

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

## **Remarques sur certaines constructions des mouvements browniens fractionnaires**

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 22 (1988), p. 217-224

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1988\\_\\_22\\_\\_217\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__217_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

REMARQUES SUR CERTAINES CONSTRUCTIONS DES MOUVEMENTS  
BROWNIENS FRACTIONNAIRES.

Marc YOR<sup>(\*)</sup>

En préparation de l'article suivant (Weinryb-Yor [ 5 ]) dans ce volume, on présente en détail quelques réalisations des mouvements browniens fractionnaires indexés par  $\mathbb{R}^d$ , et les liens qui existent entre ces réalisations, en mettant l'accent sur la réalisation particulière qui apparaît dans les théorèmes de limite centrale obtenus en [ 5 ].

1. Définition des mouvements browniens fractionnaires.

Pour tout entier  $d \geq 1$ , et tout réel  $\gamma$  tel que :  $0 < \gamma \leq 2$ , il existe un processus gaussien  $(X_x ; x \in \mathbb{R}^d)$  à valeurs réelles, centré, tel que :

$$(1) \quad X_0 = 0 \text{ et } E[(X_x - X_y)^2] = |x-y|^\gamma \quad (x, y \in \mathbb{R}^d)$$

Kahane ([ 2 ], chapter 18) étudie ces processus de manière approfondie.

Paul Lévy a étudié le cas  $\gamma = 1$  ;  $(X_x, x \in \mathbb{R}^d)$  est alors appelé mouvement brownien (de Lévy) à  $d$  paramètres. Schoenberg [ 4 ] a montré l'existence d'un processus gaussien vérifiant (1) dans le cas général :  $0 < \gamma \leq 2$ .

B. Mandelbrot a proposé le nom de mouvement brownien fractionnaire pour le cas général. En conséquence, nous désignerons simplement par l'abréviation BF(d, $\gamma$ ) tout processus gaussien réel centré satisfaisant (1).

Le cas  $\gamma = 2$  n'est pas intéressant car le processus  $X_x$  peut alors être réalisé au moyen d'une variable gaussienne  $N$  centrée réduite à valeurs dans  $\mathbb{P}^d$  par la formule :

$$X_x = x \cdot N$$

(pour  $x, y \in \mathbb{R}^d$ ,  $x \cdot y$  désigne le produit scalaire euclidien ; plus loin, nous utiliserons la notation  $A \cdot x$  pour désigner l'image du vecteur  $x \in \mathbb{R}^d$  par la matrice  $A$ ).

Nous montrons ci-dessous comment construire le processus BF(d, $\gamma$ ) pour tout entier  $d \geq 1$ , et tout réel  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < 2$  à partir d'une mesure gaussienne définie sur les champs de matrices  $d \times d$ .

---

(\*) UNIVERSITE PARIS VI - Laboratoire de Probabilités - 4, place Jussieu -  
Tour 56 - 3ème Etage - 75252 PARIS CEDEX 05

## 2. Préliminaires.

On munit l'espace des matrices réelles  $d \times d$  du produit scalaire de Hilbert-Schmidt :  $((\varphi, \psi)) = \sum_{i,j} \varphi_{ij} \psi_{ij}$  et de la norme associée :  $\|\varphi\| = ((\varphi, \varphi))^{1/2}$ .

Dans la suite, on appelle champ de matrices  $d \times d$  toute application mesurable  $\Phi : x \rightarrow \Phi(x)$  à valeurs dans les matrices  $d \times d$ .

Un champ de matrices  $d \times d$  est dit de carré intégrable s'il satisfait :

$$(2) \quad \int dx \|\Phi(x)\|^2 < \infty.$$

Soit maintenant  $B$  mesure gaussienne définie sur les champs de matrices  $d \times d$  de carré intégrable et admettant pour covariance :

$$(3) \quad E[B(\Phi) B(\Psi)] = \int dx ((\Phi(x), \Psi(x))).$$

A l'évidence, une telle mesure gaussienne  $B(\Phi)$  peut être construite à l'aide de  $d^2$  mesures gaussiennes indépendantes  $(B_{ij}(\Phi_{ij}) ; 1 \leq i, j \leq d)$  ayant chacune pour intensité la mesure de Lebesgue, au moyen de la formule :  $B(\Phi) = \sum_{i,j} B_{i,j}(\Phi_{i,j})$ .

Considérons maintenant, pour tout  $p > 0$ , le champ de matrices

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{|x|^p} \sigma_p(x) \quad \text{où :} \quad \sigma_p(x)_{i,j} = \delta_{i,j} - p \frac{x_i x_j}{|x|^2}.$$

La matrice  $\gamma_p(x)$  apparaît de façon naturelle dans de nombreux calculs

(voir, par exemple, Krylov [3], Yor [6], et surtout, en théorie de la turbulence), car elle satisfait :

$$\gamma_p(x) = \nabla_x \left( \frac{x}{|x|^p} \right).$$

Les propriétés du champ  $\sigma_p$  présentées dans le Lemme jouent un rôle crucial dans la suite.

Lemme 1 : 1) Pour tout  $x \neq 0$ , la matrice  $\sigma_p(x)$  est caractérisée par les deux propriétés :

$$\sigma_p(x) \cdot x = (1-p)x ; \quad \sigma_p(x) \cdot y = y, \quad \text{si } x \cdot y = 0.$$

2) Pour toute transformation orthogonale  $T$  de  $\mathbb{R}^d$ , on a :

$$T^* \sigma_p(Tx)T = \sigma_p(x).$$

### 3. Énoncé et démonstration du théorème.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le

Théorème : Posons, pour tout  $y \in \mathbb{R}^d$  :  $\Phi_y^p(x) = \gamma_p(x-y) - \gamma_p(x)$ . Alors :

1) Pour tout  $y \neq 0$ , le champ de matrices  $\Phi_y^p$  est de carré intégrable dès que :

$$(4) \quad \frac{d}{2} - 1 < p < \frac{d}{2}.$$

2) Si la condition (4) est satisfaite, le processus gaussien

$$(B(\Phi_y^p)) ; y \in \mathbb{R}^d$$

est, à une constante multiplicative près, un processus  $BF(d, d-2p)$ .

Remarque : La condition (4) équivaut à :

$$0 < d-2p < 2.$$

Nous avons donc obtenu une réalisation du processus  $BF(d, \gamma)$  pour tout  $\gamma$  tel que  $0 < \gamma < 2$ .

Démonstration : 1) Le champ de matrices  $\Phi_y^p$  est de carré intégrable si, et seulement si, pour tous  $i, j \in \{1, 2, \dots, d\}$ , on a :

$$(5) \quad \int dx (\Phi_y^p(x)_{i,j})^2 < \infty.$$

En particulier, pour  $i = j$ , la condition (5) est réalisée dès que :

$$(6) \quad \int dx \left( \frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p} \right)^2 < \infty.$$

Cette intégrale est finie au voisinage de 0 et de  $y$  si, et seulement si :

$$2p - (d-1) < 1, \text{ c'est-à-dire : } p < \frac{d}{2}.$$

Elle est finie au voisinage de l'infini dès que :

$$2(p+1) - (d-1) > 1, \text{ c'est-à-dire : } p > \frac{d}{2} - 1.$$

Pour voir cela, on utilise le théorème des accroissements finis sur  $\mathbb{R}_+$  avec :

$$\frac{1}{u^p} - \frac{1}{v^p} = (u-v) \frac{1}{\theta^{p+1}}, \quad \text{où : } u < \theta < v.$$

Il nous reste maintenant à montrer que, sous la condition (4), on a :

$$\int dx (\Phi_y^p(x)_{i,j})^2 < \infty \quad \text{pour } i \neq j.$$

Posons  $\theta_{ij}(x) = \frac{x_i \cdot x_j}{|x|^2}$ . Il s'agit d'estimer la finitude de :

$$(7) \quad \int dx \left( \frac{1}{|x-y|^p} \theta_{ij}(x-y) - \frac{1}{|x|^p} \theta_{ij}(x) \right)^2 \\ \leq 2 \int dx \left( \frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p} \right)^2 + 2 \int \frac{dx}{|x|^{2p}} (\theta_{ij}(x-y) - \theta_{ij}(x))^2.$$

La première intégrale figurant en (7) est finie ; d'autre part, on a :

$$\theta_{ij}(x-y) - \theta_{ij}(x) = -y \cdot \nabla \theta_{ij}(\xi)$$

pour un point  $\xi$  appartenant au segment  $[x-y, x]$ , et il est facile de montrer que :

$$|\nabla \theta_{ij}(\xi)|^2 \leq \frac{C}{|\xi|^2}.$$

De cette majoration et de l'hypothèse  $p > \frac{d}{2} - 1$ , on déduit la finitude de la seconde intégrale qui figure en (7).

2) Pour démontrer la seconde assertion du théorème, il nous suffit de calculer, pour  $y, z \in \mathbb{R}^d$  :

$$E[(B(\Phi_y^p) - B(\Phi_z^p))^2] = \int dx \|\Phi_y^p(x) - \Phi_z^p(x)\|^2 \\ = \int dx \|\gamma_p(x-y) - \gamma_p(x-z)\|^2 = \int dx \|\gamma_p(x-(y-z)) - \gamma_p(x)\|^2.$$

Le problème est donc ramené à démontrer que la fonction

$$\varphi_p(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int dx \|\gamma_p(x-\xi) - \gamma_p(x)\|^2$$

satisfait : (8)  $\varphi_p(\xi) = c_{p,d} |\xi|^{d-2p}$ , pour une certaine constante  $c_{p,d}$ .

Pour cela, il nous suffit de remarquer que :

- d'une part, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , et tout  $\lambda > 0$ ,  $\varphi_p(\lambda\xi) = \lambda^{d-2p} \varphi_p(\xi)$  ;

- d'autre part,  $\varphi_p$  est une fonction radiale, ce qui équivaut à montrer que pour toute transformation orthogonale  $T$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$\varphi_p(T\xi) = \varphi_p(\xi).$$

Cette propriété découle aisément de la seconde assertion du lemme 1.

#### 4. Commentaires.

(4.1) Les raisonnements que nous avons faits ci-dessus avec le champ de matrices

$$\gamma_p(x) = \frac{1}{|x|^p} \sigma_p(x)$$

sont également valables avec la famille de champs indexée par les 2 paramètres  $p, \nu$  pour tout  $\nu \in \mathbb{R}$  :

$$\gamma_{p,\nu}(x) = \frac{1}{|x|^p} \sigma_\nu(x).$$

Ainsi, si l'on pose :  $\phi_y^{p,\nu}(x) = \gamma_{p,\nu}(x-y) - \gamma_{p,\nu}(x)$ ,

le processus gaussien :  $X_y^\nu \stackrel{\text{def}}{=} B(\phi_y^{p,\nu})$

est un multiple du processus  $BF(d, d-2p)$ .

Remarquons maintenant que l'on a :

$$\phi_y^{p,\nu}(x) = \phi_y^{p,0}(x) - \nu \psi_y^p(x)$$

où :

$$\psi_y^p(x)_{i,j} = \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x-y|^{p+2}} - \frac{x_i x_j}{|x|^{p+2}}.$$

Posons :  $X_y = B(\phi_y^{p,0})$  et  $Y_y = B(\psi_y^p)$ .

On a :  $X_y^\nu = X_y - \nu Y_y$ .

Pour décrire la loi conjointe des processus  $(X^\nu, \nu \in \mathbb{R})$ , il suffit donc de connaître la loi du couple  $(X, Y)$ .

Or, on a :

$$\begin{aligned}
 E[X_y Y_z] &= \int dx ((\phi_y^{p,0}(x), \psi_z^p(x))) \\
 &= \int dx \sum_{i=1}^d \left( \frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p} \right) \left( \frac{(x_i - z_i)^2}{|x-z|^{p+2}} - \frac{x_i^2}{|x|^{p+2}} \right) \\
 &= \int dx \left( \frac{1}{|x-y|^p} - \frac{1}{|x|^p} \right) \left( \frac{1}{|x-z|^p} - \frac{1}{|x|^p} \right) \\
 &= \frac{1}{d} E[X_y X_z].
 \end{aligned}$$

On déduit de ce calcul la relation :

$$(9) \quad E[Y_z | X] = \frac{1}{d} X_z.$$

Finalement, on peut donc obtenir toute la famille  $(X^v; v \in \mathbb{R})$  des processus BF(d, d-2p) comme combinaison linéaire des deux processus indépendants  $X^0$  et  $X^d$ .

(4.2) Nous terminons cette Note par une remarque sur la représentation de BF(d, d-2p) sous la forme :  $X_y = B(\phi_y^{p,0})$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ , dégagée ci-dessus.

Les matrices  $\phi_y^{p,0}(x)$  étant toutes des multiples (dépendant de  $x$ ) de la matrice identité, il revient au même de représenter BF(d, d-2p), à une constante multiplicative près, sous la forme :

$$(10) \quad \tilde{X}_y = \int \beta(d\xi) \left( \frac{1}{|\xi+y|^p} - \frac{1}{|\xi|^p} \right) \quad (y \in \mathbb{R}^d)$$

où  $\beta(d\xi)$  désigne une mesure gaussienne réelle sur  $\mathbb{R}^d$ , d'intensité  $d\xi$ .

Or, la représentation de BF(d, d-2p) qui est généralement utilisée (voir Cartier [1], Kahane [2]) est :

$$(11) \quad \int \left( b(dx), \frac{1 - \exp iy \cdot x}{|x|^{d-p}} \right) \quad (y \in \mathbb{R}^d)$$

où  $b(dx) = b_1(dx) + ib_2(dx)$  est obtenue à l'aide de deux mesures gaussiennes  $b_1$  et  $b_2$  réelles, indépendantes sur  $\mathbb{R}^d$ , d'intensité  $dx$ , et où  $(z, z') = \operatorname{Re}(z\bar{z}')$  désigne le produit scalaire usuel des deux nombres complexes  $z$  et  $z'$ .

Nous remarquons ici que l'équivalence des deux représentations (10) et (11) peut s'expliquer à l'aide du

Lemme 2 : Soit  $d$  entier,  $d \geq 1$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ , et  $\alpha$  tel que  $\frac{d}{2} < \alpha < \frac{d}{2} + 1$ .

La transformée de Fourier-Plancherel de la fonction, définie sur  $\mathbb{R}^d$ , par :

$$x \rightarrow \frac{1 - e^{iy \cdot x}}{|x|^\alpha} \text{ est : } \xi \rightarrow c \left( \frac{1}{|\xi+y|^{d-\alpha}} - \frac{1}{|\xi|^{d-\alpha}} \right)$$

pour une certaine constante  $c$ .

Démonstration : La transformée de Fourier-Plancherel est donnée par :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} \frac{dx}{|x|^\alpha} \left( e^{i\xi \cdot x} - e^{i(\xi+y) \cdot x} \right)$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{|\xi|^{d-\alpha}} F_\alpha(R|\xi|) - \frac{1}{|\xi+y|^{d-\alpha}} F_\alpha(R|\xi+y|) \right\}$$

où  $F_\alpha(R) = \int_{|x| \leq R} \frac{dx}{|x|^\alpha} e^{i1 \cdot x}$ , en notant  $1 = (1, 0, \dots, 0)$ .

Pour terminer la démonstration, il suffit de montrer que  $F_\alpha(R)$  converge vers une limite finie, lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

Rappelons maintenant que, si  $\varphi$  est une fonction radiale de  $L^1(\mathbb{R}^d)$ , sa transformée de Fourier  $\Phi$  est également radiale et est donnée, à une constante multiplicative près, par :

$$\Phi(\rho) = \int_0^\infty dr r \left(\frac{r}{\rho}\right)^\nu J_\nu(r\rho) \varphi(r)$$

où  $\nu = \frac{d}{2} - 1$  et  $J_\nu$  est la fonction de Bessel d'indice  $\nu$ .

En conséquence, on a :  $F_\alpha(R) = \int_0^R dr \frac{J_\nu(r)}{r^\beta}$  où  $\beta = \alpha - (1+\nu)$  appartient,

sous l'hypothèse du lemme, à l'intervalle  $]0, 1[$ .

Dans le cas  $d = 3$  ( $\nu = 1/2$ ), on a :  $J_\nu(r) = c \frac{\sin r}{r^{1/2}}$  et la convergence, lorsque

$R \rightarrow \infty$ , de :  $\int_0^R dr \frac{\sin r}{r^\gamma}$  est bien connue pour tout  $\gamma \in ]0, 2[$

(ici :  $\gamma = \beta + \frac{1}{2} \in ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ ). Pour une dimension  $d$  générale, on a (cf. [7], p. 364) :

$$J_\nu(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Le même résultat de convergence assure encore la convergence de  $F_\alpha(R)$ , lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

REFERENCES :

- [1] P. CARTIER : Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres. Séminaire de Probabilités V. Lect. Notes in Maths 191, p. 58-75 (1971).
- [2] J.P. KAHANE : Some random series of functions. (Second edition). Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 5 (1985).
- [3] N.V. KRYLOV : Controlled diffusion processes. Springer-Verlag, Berlin (1980).
- [4] I. SCHOENBERG : Metric spaces and positive definite functions. Trans. Amer. Math. Soc. 44, p. 522-536 (1938).
- [5] S. WEINRYB, M. YOR : Le mouvement brownien de Lévy indexé par  $\mathbb{R}^3$  comme limite centrale de temps locaux d'intersection. Dans ce volume.
- [6] M. YOR : A propos de l'inverse du mouvement brownien dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 3$ ). Ann. Inst. H. Poincaré, vol. 21, n° 1, p. 27-38 (1984).
- [7] M. ABRAMOVITZ, I. STEGUN : Handbook of Mathematical Functions. New-York, Dover (1970).