :

$$E\left[|B_1|^p\ 1_{(|B_1|\leq\varepsilon)}\right] \leq c_1 \int_0^\varepsilon \rho^{p+d-1}\, d\rho \leq c_2\ \varepsilon^{d+p}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes universelles.

On a donc :

$$\| |B_1|\ 1_{(|B_1|\leq\frac{1}{\sqrt{s}})}\|_p = O\left(s^{-\frac{1}{2}(1+\frac{d}{p})}\right) \qquad (s\to\infty)$$

d'où l'on déduit : $\|D_\infty\|_p < \infty$.

<u>(3.5) Démonstration de la seconde partie du théorème B.</u>

$\Phi^{(n)}(x) \overset{\text{def}}{=} n^{3/2}\ \Phi(nx)$ satisfaisant : $\int dx\, \|\Phi^{(n)}(x)\|^2 = \int dx\, \|\Phi(x)\|^2$, il suffit de montrer la majoration cherchée pour $n=1$.

On a, d'après les inégalités de Burkholder-Davis-Gundy :

$$E\left[\sup_{s\leq t} |D_1(\Phi, s)|^{2p}\right] \leq C_p\ E\left[\left(\int_0^t du\ \left|\int_0^u \Phi(\beta_u-\beta'_s)\cdot d\beta'_s\right|^2\right)^p\right].$$

En développant l'intégrand en du, on se ramène à majorer les expressions :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\big(\int_0^u f(\beta_u-\beta'_s)d\gamma_s\big)^2\Big)^p\Big],$$

où (γ_s) désigne une composante du mouvement brownien (β'_s), et $f(\cdot)$ une composante du champ de matrices $\Phi(\cdot)$.

Pour simplifier l'écriture, notons :

$$h(u,s) = f(\beta_u-\beta'_s) \quad \text{et} \quad H(u) = \int_0^u h(u,s)d\gamma_s$$

Introduisons encore $(\varphi_k(\cdot)\ ;\ k = 1,2,\dots)$ base orthonormée de $L^2([0,t],du)$.
On a alors :

$$\int_0^t du\, H(u)^2 = \Sigma_k\Big(\int_0^t du\, \varphi_k(u)H(u)\Big)^2 = \Sigma_k\Big(\int_0^t \big(\int_s^t du\, \varphi_k(u)\, h(u,s)\big)d\gamma_s\Big)^2.$$

A l'aide de l'extension des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy aux suites de martingales, on a :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\, H^2(u)\Big)^p\Big] \le C_p\, E\Big[\Big(\Sigma_k \int_0^t ds\, \big(\int_s^t du\, \varphi_k(u)\, h(u,s)\big)^2\Big)^p\Big]$$

(φ_k) étant une base orthonormée de $L^2[0,t]$, on a :

$$\Sigma_k\Big(\int_s^t du\, \varphi_k(u)h(u,s)\Big)^2 = \int_s^t du\, h^2(u,s)$$

et donc :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du\, H^2(u)\Big)^p\Big] \le C_p\, E\Big[\Big(\int_0^t du \int_0^u ds\, h^2(u,s)\Big)^p\Big].$$

Appliquons maintenant la formule de densité d'occupation. Il vient :

$$\int_0^t du \int_0^u ds\, h^2(u,s) = \int dx\, f^2(x)\, \alpha(x,t) = \Big(\int dx\, f^2(x)\Big)\int d\mu(x)\, \alpha(x,t)$$

où $d\mu(x) = \dfrac{dx\, f^2(x)}{\int dx\, f^2(x)}$ est une probabilité sur $\mathbb{R}^3$.

On déduit alors de l'inégalité de Hölder que :

$$E\Big[\Big(\int_0^t du \int_0^u ds\, h^2(u,s)\Big)^p\Big] \le \Big(\int dx\, f^2(x)\Big)^p \sup_x E[\alpha(x,t)^p].$$

Nous montrons ci-dessous l'inégalité

(3.k) $\quad \sup_x E[\alpha(x,t)^p] \le C_p\, t^{p/2}$

ce qui termine la démonstration de la seconde partie du théorème B.

(3.6) Régularité et intégrabilité des temps locaux d'intersection.

Ce sous-paragraphe est consacré, d'une part à la démonstration de (3.k), d'autre part à celle de (1.b), les deux démonstrations s'appuyant pour l'essentiel sur la formule de Tanaka-Rosen $(2.b)_{1,x}$, x décrivant $\mathbb{R}^3$.

(i) Pour montrer (3.k), il nous suffit de prouver que les terme $①_x,\dots,⑤_x$ qui figurent en $(2.b)_{1,x}$ sont bornés dans L^p, uniformément en x, par $C_p t^{1/2}$.
En ce qui concerne les termes $①_x$ et $②_x$, cette propriété découle de :

$$(3.\ell)\qquad \sup_x E\Big[\Big(\int_0^t \frac{ds}{|\delta_s-x|}\Big)^p\Big] \leq C_p t^{p/2},$$

où $(\delta_s, s \geq 0)$ est un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de 0.
L'estimation $(3.\ell)$ est une conséquence immédiate de la formule d'Itô suivante :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^3,\quad |\delta_t-x| - |x| = \varepsilon_t + \int_0^t \frac{ds}{|\delta_s-x|}$$

avec $(\varepsilon_t, t \geq 0)$ mouvement brownien réel.
La majoration dans L^p, uniformément en x, des termes $③_x$ et $④_x$, par $C_p t^{1/2}$ découle immédiatement des inégalités de Burkholder-Gundy, les intégrands qui figurent dans les intégrales stochastiques étant uniformément bornés.
Il reste finalement à estimer $⑤_x$, c'est-à-dire à montrer, avec les notations qui suivent (2.d), l'inégalité :

$$(3.m)\qquad \sup_x E\Big[\Big|\int_0^t d\beta_u \cdot \int_0^u \gamma_1(\beta_u-\beta'_s-x)\cdot d\beta'_s\Big|^p\Big] \leq C_p\, t^{p/2}.$$

A l'aide des inégalités de Burkholder-Gundy et de l'inégalité de Hölder, on se ramène à montrer :

$$(3.m')\qquad \sup_x \frac{1}{t}\int_0^t du\, E\Big[\Big(\int_0^u \frac{ds}{|\beta_u-\beta'_s-x|^2}\Big)^{p/2}\Big] \leq C_p.$$

Or, on montre sans difficulté :

$$E\Big[\Big(\int_0^t \frac{ds}{|\beta'_s-1|^2}\Big)^p\Big] \leq C_p(1 + \log^+ t)^{p/2}$$

ce qui entraîne, par scaling, que le membre de gauche de (3.m') peut être majoré par :

$$C_p\left(1 + \sup_y E\left[(\log^+ \frac{1}{|\beta_1-y|})^{p/2}\right]\right) \leq C_p\left(1 + \int_{|\xi|\leq 1} d\xi (\log \frac{1}{|\xi|})^{p/2}\right) < \infty.$$

Remarque : J.F. Le Gall (communication personnelle) nous a indiqué que l'on peut montrer, à l'aide des calculs de moments faits en [4], p. 478, que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, et tout p entier, on a :

$$E[\alpha(x,t)^p] \leq E[\alpha(0,t)^p] \quad (< \infty),$$

ce qui entraîne a fortiori (3.k), par scaling.

(ii) Pour démontrer (1.b), nous nous appuyons de façon essentielle sur la formule de Tanaka-Rosen $(2.b)_{1,x} - (2.b)_{1,y}$, prise au temps s, x et y satisfaisant : $|x|, |y| \leq N$.

Le terme (5) qui figure dans cette formule est, avec les notations du théorème B,

$$D_1(\Phi_{x,y},s), \quad \text{où} \quad \Phi_{x,y}(\xi) = \Phi_x^{(1)}(\xi) - \Phi_y^{(1)}(\xi).$$

On a, d'après la seconde partie du théorème B, et les calculs faits en [11] :

$$\begin{aligned} E\left[\sup_{s\leq t} |D_1(\Phi_{x,y},s)|^p\right] &\leq C_p(\int d\xi \, \|\Phi_{x,y}(\xi)\|^2)^{p/2} \, t^{p/4} \\ \text{(3.n)} \qquad &\leq C_p \, |x-y|^{p/2} \, t^{p/4}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, les estimations de tension faites en (2.4) nous donnent, pour les termes de type (1), (2), (3), (4), des majorations du genre suivant :

$$\text{(3.o)} \quad E\left[\sup_{s\leq t} |U(x,s)-U(y,s)|^p\right] \leq C_p(t)\,|x-y|^p(1 + \log^+(\frac{1}{|x|}) + \log^+(\frac{1}{|y|}))^p.$$

On déduit finalement (1.b) des estimations (3.n) et (3.o) et du lemme de Garsia-Rodemich-Rumsey (voir, par exemple, [1], p. 203).

REFERENCES :

[1] M.T. BARLOW, M. YOR : Semimartingale inequalities via the Garsia-Rodemich Rumsey lemma and applications to local times. Journal Funct. Anal. 49, 198-229, 1982.

[2] D. GEMAN, J. HOROWITZ, J. ROSEN : A local time analysis of intersections of Brownian paths in the plane. Annals of Proba. 12, 86-107, 1984.

[3] F.B. KNIGHT : Random Walks and the sojourn density process of Brownian motion.
Trans. Amer. Math. Soc. 109, 56-86, 1963.

[4] J.F. LE GALL : Propriétés d'intersection des marches aléatoires.
I. Convergence vers le temps local d'intersection.
Comm. Math. Physics. 104, 471-507, 1986.

[5] G. PAPANICOLAOU, D.W. STROOCK, S.R.S. VARADHAN : Martingale approach to some limit theorems.
Duke Univ. Maths. Series III, Statistical Mechanics and Dynamical Systems, 1977.

[6] D.B. RAY : Sojourn times of diffusion processes.
Illinois J. Maths. 7, 615-630, 1963.

[7] J. ROSEN : A local time approach to the self-intersections of Brownian paths in space.
Comm. Maths. Phys. 88, 327-338, 1983.

[8] M. YOR : Le drap brownien comme limite en loi de temps locaux linéaires.
Séminaire de Probabilités XVII. Lect. Notes in Maths 986. Springer (1983).

[9] M. YOR : Compléments aux formules de Tanaka-Rosen.
Séminaire de Probabilités XIX. Lect. Notes in Maths 1123.
p. 332-349. Springer (1985).

[10] M. YOR : Renormalisation et convergence en loi pour les temps locaux d'intersection du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^3$. Séminaire de Probabilités XIX. Lect. Notes in Maths 1123, p. 350-365. Springer (1985).

[11] M. YOR : Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires.
Article précédent dans ce volume.