SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

DOMINIQUE BAKRY

La propriété de sous-harmonicité des diffusions dans les variétés

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 1-50

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__1_0>

LA PROPRIÉTÉ DE SOUS-HARMONICITÉ DES DIFFUSIONS DANS LES VARIÉTÉS

Dominique Bakry

0. Introduction et notations

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe non nulle dans un ouvert du plan complexe, la fonction $\log|f(z)|$ est une fonction harmonique. Par suite, pour tout $p > 0$, la fonction $|f(z)|^p$ est sous-harmonique : cette propriété est la clé qui permet d'établir la dualité $\mathbf{H}^1 - \mathbf{BMO}$ sur la droite ou sur le cercle.

Stein et Weiss ont étendu cette propriété aux ouverts de $\mathbf{R}^n$: dans ce cadre, l'analogue d'une fonction holomorphe est constitué par un système $u = (u_1, \ldots, u_n)$ de fonctions satisfaisant les équations de Cauchy - Riemann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x^j} u_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} u_j \ ; \\ \displaystyle\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} u_i = 0 \, . \end{cases}$$

Si l'on pose $|u| = \left[\sum_i u_i^2\right]^{1/2}$, on a alors $\Delta |u|^p \geq 0$ pour $p \geq \dfrac{n-2}{n-1}$. (Voir [St-W], par exemple.)

Le point important ici est que l'on puisse choisir $p < 1$. En effet, chacune des fonctions u_i étant harmonique, il n'est pas difficile de voir que la fonction $|u|$ elle même est sous-harmonique. C'est sur cette propriété que Fefferman et Stein s'appuient pour étudier les espaces $\mathbf{H}^1$ et $\mathbf{BMO}$ de $\mathbf{R}^n$ dans [FS].

On peut reformuler autrement la propriété de sous-harmonicité de $\mathbf{R}^n$; en effet, localement, un système vérifiant les équations de Cauchy - Riemann s'écrit $u_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i} h$, où h est une fonction harmonique. On a donc $|u| = |\nabla h|$ et la propriété de sous-harmonicité de $\mathbf{R}^n$ s'énonce :

Si f est harmonique dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $\Delta |\nabla f|^p \geq 0$ pour $p \geq \dfrac{n-2}{n-1}$.

Différentes extensions de cette propriété ont été étudiées, toujours en liaison avec l'étude des espaces $\mathbf{H}^1$ et **BMO** (voir par exemple l'article de COIFFMAN et WEISS [CW] pour l'étude dans les groupes de LIE semisimples compacts). On peut en effet la reformuler dans un cadre général : étant donné un opérateur $\mathbf{L}$ différentiel du second ordre sans termes constants, on lui associe naturellement une notion de longueur du gradient en posant $|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}(\mathbf{L}f^2 - 2f\mathbf{L}f)$. (Cela coincide avec la définition usuelle lorsque $\mathbf{L}$ est le laplacien.) La propriété de sous-harmonicité s'énonce alors :

$$\text{il existe un } 0 < p < 1 \text{ tel que } \mathbf{L}f = 0 \Rightarrow \mathbf{L}|\nabla f|^p \geq 0.$$

Le principal résultat de cet article est le suivant : si $\mathbf{L}$ est un opérateur elliptique sur une variété de dimension n, pour tout $p > \frac{n-2}{n-1}$, il existe une fonction $r(x,p)$ telle que

$$\mathbf{L}f = 0 \Rightarrow (\mathbf{L} - r\mathbf{I})|\nabla f|^p \geq 0.$$

Les cas intéressants seront ceux où r est minorée, ou mieux est positive.

Dans la première partie, nous introduisons deux notions reliées à $\mathbf{L}$, les notions de **courbure** et de **dimension**. Lorsque $\mathbf{L}$ est le laplacien d'une variété riemannienne, la dimension est celle de la variété (et c'est le seul cas où cela se produit), tandis que la courbure est la courbure de RICCI de celle-ci. En général, ces deux notions sont corrélées ; nous étudions la façon dont elles se comportent dans un certain nombre de transformations élémentaires qu'on fait subir à $\mathbf{L}$, et qu'on utilisera par la suite.

Dans la seconde partie, nous démontrons la propriété de sous-harmonicité, que nous énonçons en termes de courbure et de dimension de l'opérateur $\mathbf{L}$.

Le reste de l'article est consacré à l'étude de quelques applications du lemme de sous-harmonicité. Le chapitre 3 introduit différents types de prolongements harmoniques qu'on peut construire à partir de fonctions définies sur la variété. Dans la quatrième partie, on montre comment obtenir en courbure minorée des inégalités maximales dans $\mathbf{L}^1$, du type des inégalités maximales dans $\mathbf{H}^1$ obtenues dans $\mathbf{R}^n$. Dans la cinquième partie, on s'intéresse plus particulièrement au cas de la courbure positive, pour laquelle on obtient des équivalences entre des normes $\mathbf{H}^1$ définies à partir de considérations probabilistes et d'autres définies à partir de transformations de RIESZ : nous généralisons ainsi les résultats de [B4].

Enfin dans la dernière partie, nous montrons comment, à partir de la propriété de sous-harmonicité (ou du moins un résultat corrélé), on peut obtenir des inégalités du type SOBOLEV : il s'agit là d'une simple curiosité, sans intérêt pratique, du moins pour le moment.

Quelques notations.

$\mathbf{E}$ désigne une variété connexe de classe $\mathcal{C}^\infty$, et $\mathcal{C}_c^\infty$ désigne l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{E}$ à support compact. Tous les opérateurs $\mathbf{L}$ que nous rencontrerons seront des opérateurs différentiels du second ordre sur $\mathbf{E}$, sans termes constants, elliptiques et à coefficients $\mathcal{C}^\infty$.

Nous adoptons la convention de sommation sur les indices répétés : $x_i X^i$ désigne $\sum_i x_i X^i$. Lorsqu'une métrique g est donnée sur $\mathbf{E}$, les indices sont abaissés ou remontés conformément à cette métrique, c'est à dire que

$$X_i = g_{ij} X^j \quad \text{et} \quad X^i = g^{ij} X_j,$$

où la matrice g^{ij} désigne la matrice inverse de la matrice g_{ij}. La longueur d'un vecteur X dans la métrique g est notée $|X|$: dans un système de coordonnées locales, c'est la quantité $\sqrt{X_i X^i}$. De même, on désignera par $|T|$ la norme d'un tenseur T.

Le produit tensoriel de deux champs de vecteurs X et Y (ou plus généralement de deux opérateurs linéaires) est noté $X \otimes Y$; la quantité $X \odot Y$ désignera leur produit tensoriel symétrique, c'est à dire la quantité
$\frac{1}{2}[X \otimes Y + Y \otimes X]$.

Enfin d désignera l'opérateur de différentiation extérieure opérant sur les k-formes.

1.— Courbure et dimension des générateurs de diffusions

Nous reprenons ici, dans le cadre des diffusions sur une variété, les notions introduites dans [B1] dans un cadre abstrait. Notre variété $\mathbf{E}$ étant fixée une fois pour toutes, nous nous donnons sur $\mathbf{E}$ un opérateur différentiel $\mathbf{L}$ du second ordre, elliptique et sans terme constant, c'est à dire,dans un système de coordonnées locales,

$$\mathbf{L} f(x) = g^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f(x) + b^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} f(x)$$

où les coefficients g^{ij} et b^i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et où la matrice (g^{ij}) est définie positive. La matrice inverse (g_{ij}) définit alors sur $\mathbf{E}$ une structure riemannienne. Appelons ∇ la connexion de LEVI-CIVITA et $\boldsymbol{\Delta}$ l'opérateur de LAPLACE-BELTRAMI de cette structure :

$$\boldsymbol{\Delta} f = g^{ij}\nabla_i\nabla_j f(x).$$

On peut alors écrire l'opérateur $\mathbf{L}$ sous la forme $\boldsymbol{\Delta}+\mathbf{X}$. L'expression du champ de vecteurs $\mathbf{X}$ dans un système de coordonnées locales fait intervenir les symboles de CHRISTOFFEL Γ^j_{ik} de la connexion ∇ :

$$2\Gamma^i_{kl} = g^{ip}(\frac{\partial}{\partial x^k}g_{pl} + \frac{\partial}{\partial x^l}g_{pk} - \frac{\partial}{\partial x^p}g_{kl}).$$

On a $\mathbf{X}^i = b^i - \Gamma^i_{kl}g^{kl}$.

Nous appelerons cette décomposition en $\boldsymbol{\Delta}+\mathbf{X}$ *la décomposition canonique de* $\mathbf{L}$.

Supposons que l'on se soit donné deux variétés $\mathbf{E_1}$ et $\mathbf{E_2}$ munies d'opérateurs $\mathbf{L_1}$ et $\mathbf{L_2}$, ainsi qu'une application $\boldsymbol{\Phi}$ de $\mathbf{E_1}$ dans $\mathbf{E_2}$: nous dirons que $\boldsymbol{\Phi}$ *transporte* $\mathbf{E_1}$ *sur* $\mathbf{E_2}$ si, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur $\mathbf{E_2}$, on a

$$\mathbf{L_1}(f\circ\boldsymbol{\Phi}) = \mathbf{L_2}(f)\circ\boldsymbol{\Phi}.$$

Lorsque $\boldsymbol{\Phi}$ est un difféomorphisme de $\mathbf{E_1}$ sur $\mathbf{E_2}$, il envoie toujours l'opérateur $\mathbf{L_1}$ sur l'opérateur $\mathbf{L_2}(f) = \mathbf{L_1}(f\circ\boldsymbol{\Phi})\circ\boldsymbol{\Phi}^{-1}$. Dans ce cas, il envoie les laplaciens sur les laplaciens, ce qui n'est pas le cas en général : par exemple, la projection de la sphère unité de $\mathbf{R}^n$ sur un de ses diamètres envoie le laplacien sphérique sur l'opérateur de JACOBI, défini sur l'intervalle $]-1,+1[$ par

$$\mathbf{L}f(x) = (1-x^2)f''(x) - (n-1)xf'(x),$$

qui n'est un laplacien que lorsque $n=2$.

Définition.— *L'opérateur carré du champ associé à* $\mathbf{L}$.

C'est l'opérateur bilinéaire symétrique

$$\boldsymbol{\Gamma}(f,f) = \frac{1}{2}(\mathbf{L}f^2 - 2f\mathbf{L}f),$$

défini pour toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}$.

Remarques.—

1. Lorsqu'il sera nécessaire de le préciser, nous utiliserons la notation $\mathbf{\Gamma^L}(f,f)$.

2. Lorsque $\mathbf{L}$ est de la forme $\mathbf{\Delta} + \mathbf{X}$, un calcul en coordonnées locales montre que
$$\mathbf{\Gamma}(f,f) = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}f\frac{\partial}{\partial x^j}f \quad ;$$
c'est donc toujours un opérateur bilinéaire positif. Puisqu'il s'identifie au tenseur cométrique (g^{ij}), il nous arrivera également d'utiliser la notation $\mathbf{\Gamma}(df,df)$.

3. L'opérateur $\mathbf{\Gamma}$ se conserve par transport : si $\mathbf{\Phi}$ envoie $\mathbf{L_1}$ sur $\mathbf{L_2}$, alors
$$\mathbf{\Gamma^{L_1}}(f\circ\mathbf{\Phi}, f\circ\mathbf{\Phi}) = \mathbf{\Gamma^{L_2}}(f,f)\circ\mathbf{\Phi} \ :$$
la construction de l'opérateur carré du champ à partir de l'opérateur $\mathbf{L}$ ne dépend que de la structure d'algèbre de l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}$.

Définition.—*L'opérateur carré du champ itéré* $\mathbf{\Gamma_2}$.

C'est l'opérateur bilinéaire symétrique défini par
$$2\mathbf{\Gamma_2}(f,f) = \mathbf{L\Gamma}(f,f) - 2\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{L}f).$$

Remarques.—

1. De même que plus haut, on utilisera si besoin la notation $\mathbf{\Gamma_2^L}$

2. On pourrait de la même manière définir les opérateurs $\mathbf{\Gamma_k}$ par récurrence à partir de
$$2\mathbf{\Gamma_{k+1}}(f,f) = \mathbf{L\Gamma_k}(f,f) - 2\mathbf{\Gamma_k}(f,\mathbf{L}f).$$
Nous n'en aurons pas besoin.

3. De même que l'opérateur $\mathbf{\Gamma}$, l'opérareur $\mathbf{\Gamma_2}$ est un opérateur intrinsèque qui se conserve par transport.

4. Contrairement à $\mathbf{\Gamma}$, l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$ n'est en général pas positif, comme le montre le calcul suivant :

Calcul de l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$ lorsque $\mathbf{L} = \mathbf{\Delta}$.

Rappelons la définition du tenseur de courbure de la connexion ∇ associée à $\mathbf{\Delta}$. Lorsque $\mathbf{X}$ est un champ de vecteurs, le tenseur $\nabla\nabla\mathbf{X}$ n'est en général pas symétrique en ses deux premiers indices : dans un système de coordonnées locales, on peut écrire

$$\nabla_i\nabla_j\mathbf{X}^k - \nabla_j\nabla_i\mathbf{X}^k = \mathbf{R}_{ij}{}^k{}_l\mathbf{X}^l,$$

où $\mathbf{R}_{ij}{}^k{}_l$ désigne le tenseur de courbure de la connexion.

Le tenseur de Ricci $\mathbf{R}_{jl}$ désigne alors le tenseur contracté $\mathbf{R}_{ij}{}^i{}_l$: c'est un tenseur symétrique, et, dans la suite, nous appelerons **Ric** le tenseur $\mathbf{Ric}^{jl}$, c'est à dire le tenseur précédent dans lequel on a remonté les deux indices à l'aide de la métrique g.

De la définition de $\mathbf{\Delta}$ comme trace de $\nabla\nabla$ et de celle du tenseur de courbure découlent immédiatement la formule de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenbock :

$$\mathbf{\Delta}|\nabla f|^2 - 2\nabla f.\nabla\mathbf{L}f = 2|\nabla\nabla f|^2 + 2\mathbf{Ric}(df, df),$$

où $|\nabla\nabla f|^2$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de la matrice hessienne de f, c'est à dire, en coordonnées locales,

$$|\nabla\nabla f|^2 = \nabla_i\nabla_j f\nabla^i\nabla^j f.$$

Dans ce cas, on obtient donc

$$\mathbf{\Gamma_2}(f,f) = |\nabla\nabla f|^2 + \mathbf{Ric}(df, df).$$

On voit donc que l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$ n'est positif que si le tenseur de Ricci lui même l'est. D'autre part, il est clair sur la formule précédente qu'un tenseur symétrique $\mathbf{R}$ satisfait à l'inégalité $\mathbf{\Gamma_2}(f,f) \geq \mathbf{R}(df, df)$, pour toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}$ si, et seulement si, $\mathbf{Ric} \geq \mathbf{R}$, pour l'ordre naturel des tenseurs symétriques.

De même, la plus petite valeur propre $r(x)$ du tenseur **Ric** est-elle caractérisée par l'inégalité $\mathbf{\Gamma_2} \geq r(x)\mathbf{\Gamma}$.

Rappelons que p désigne la dimension de la variété E. Pour toute matrice symétrique M d'ordre p, on a

$$|M|^2 \geq \frac{1}{p}(\operatorname{tr} M)^2,$$

où $\operatorname{tr} M$ désigne la trace de la matrice M. Lorsque M est la matrice $\nabla\nabla f$, on a $\operatorname{tr} M = \mathbf{\Delta} f$, et donc on obtient l'inégalité, valable pour toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$\mathbf{\Gamma_2}(f,f) \geq \frac{1}{p}(\mathbf{\Delta} f)^2 + r(x)\mathbf{\Gamma}(f,f). \tag{1}$$

En notations abrégées, nous écrirons ceci sous la forme $\mathbf{\Gamma_2} \geq \frac{1}{p}\,\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{\Delta} + r\mathbf{\Gamma}$.

Réciproquement, si l'on a deux fonctions $c(x) \geq 0$ et $\rho(x)$ qui satisfont à l'inégalité $\mathbf{\Gamma_2} \geq c\mathbf{\Delta}\otimes\mathbf{\Delta} + \rho\mathbf{\Gamma}$, alors $c(x) \leq \frac{1}{p}$ et $\rho(x) \leq r(x)$.

Calcul de l'opérateur $\mathbf{\Gamma_2}$ lorsque $\mathbf{L} = \mathbf{\Delta} + \mathbf{X}$.

On se ramène au calcul précédent en écrivant

$$2\mathbf{\Gamma_2}(f,f) = \mathbf{\Delta\Gamma}(f,f) - 2\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{\Delta} f) + \mathbf{X\Gamma}(f,f) - 2\mathbf{\Gamma}(f,\mathbf{X}f).$$

Il ne nous reste donc qu'à calculer la seconde moitié : nous écrivons

$$\mathbf{X}|df|^2 = 2df.d(\mathbf{X}f) - 2\nabla^s(df,df),$$

où $\nabla^s\mathbf{X}$ désigne le tenseur $\nabla\mathbf{X}$ dont on a relevé le premier indice et qu'on a rendu symétrique. On obtient donc

$$\mathbf{\Gamma_2}(f,f) = |\nabla\nabla f|^2 + \mathbf{R}(\mathbf{L})(df,df). \tag{2}$$

où $\mathbf{R}(\mathbf{L})$ désigne le tenseur $\mathbf{Ric} - \nabla^s\mathbf{X}$.

Définition.— *Le tenseur* $\mathbf{R}(\mathbf{L}) = \mathbf{Ric} - \nabla^s\mathbf{X}$ *sera appelé le tenseur de* RICCI *de* $\mathbf{L}$.

Par analogie avec le cas du laplacien, nous pouvons maintenant introduire la notion de dimension pour l'opérateur $\mathbf{L}$: supposons que l'on se soit donné une fonction $n(x), 1 \leq n \leq \infty$, définie partout sur $\mathbf{E}$ et un tenseur $\mathbf{R}$ deux fois contravariant symétrique (i.e. en tout point x, $\mathbf{R}(x)$ est une forme bilinéaire symétrique sur l'espace cotangent $\mathbf{T}_{*x}\mathbf{E}$) : nous avons la

Définition.— *Nous dirons que le couple* $(n, \mathbf{R})$ *est un couple (dimension, courbure) admissible pour* $\mathbf{L}$ *si, pour toute fonction* f *de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *définie sur* $\mathbf{E}$*, l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\boldsymbol{\Gamma}_2(f,f) \geq \mathbf{R}(df,df) + \frac{1}{n}(\mathbf{L}f)^2. \tag{5}$$

En notations abrégées, nous écrirons

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 \geq \mathbf{R} + \frac{1}{n}\mathbf{L}\otimes\mathbf{L}.$$

Lorsque le tenseur $\mathbf{R}$ est de la forme $\rho(x)\boldsymbol{\Gamma}$, nous dirons simplement que le couple (n, ρ) est admissible.

Remarques.—

1. Si $(n, \mathbf{R})$ est un couple admissible, il en va de même de $(n', \mathbf{R}')$, où $n' \geq n$ et $\mathbf{R}' \leq \mathbf{R}$.

2. Si $(n, \mathbf{R})$ est un couple admissible pour $\mathbf{L}$, et si c est une constante strictement positive, le couple $(n, c^2\mathbf{R})$ est admissible pour l'opérateur $c\mathbf{L}$. En particulier, si le couple (n, ρ) est admissible pour $\mathbf{L}$, le couple $(n, c\rho)$ est admissible pour $c\mathbf{L}$.

3. De même que plus haut, appelons $r(x)$ la plus petite valeur propre du tenseur $\mathbf{R}(\mathbf{L})$: elle est entièrement caractérisée par la propriété suivante : $r(x)$ est la plus grande fonction sur $\mathbf{E}$ telle que (∞, r) soit admissible.

4. Supposons que l'application $\boldsymbol{\Phi}$ transporte $\mathbf{L_1}$ sur $\mathbf{L_2}$ et que le couple $(n_1, \mathbf{R}_1)$ soit admissible pour $\mathbf{L_1}$. La fonction $\boldsymbol{\Phi}$ transporte le tenseur $\mathbf{R}_1$ sur un tenseur $\mathbf{R}_2$. Si la fonction n_1 est de la forme $n_2 \circ \boldsymbol{\Phi}$, le couple $(n_2, \mathbf{R}_2)$ est admissible pour $\mathbf{L_2}$. Et donc, d'après la remarque **1**, **par transport, on augmente la courbure et on diminue la dimension**.

5. D'après ce qui précède, dans le cas où $\mathbf{L} = \boldsymbol{\Delta}$, $(n, \mathbf{R})$ est admissible si et seulement si $n \geq p$ et $\mathbf{R} \leq \mathbf{Ric}$.Dans ce cas, il existe donc un meilleur couple admissible. C'est loin d'être le cas en général, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1.1.—

(i) Le couple $(n, \mathbf{R})$ est admissible si et seulement si

$$n \geq p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq (n-p)[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - \mathbf{R}]. \tag{4}$$

(ii) Si le couple $(n, \mathbf{R})$ est admissible, il en va de même du couple

$$\left(n' \quad , \quad \frac{n-p}{n'-p}\mathbf{R} + \frac{n'-n}{n'-p}\mathbf{R}(\mathbf{L})\right) \quad ,$$

et ceci pour tout $n' \geq p$.

(iii) En particulier, pout tout $\varepsilon > 0$, le couple $(p+\varepsilon, \mathbf{R}(\mathbf{L}) - \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{X}\otimes\mathbf{X})$ est admissible.

Preuve. Les assertions **(ii)** et **(iii)** découlent immédiatement de **(i)**. Quant à la première, elle se déduit aisément du lemme élémentaire suivant :

Lemme 1.2. Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^p$, considérons une forme bilinéaire $\mathbf{R}$, un vecteur $\mathbf{X}$ et un réel positif n. Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :

(i) Pour toute matrice symétrique $\mathbf{M}$ et tout vecteur $\mathbf{Y}$,

$$|\mathbf{M}|^2 + \mathbf{R}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) \geq \frac{1}{n}(\mathbf{X}.\mathbf{Y} + \operatorname{tr}\mathbf{M})^2;$$

(ii) $n \geq p \qquad \text{et} \qquad \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq (n-p)\mathbf{R}.$

Preuve. **(i)** s'écrit

$$|\mathbf{M}|^2 - \frac{1}{n}(\operatorname{tr}\mathbf{M})^2 - \frac{2}{n}(\operatorname{tr}\mathbf{M})\mathbf{X}.\mathbf{Y} + \mathbf{R}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) \geq \frac{1}{n}(\mathbf{X}.\mathbf{Y})^2. \tag{5}$$

En nous restreignant aux matrices $\mathbf{M}$ de la forme $t\mathbf{Id}$, on obtient :

$$p(1-\frac{p}{n})t^2 - 2\frac{p}{n}t\,\mathbf{X}.\mathbf{Y} - \frac{1}{n}(\mathbf{X}.\mathbf{Y})^2 + \mathbf{R}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) \geq 0. \tag{6}$$

C'est un polynôme du second degré en t, positif : on a donc

$$(\frac{p}{n})^2(\mathbf{X}.\mathbf{Y})^2 \leq p(1-\frac{p}{n})\left[\mathbf{R}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \frac{1}{n}(\mathbf{X}.\mathbf{Y})^2\right].$$

D'où l'implication **(i)** $\Rightarrow$ **(ii)**. Dans l'autre sens, si l'on écrit $|\mathbf{M}|^2 \geq \frac{1}{p}(\operatorname{tr}\mathbf{M})^2$, on voit que l'inégalité (5) se ramène à l'inégalité (6), avec $t = \operatorname{tr}\mathbf{M}$. $\square$

Remarque.—

La proposition précédente montre que, parmi les opérateurs elliptiques du second ordre sur une variété, seuls les laplaciens ont un "meilleur choix" (dimension, courbure). On peut se poser la question de savoir quels sont les opérateurs qui offrent un meilleur choix (n, r). (Rappelons que cela signifie qu'on se restreint aux tenseurs $\mathbf{R}$ de la forme $r\mathbf{\Gamma}$.) Pour cela, diagonalisons le tenseur $\mathbf{R}(\mathbf{L})$ dans une base orthonormée : soient $r_1 \leq r_2 \leq \ldots \leq r_n$ ses valeurs propres et soient $(\mathbf{X}^i)$ les coordonnées du vecteur $\mathbf{X}$ dans cette base. L'inégalité (4) devient

$$\forall \mathbf{Y} = (\mathbf{Y}^i) \quad : \quad \Big(\sum_i \mathbf{X}^i.\mathbf{Y}^i\Big)^2 \leq (n-p)\sum_i (r_i - r)(\mathbf{Y}^i)^2.$$

Ceci ne peut être vrai que si $r_1 \geq r$ et si

$$\sum_i \frac{(\mathbf{X}^i)^2}{r_i - r} \leq (n-p).$$

En particulier, si $\mathbf{X_1}$ désigne la projection du vecteur $\mathbf{X}$ sur l'espace propre associé à r_1, on a

$$|\mathbf{X}_1|^2 \leq (n-p)(r_1 - r).$$

Il n'y a donc pas de "meilleur choix" possible dès que $\mathbf{X}_1 \neq 0$. Mais, dès lors que $\mathbf{X}_1 = 0$, le couple (n_0, r_1) est le "meilleur choix", où l'on a posé

$$n_0 = p + \sum_{r_i > r_1} \frac{(\mathbf{X}^i)^2}{r_i - r_0}.$$

Nous verrons plus bas un exemple de ces "**quasi-laplaciens**".

Parmi les opérations élémentaires qu'on peut faire subir à notre opérateur $\mathbf{L}$, il y en a deux particulièrement importantes :

(1) Addition d'un champ de vecteurs : $\mathbf{L} \to \mathbf{L} + \mathbf{Y}$.

(2) Transformation conforme : $\mathbf{L} \to e^h\mathbf{L}$.

Etudions l'effet de ces deux transformations sur les couples (dimension, courbure) admissibles pour $\mathbf{L}$. Pour la première, on a le résultat suivant :

Proposition 1.3.— Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i). Le couple $(n, \mathbf{R}')$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \mathbf{Y}$.

(ii). Pour toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$,

$$\mathbf{\Gamma}_2^{\mathbf{L}}(f,f) \geq (\mathbf{R}' + \nabla^s \mathbf{Y})(f,f) + \frac{1}{n}(\mathbf{L}'f)^2.$$

(iii). Le couple $(n, \mathbf{R})$ est admissible pour $\mathbf{L}$, où l'on a posé

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' + \nabla^s \mathbf{Y} + \frac{1}{n-p}(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{Y} + 2\mathbf{Y} \odot \mathbf{X}),$$

le symbole $\mathbf{Y} \odot \mathbf{X}$ désignant le produit tensoriel symétrique de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, c'est à dire $\frac{1}{2}(\mathbf{Y} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})$.

Preuve. La formule (2) nous montre que

$$(\mathbf{\Gamma}_2^{\mathbf{L}} - \mathbf{\Gamma}_2^{\mathbf{L}'})(f,f) = \nabla^s \mathbf{Y}(df, df).$$

L'équivalence entre **(i)** et **(ii)** est donc immédiate. Quant à l'équivalence avec **(iii)**, elle découle immédiatement de la proposition 1.1. $\square$

L'étude des transformations conformes est un peu plus délicate :

Proposition 1.4.—

a. La décomposition canonique de l'opérateur $\mathbf{L}' = e^h \mathbf{L}$ s'écrit $\mathbf{\Delta}' + \mathbf{X}'$, où

$$\mathbf{\Delta}' = e^h(\mathbf{\Delta} - \frac{p-2}{2}\nabla h) \quad , \quad \text{et}$$

$$\mathbf{X}' = e^h(\mathbf{X} + \frac{p-2}{2}\nabla h).$$

b. Le tenseur de Ricci de l'opérateur $\mathbf{L}'$ vaut

$$\mathbf{R}(\mathbf{L}') = e^{2h}\Big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) + \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} - \mathbf{X} \odot \nabla h - \frac{p-2}{4}\nabla h \otimes \nabla h\Big].$$

c. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Le couple $(n, e^{2h}\mathbf{R}')$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}' = e^h \mathbf{L}$.

(ii) Le couple $(n, \mathbf{R})$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$, où l'on a posé

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} + \frac{n-2}{n-p}(\mathbf{X}\odot\nabla h + \frac{p-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h).$$

(iii) $\mathbf{\Gamma_2^L} \geq \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} - \frac{n-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h + \frac{1}{n}(\mathbf{L} + \frac{n-2}{2}\nabla h)\otimes(\mathbf{L} + \frac{n-2}{2}\nabla h).$

(iv) Le couple $(n, \mathbf{R}'')$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}'' = \mathbf{L} + \frac{n-2}{2}\nabla h$, où $\mathbf{R}''$ désigne le tenseur

$$\mathbf{R}'' = \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} - \frac{n-2}{2}\nabla\nabla h - \frac{n-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h.$$

Remarques.—

(a). Dans les caractérisations **(iii)** et **(iv)**, la dimension p de l'espace $\mathbf{E}$ n'intervient pas : ces caractérisations sont intrinsèques et se conservent par transport.

(b). Par passage à la limite lorsque la dimension n tend vers l'infini dans la caractérisation **(iii)**, on obtient l'équivalence suivante :

(i). $(\infty, e^{2h}\mathbf{R}')$ est admissible pour $\mathbf{L}' = e^h\mathbf{L}$.

(ii). $\mathbf{\Gamma_2^L} \geq \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} + \mathbf{L}\odot\nabla h$.

Preuve. Appelons ∇' la connexion riemannienne associée à la nouvelle métrique $g' = e^{-h}g$. Dans un système de coordonnées locales, un calcul simple mais un peu ennuyeux montre que

$$\nabla'_\mu\mathbf{Y}^\alpha = \nabla_\mu\mathbf{Y}^\alpha - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x^\mu}(h)\mathbf{Y}^\alpha + \delta_\mu^\alpha\mathbf{Y}^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}(h) - g^{\alpha\beta}g_{\gamma\mu}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(h)\mathbf{Y}^\gamma\Big). \quad (7)$$

De la même manière, nous obtenons

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{\Delta}') = e^{2h}\Big[\mathbf{Ric}(\mathbf{\Delta}) + \frac{1}{2}\mathbf{\Delta}(h)\mathbf{\Gamma} + \frac{p-2}{4}(2\nabla\nabla h + \nabla h\otimes\nabla h - \mathbf{\Gamma}(h,h)\mathbf{\Gamma})\Big]. \quad (8)$$

(On peut trouver le détail de ces calculs dans [Sch], par exemple.) De l'égalité (7), nous tirons

$$\nabla'_\mu\mathbf{Y}^\mu = \nabla_\mu\mathbf{Y}^\mu - \frac{p}{2}(\mathbf{Y}, dh), \quad (9)$$

$$\text{d'où} \qquad \mathbf{\Delta}'f = \nabla'_\mu(e^h\nabla^\mu f) = e^h\big[\mathbf{\Delta}f - \frac{p-2}{2}(\nabla h, df)\big]. \quad (10)$$

Ceci nous donne la décomposition canonique de l'opérateur $\mathbf{L}'$. On a donc bien

$$\mathbf{X}' = e^h(\mathbf{X} + \frac{p-2}{2}\nabla h)$$

et, toujours d'après l'égalité (7),on en tire

$$\nabla^{s\prime}\mathbf{X}' = e^{2h}\Big[\nabla^s\mathbf{X} + \frac{p-2}{2}[\nabla\nabla h + \nabla h\otimes\nabla h - \frac{1}{2}\mathbf{\Gamma}(h,h)\mathbf{\Gamma}] - \frac{1}{2}(\mathbf{X}, dh)\mathbf{\Gamma} + \mathbf{X}\odot\nabla h\Big]. \tag{11}$$

En combinant les formules (11) et (9), et en utilisant la définition du tenseur de Ricci de $\mathbf{L}'$, on obtient

$$\mathbf{R}(\mathbf{L}') = e^{2h}[\mathbf{R}(\mathbf{L}) + \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} - \mathbf{X}\odot\nabla h - \frac{p-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h],$$

ce qui nous donne le point **b**.

Finalement, en utilisant la caractérisation de la proposition **1.1.**, on obtient :

le couple $(n, \mathbf{R}')$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}'$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\mathbf{X} + \frac{p-2}{2}\nabla h)\otimes(\mathbf{X} + \frac{p-2}{2}\nabla h) \leq$$
$$(n-p)\Big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) + \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} - \mathbf{X}\odot\nabla h - \frac{p-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h - \mathbf{R}'\Big]$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq (n-p)[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - \mathbf{R}] \quad , \qquad \text{où}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} + \frac{n-2}{n-p}\Big[\mathbf{X}\odot\nabla h + \frac{p-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h\Big]. \tag{12}$$

Ceci nous donne l'équivalence entre **(i)** et **(ii)**.

D'autre part, l'équivalence (12) s'écrit également

$$(\mathbf{X} + \frac{n-2}{2}\nabla h)\otimes(\mathbf{X} + \frac{n-2}{2}\nabla h) \leq (n-p)\Big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - \mathbf{R}' + \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} + \frac{n-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h\Big]. \tag{13}$$

D'après le lemme **1.2.**, l'inégalité (13) s'écrit aussi

$$\mathbf{\Gamma}_2^{\mathbf{L}}(f,f) \geq \frac{1}{n}(\mathbf{L}f + \frac{n-2}{2}\nabla h)^2 + \Big[\mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} - \frac{n-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h\Big](df, df). \tag{14}$$

D'où l'équivalence entre **(i)** et **(iii)**.

Soit alors $\mathbf{L}''$ l'opérateur $\mathbf{L}+\frac{n-2}{2}\nabla h$. D'après la proposition **1.3.**, nous avons

$$\mathbf{\Gamma_2^{L''}} = \mathbf{\Gamma_2^{L}} - \frac{n-2}{2}\nabla\nabla h.$$

Par conséquent, l'inégalité (14) s'écrit encore

$$\mathbf{\Gamma_2^{L''}} \geq \frac{1}{n}\mathbf{L}''\otimes\mathbf{L}'' + \mathbf{R}' - \frac{1}{2}\mathbf{L}(h)\mathbf{\Gamma} - \frac{n-2}{4}\nabla h\otimes\nabla h - \frac{n-2}{2}\nabla\nabla h.$$

D'où l'équivalence entre **(i)** et **(iv)**. □

Dans la suite, à coté des opérateurs $\mathbf{L}$ définis sur notre variété $\mathbf{E}$, nous serons amenés à considérer des opérateurs définis sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$, qui seront de la forme

$$\mathbf{L}^{\alpha,\beta} = e^{2\beta t}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L}).$$

Nous aurons besoin de savoir comment on passe des couples admissibles pour $\mathbf{L}$ aux couples admissibles pour $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$: nous nous restreignons aux couples de la forme (n,r), c'est à dire aux tenseurs de Ricci de la forme $r\mathbf{\Gamma}$.

Proposition 1.5.—

(a) Le couple $(n', e^{2\beta t}r')$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont réalisées :

(i) $n' \geq p+1$.

(ii) $[\beta(n'-2)-2\alpha]\,[2\alpha-(p-1)\beta] \geq r'(n'-1-p)$.

(iii) Le couple $(n_0, r'+2\alpha\beta)$ est admissible pour $\mathbf{L}$, où l'on a posé

$$n_0 = \frac{(n'-2)\beta^2 + 2(n'-3)\alpha\beta - 4\alpha^2 - (n'-1)r'}{(n'-2)\beta^2 - r' - 2\alpha\beta}.$$

(b) En particulier, supposons que le couple (n,r) soit admissible pour $\mathbf{L}$, **où** n **et** r **sont des constantes**. Posons :

1. $\varepsilon = \text{signe}(r)$, c'est à dire $\varepsilon = +1$ si $r > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $r \leq 0$.

2. Pour tout réel $\vartheta \in [-1,+1]$ et pour tout réel ξ tel que $|\xi| \geq \varepsilon$,

$$\alpha(\xi) = \sqrt{(n-1)|r|}\,\frac{\xi}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta(\xi,\vartheta) = \sqrt{\frac{|r|}{n-1}}\,(\xi + \vartheta\sqrt{\xi^2-\varepsilon}).$$

Dans ces conditions, l'opérateur $\mathbf{L}^{\alpha(\xi),\beta(\xi,\vartheta)}$ admet le couple $(n', e^{2\beta(\xi,\vartheta)}r')$ comme (dimension, courbure), avec

$$n' = \frac{n-1}{1-\vartheta^2} + 2, \qquad \text{et} \qquad r' = r\left[1 - \varepsilon\xi(\xi + \vartheta\sqrt{\xi^2 - \varepsilon})\right].$$

Preuve. Si (x^i) désigne un système de coordonnées locales dans un voisinage V_{x_0} d'un point x_0 de $\mathbf{E}$, (x^i, t) est un système de coordonnées locales dans $V_{x_0}\times]0,\infty]$. C'est dans un tel système que nous ferons tous nos calculs.

Tout d'abord, nous commençons par le cas où $\beta = 0$. Nous posons pour simplifier $\mathbf{L}^\alpha = \mathbf{L}^{\alpha,0}$. Si la décomposition canonique de $\mathbf{L}$ s'écrit $\boldsymbol{\Delta} + \mathbf{X}$, la décomposition canonique de l'opérateur $\mathbf{L}^\alpha$ s'écrit $\boldsymbol{\Delta}_1 + \mathbf{X}^\alpha$, où

$$\boldsymbol{\Delta}_1 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \boldsymbol{\Delta} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{X}^\alpha = -2\alpha\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{X}.$$

Avec les notations matricielles évidentes, on a alors

$$\mathbf{R}(\mathbf{L}^\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{R}(\mathbf{L}) \end{pmatrix}.$$

La proposition **1.4.** nous permet alors de calculer la décomposition canonique de $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$:

$$\mathbf{L}^{\alpha,\beta} = \boldsymbol{\Delta}^\beta + \mathbf{X}^{\alpha,\beta} \qquad \text{avec}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^\beta = e^{2\beta t}\left[\boldsymbol{\Delta}_1 - (p-1)\beta\frac{\partial}{\partial t}\right] \quad \text{et} \quad \mathbf{X}^{\alpha,\beta} = e^{2\beta t}\left[\mathbf{X} + \left[(p-1)\beta - 2\alpha\right]\frac{\partial}{\partial t}\right].$$

Posons $\gamma = 2\alpha - (p-1)\beta$. Toujours d'après la proposition **1.4.**, on a

$$\begin{aligned} &e^{-4\beta t}\mathbf{R}(\mathbf{L}^{\alpha,\beta}) \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{L}^\alpha) - 2\alpha\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\alpha \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2\beta \\ 0 \end{pmatrix} - (p-1)\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta\gamma & -\beta^t\mathbf{X} \\ -\beta\mathbf{X} & \mathbf{R}(\mathbf{L}) - 2\alpha\beta\boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors utiliser la caractérisation de la proposition **1.1.** : le couple (n', r') est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ si et seulement si $n' \geq p+1$ et

$$(\mathbf{X} - \gamma\frac{\partial}{\partial t})\otimes(\mathbf{X} - \gamma\frac{\partial}{\partial t}) \leq (n'-p-1)\begin{pmatrix} \gamma\beta - r' & -\beta^t\mathbf{X} \\ -\beta\mathbf{X} & \mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r' + 2\alpha\beta)\boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Cette dernière inégalité s'écrit

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 & -\gamma^t\mathbf{X} \\ -\gamma\mathbf{X} & \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \end{pmatrix} \leq (n'-p-1)\begin{pmatrix} \gamma\beta - r' & -\beta^t\mathbf{X} \\ -\beta\mathbf{X} & \mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r' + 2\alpha\beta)\boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} (n'-p-1)(\beta\gamma - r') - \gamma^2 & [\gamma - (n'-p-1)\beta]^t\mathbf{X} \\ [\gamma - (n'-p-1)\beta]\mathbf{X} & (n'-p-1)\big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r'+2\alpha\beta)\mathbf{\Gamma}\big] - \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \end{pmatrix} \geq 0. \tag{17}$$

Ceci ne se produit que si l'une au moins des deux situations suivantes est réalisée :

A. $$n' \geq p+1 \quad , \quad (n'-p-1)(\beta\gamma - r') > \gamma^2, \text{ et} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} &[\gamma - (n'-p-1)\beta]^2\, \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq \\ &[(n'-p-1)(\beta\gamma - r') - \gamma^2]\Big[(n'-p-1)\big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r'+2\alpha\beta)\mathbf{\Gamma}\big] - \mathbf{X}\otimes\mathbf{X}\Big]. \end{aligned} \tag{19}$$

B. $$n' \geq p+1 \quad , \quad (n'-p-1)(\beta\gamma - r') = \gamma^2 \quad ; \quad \gamma = (n'-p-1)\beta \tag{20}$$

$$\text{et} \qquad \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq (n'-p-1)\big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r'+2\alpha\beta)\mathbf{\Gamma}\big]. \tag{21}$$

Occupons nous tout d'abord du cas **A**. L'inégalité (19) s'écrit encore

$$\begin{aligned} &\Big[[\gamma - (n'-p-1)\beta]^2 + (n'-p-1)(\beta\gamma - r') - \gamma^2\Big]\, \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq \\ &(n'-p-1)\big[(n'-p-1)(\beta\gamma - r') - \gamma^2\big]\big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r'+2\alpha\beta)\mathbf{\Gamma}\big]. \end{aligned} \tag{22}$$

Or, l'inégalité (18), qui est stricte, entraîne que le coefficient de $\mathbf{X}\otimes\mathbf{X}$ dans (21) est strictement positif, et que $n' > p+1$: après simplification par $(n'-p-1)$, (21) devient :

$$\big[(n'-p-1)\beta^2 - r' - \beta\gamma\big]\, \mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq \big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r'+2\alpha\beta)\mathbf{\Gamma}\big]. \tag{23}$$

Si l'on se rappelle que $\gamma = 2\alpha - (p-1)\beta$, on voit que (18) s'écrit

$$\big[\beta(n'-2) - 2\alpha\big]\big[2\alpha - (p-1)\beta\big] > r'(n'-1-p) \quad ; \tag{24}$$

et que (22) devient

$$\mathbf{X}\otimes\mathbf{X} \leq (n_0 - p)\big[\mathbf{R}(\mathbf{L}) - (r'+2\alpha\beta)\mathbf{\Gamma}\big],$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} n_0 =& p + \frac{\big[\beta(n'-2) - 2\alpha\big]\big[2\alpha - (p-1)\beta\big] - r'(n'-1-p)}{(n'-2)\beta^2 - r' - 2\alpha\beta} \\ =& \frac{(n'-2)\beta^2 + 2(n'-3)\alpha\beta - 4\alpha^2 - (n'-1)r'}{(n'-2)\beta^2 - r' - 2\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{25}$$

Ceci exprime le fait que le couple $(n_0, r' + 2\alpha\beta)$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$, et donc le cas **A.** se résume à

(i). $n' \geq p+1$;

(ii)'. $[\beta(n'-2) - 2\alpha]\,[2\alpha - (p-1)\beta] > r'(n'-1-p)$;

(iii). Le couple $(n_0, r' + 2\alpha\beta)$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$.

Le cas **B.**, quant à lui, se divise en deux sous-cas :

B 1. $n' = p+1$: alors $2\alpha = (p+1)\beta$ et le couple $(p, r'+2\alpha\beta)$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$.

Ce cas ne se produit que si $\mathbf{L}$ et $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ sont des laplaciens. Mais si $n' = p+1$, l'inégalité $[\beta(n'-2) - 2\alpha][2\alpha - (p-1)\beta] \geq r'(n'-1-p)$ s'écrit $[2\alpha - (p-1)\beta]^2 \leq 0$, et donc $2\alpha = (p+1)\beta$, d'où l'on tire $n_0 = p$. Le sous cas **B 1.** se ramène donc à

(i)'. $n' = p+1$;

(ii). $[\beta(n'-2) - 2\alpha]\,[2\alpha - (p-1)\beta] \geq r'(n'-1-p)$;

(iii). Le couple $(n_0, r' + 2\alpha\beta)$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$.

B 2. $n' > p+1$ et $[\beta(n'-2) - 2\alpha][2\alpha - (p-1)\beta] = r'(n'-1-p)$.

On pourrait le traiter comme le cas précédent, mais il est plus simple de remarquer que le couple (n', r') est admissible pour $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, le couple $(n' + \varepsilon, r' - \varepsilon)$ l'est. Pour un tel couple, l'inégalité $[\beta(n'-2) - 2\alpha][2\alpha - (p-1)\beta] \geq r'(n'-1-p)$ devient une inégalité stricte, et on est ramené au cas **A.** Il reste juste à passer à la limite lorsque $\varepsilon \mapsto 0$ pour voir que cette situation est équivalente à

(i)'. $n' > p+1$;

(ii)''. $[\beta(n'-2) - 2\alpha][2\alpha - (p-1)\beta] = r'(n'-1-p)$;

(iii). Le couple $(n_0, r' + 2\alpha\beta)$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$.

La première partie de la proposition est donc démontrée. Pour la seconde, il suffit de remarquer que, pour les valeurs $\alpha(\xi), \beta(\xi, \vartheta), r'(\xi, \vartheta), n'(\vartheta)$ que nous donnons, on a $n_0 = n$, $r' + 2\alpha\beta = r$, et qu'en outre les inégalités **(i)** et **(ii)** sont satisfaites. C'est juste un calcul élémentaire, quoiqu'un peu pénible, que nous laissons au lecteur.

Remarques.—

1. La proposition précédente décrit le passage des couples (n, r) admissibles pour l'opérateur $\mathbf{L}$ aux couples (n', r') admissibles pour l'opérateur $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$: comme le montre **a.(iii).**, la dimension p de l'espace $\mathbf{E}$ n'intervient pas dans le calcul de n' et r' : c'est un résultat **intrinsèque**.

2. Supposons qu'on se soit donné des constantes (n, r, ξ, ϑ) satisfaisant aux inégalités $n \geq p$, $\vartheta < 1$, $\xi^2 \geq \varepsilon = \text{signe}(\xi)$. Posons, comme dans **b.** de la proposition précédente,

$$\alpha(\xi) = \sqrt{(n-1)|r|}\,\frac{\xi}{2} \quad , \quad \beta(\xi, \vartheta) = \sqrt{\frac{|r|}{n-1}}\,(\xi + \vartheta\sqrt{\xi^2 - \varepsilon}) \quad \text{et}$$

$$n' = \frac{n-1}{1-\vartheta^2} + 2, \quad , \quad r' = r\left[1 - \varepsilon\xi(\xi + \vartheta\sqrt{\xi^2 - \varepsilon})\right].$$

Si le couple $(n', e^{2\beta t} r')$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$, alors le couple (n, r) est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$. Cette propriété reste vraie lorsque $|\vartheta| = 1$, c'est à dire lorsque $n' = \infty$. Ainsi, quitte à changer d'opérateur $\mathbf{L}$, nous pouvons rammener l'étude des opérateurs admettant un couple admissible (n, r) constant à celle des opérateurs admettant une courbure de Ricci minorée.

3. Plaçons nous dans la situation de la partie **b.** de la proposition, et étudions le comportement des couples (n', r') admissibles pour $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ lorsqu'on fait varier les paramètres ξ et ϑ dans les coefficients α et β.

   La dimension n' de $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ ne dépend que de $|\vartheta|$ et varie de $n+1$ à l'infini lorsque le paramètre $|\vartheta|$ varie de 0 à $+1$.
   D'autre part, r' dépend de ϑ et de ξ. On a $r'(\vartheta, \xi) = r'(-\vartheta, -\xi)$ et, lorsqu'on fixe ϑ et qu'on fait varier ξ, r' varie de $\frac{r}{2}\,(1-\varepsilon\sqrt{1-\vartheta^2})$ à $-\infty$. En particulier, le maximum obtenu est $\frac{r}{2}$, et il est ateint lorsque $\vartheta^2 = 1$, c'est à dire lorsque $n' = \infty$.
   Lorsque la courbure r de $\mathbf{L}$ est strictement positive, la courbure r' de $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ s'annule pour les valeurs $\xi = 1$, $\xi = -1$ et $\xi = \frac{-\text{signe}(\vartheta)}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$.

4. Si nous posons $\rho = e^{-\beta t}$,l'opérateur $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ s'écrit

$$\beta^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + (1 + \frac{2\alpha}{\beta})\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\beta^2\rho^2}\mathbf{L}\right].$$

   Plaçons nous alors dans la situation où (n, r) est un couple constant admissible, avec $r > 0$. Prenons $0 < \vartheta < 1$ et $\xi = \frac{-\text{signe}(\vartheta)}{\sqrt{1-\vartheta^2}}$, de façon à avoir $r' = 0$. Dans ce cas, $1 + \dfrac{2\alpha}{\beta} = \dfrac{n - \vartheta^2}{1 - \vartheta^2} = n' - 1$ et $\dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{n' - 2}{|r|}$. En transcrivant la proposition **1.4.b.**, on obtient la forme suivante :

Pour tout $n' \geq n + 1$, l'opérateur $\mathbf{L}' = \dfrac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \dfrac{n' - 1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial \rho} + \dfrac{n' - 2}{r \rho^2} \mathbf{L}$ a une courbure nulle et une dimension n'.

Lorsque $\mathbf{L}$ est le laplacien de la sphère unité $\mathbf{S^{n-1}}$ de $\mathbf{R^n}$ et qu'on prend $n' = n$, on a $r = n - 1$ et l'expression précédente n'est autre que le laplacien de $\mathbf{R^n}$, exprimé en coordonnées polaires.

Un exemple de quasilaplacien à courbure et dimension constantes.

Considérons la sphère unité $\mathbf{S}^{n-1}$ de $\mathbf{R}^n$. Choisissons un entier $p < n$ et appelons Φ la projection de $\mathbf{S}^{n-1}$ sur un sous-espace de dimension p passant par le centre de $\mathbf{S}^{n-1}$: Φ transporte le laplacien de $\mathbf{S}^{n-1}$ sur un opérateur $\mathbf{L}_{n,p}$ défini sur la boule de rayon 1 de $\mathbf{R}^p$ qui s'écrit

$$\mathbf{L}_{n,p} = (\delta^{ij} - x^i x^j) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - (n-1) x^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Il apparaît que cet opérateur est un quasilaplacien sur la boule, de courbure et de dimension constantes.

En fait, considérons l'opérateur

$$\mathbf{L}_{\lambda,n,p} = (\delta^{ij} - \lambda x^i x^j) \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - n \lambda x^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

où n est un réel supérieur ou égal à p et λ est un réel quelquonque : il est défini sur la boule de centre 0 et de rayon $1/\lambda$ de $\mathbf{R}^p$ si λ est positif, et sur $\mathbf{R}^p$ tout entier si λ est négatif ou nul ; on a

Proposition 1.7.— L'opérateur $\mathbf{L}_{\lambda,n,p}$ est un quasilaplacien dont la courbure vaut $(n-1)\lambda$ et la dimension vaut n.

Preuve. Dans ce qui suit, on dispose de deux métriques différentes : la métrique δ_{ij} et la métrique associée à l'opérateur $\mathbf{L}_{\lambda,n,p}$. *Contrairement à nos habitudes, nous convenons de toujours remonter ou abaisser les indices par rapport à δ_{ij}.* Il ne nous reste plus qu'à faire les calculs décrits au début de ce chapitre.

Tout d'abord, on a

$$g^{ij} = \delta^{ij} - \lambda x^i x^j \quad \text{d'où} \quad g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\lambda}{1 - \lambda |x|^2} x_i x_j, ,$$

avec $|x|^2 = x_i x^i$. On en déduit les symboles de CHRISTOFFEL

$$\Gamma^i_{kl} = \lambda x^i g_{kl}\ ;$$

le tenseur de courbure se calcule ensuite par la formule usuelle

$$R_{ij}{}^k{}_l = \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^k_{jl} - \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^k_{il} + \Gamma^k_{ir}\Gamma^r_{jl} - \Gamma^k_{jr}\Gamma^r_{il} = \lambda\big\{\delta^k_i g_{jl} - \delta^k_j g_{il}\big\}\,,$$

ce qui est caractéristique des métriques à courbure λ constantes. On en déduit le tenseur de RICCI de la métrique

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{\Delta})_{ij} = \lambda(p-1)g_{ij}.$$

Ensuite, nous avons, pour le laplacien associé à l'opérateur $\mathbf{L}_{\lambda,n,p}$

$$\mathbf{\Delta} = g^{ij}\Big\{\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - \Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big\} = g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} - p\lambda x^l\frac{\partial}{\partial x^l}\,,$$

d'où l'on déduit la décomposition

$$\mathbf{L}_{\lambda,n,p} = \mathbf{\Delta} + \mathbf{X} \quad \text{avec} \quad \mathbf{X}^i = -\lambda(n-p)x^i.$$

Ceci nous permet de calculer

$$(\nabla\mathbf{X})_{ij} = -\lambda(n-p)\Big\{\delta_{ij} + \lambda\frac{2-\lambda|x|^2}{(1-\lambda|x|^2)^2}x_i x_j\Big\} \quad \text{et donc}$$

$$\mathbf{Ric}(\mathbf{L}_{\lambda,n,p})_{ij} = \lambda(n-1)\delta_{ij} + \frac{\lambda^2}{(1-\lambda|x|^2)^2}\Big\{2n-p-\lambda(n-1)|x|^2\Big\}x_i x_j.$$

Les valeurs propres du tenseur $\mathbf{Ric}(\mathbf{L}_{\lambda,n,p})_{ij}$ dans la métrique g_{ij} sont donc

$$\begin{cases} \lambda(n-1) & \text{avec multiplicité } p-1\text{, correspondant aux directions propres orthogonales à } x\,; \\ \lambda(n-1) + (n-p)\frac{\lambda^2|x|^2}{1-\lambda|x|^2} & \text{de multiplicité 1, correspondant à la direction propre } x. \end{cases}$$

Puisqu'on a choisi $n \geq p$, on voit que la plus petite valeur propre est $\lambda(n-1)$; de plus, si l'on calcule $\mathbf{Ric}(\mathbf{L}_{\lambda,n,p}) - \lambda(n-1)g$, on obtient $(n-p)\dfrac{\lambda^2}{(1-\lambda|x|^2)^2}x{\otimes}x$, c'est à dire $\dfrac{\mathbf{X}{\otimes}\mathbf{X}}{n-p}$. On a donc

$$\mathbf{X}{\otimes}\mathbf{X} = (n-p)\big(\mathbf{Ric}(\mathbf{L}_{\lambda,n,p}) - \lambda(n-1)g\big),$$

ce qui prouve que $\mathbf{L}_{\lambda,n,p}$ est un quasilaplacien de courbure $\lambda(n-1)$ et de dimension n. $\square$

2.— Le lemme de sous-harmonicité

Nous en arrivons maintenant à la principale application des notions introduites au chapitre précédent : dans un ouvert Ω de la variété $\mathbf{E}$, nous considérons une solution f de l'équation $\mathbf{L}(f) = 0$. (Nous dirons alors que f est *harmonique* dans Ω, ou, s'il est nécessaire de le préciser, $\mathbf{L}$-*harmonique*.) L'opérateur $\mathbf{L}$ étant elliptique, c'est nécessairement une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω, de sorte que les expressions qui vont suivre sont parfaitement définies :

Proposition 2.1.—Si le couple $(n, \mathbf{R})$ est admissible pour l'opérateur $\mathbf{L}$, et si f est une fonction $\mathbf{L}$-*harmonique* dans Ω, on a

$$|df|^2\mathbf{L}(|df|^2) \geq \frac{n}{2(n-1)}\left|d(|df|^2)\right|^2 + 2|df|^2\mathbf{R}(df, df).$$

Pour démontrer cette proposition, nous nous appuierons sur le lemme suivant :

Lemme 2.2.—Soient $\mathbf{M}$ une matrice symétrique réelle d'ordre p, $\mathbf{X}$ un vecteur de $\mathbf{R}^p$ et n un nombre réel strictement supérieur à p : on a

$$|\mathbf{MX}|^2 \leq \frac{n-1}{n}|\mathbf{X}|^2\left[|\mathbf{M}|^2 + \frac{1}{n-p}(\operatorname{tr}\mathbf{M})^2\right].$$

Preuve. Diagonalisons la matrice symétrique $\mathbf{M}$ dans une base orthonormée, et appelons ses valeurs propres λ_i, $(0 \leq i \leq p)$. Soient $\mathbf{X}^i$ les coordonnées du vecteur $\mathbf{X}$ dans cette base. L'inégalité du lemme **2.2.** s'écrit :

$$\sum_i \lambda_i(\mathbf{X}^i)^2 \leq \frac{n-1}{n}\sum_i(\mathbf{X}^i)^2\left[\sum_i \lambda_i^2 + \frac{1}{n-p}\left(\sum_i \lambda_i\right)^2\right].$$

Cette inégalité est réalisée dès que

$$\sup_i \lambda_i^2 \leq \frac{n-1}{n}\left[\sum_i \lambda_i^2 + \frac{1}{n-p}\left(\sum_i \lambda_i\right)^2\right].$$

Il suffit donc de démontrer que, pour tout i,

$$\lambda_i^2 \leq \frac{n-1}{n}\left[\sum_i \lambda_i^2 + \frac{1}{n-p}\left(\sum_i \lambda_i\right)^2\right]. \tag{1}$$

Démontrons le pour $i = 1$, par exemple : en posant $\sigma = \sum_{i=2}^{p} \lambda_i$, on a

$$\sigma^2 \leq (p-1) \sum_{i=2}^{p} \lambda_i^2 \quad ,$$

et l'inégalité (1) se ramène à

$$\lambda_1^2 \leq \frac{n-1}{n} \left[\lambda_1^2 + \frac{1}{p-1}\sigma^2 + \frac{1}{n-p}(\lambda_1 + \sigma)^2 \right].$$

Ceci s'écrit encore

$$(p-1)^2\lambda_1^2 + 2(n-1)(p-1)\lambda_1\sigma + (n-1)^2\sigma^2 \geq 0,$$

ce qui est immédiat. □

Preuve de la proposition 2.1. Puisque $\mathbf{L}f = 0$, nous pouvons écrire

$$\mathbf{L}(|df|^2) = 2\mathbf{\Gamma_2}(df, df) = 2\left[|\nabla\nabla f|^2 + \mathbf{R}(\mathbf{L})(df, df) \right],$$

et nous pouvons minorer le tenseur $\mathbf{R}(\mathbf{L})$ par $\frac{1}{n-p}\mathbf{X} \otimes \mathbf{X} + \mathbf{R}$. Or, puisque $\mathbf{L}f = 0$, on a aussi $\mathbf{X}(f) = -\mathbf{\Delta}(f) = -\mathrm{tr}\, \nabla\nabla f$, et la minoration précédente nous donne

$$|df|^2\mathbf{L}(|df|^2) \geq 2|df|^2 \left[\mathbf{R}(df, df) + |\nabla\nabla f|^2 + \frac{1}{n-p}(tr\nabla\nabla f)^2 \right].$$

Appliquons le lemme précédent avec $\mathbf{M} = \nabla\nabla f$ et $\mathbf{X} = df$. On obtient la minoration

$$|df|^2\mathbf{L}(|df|^2) \geq 2|df|^2\mathbf{R}(df, df) + 2\frac{n}{n-1}\left[\nabla\nabla f(df, df)\right]^2.$$

Il ne nous reste plus qu'à remarquer que

$$\left|d(|df|^2)\right|^2 = 4\left[\nabla\nabla f(df, df)\right]^2$$

pour obtenir la minoration annoncée. □

La propriété de sous-harmonicité suivante est alors une conséquence facile de la proposition **2.1.** :

Théorème 2.3.—Supposons que le couple $(n, r\mathbf{\Gamma})$ soit admissible pour $\mathbf{L}$, **où** n **est une constante**, supérieure ou égale à 2. Soit f une fonction $\mathbf{L}$-harmonique dans un ouvert $\mathbf{\Omega}$ de $\mathbf{E}$ et ε un nombre réel strictement positif. Pour tout réel $p \in [\frac{n-2}{n-1}, 1]$, on a

$$(\mathbf{L} - prI)\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^{\frac{p}{2}} \geq -p\varepsilon^{\frac{p}{2}} \sup(r, 0). \tag{2}$$

Preuve. Nous posons $q = \frac{p}{2}$, et nous utilisons la formule du changement de variables pour $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{L}(\varphi o g) = \varphi' o g \, \mathbf{L}(g) + \varphi'' o g \, |dg|^2 \quad , \tag{3}$$

que nous appliquons avec $g = |df|^2$ et $\varphi(x) = (x + \varepsilon)^q$. On obtient

$$\mathbf{L}\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^q = q\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^{q-2}\left\{\left[|df|^2 + \varepsilon\right]\mathbf{L}(|df|^2) + (q-1)\left|d|df|^2\right|^2\right\}.$$

Le lemme précédent nous donne une minoration de $\mathbf{L}(|df|^2)$, et nous obtenons

$$\mathbf{L}\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^q \geq$$

$$q\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^{q-2}\left\{2r|df|^2\left[|df|^2 + \varepsilon\right] + \left[\frac{n}{2(n-1)}\frac{|df|^2 + \varepsilon}{|df|^2} + q - 1\right]\left|d|df|^2\right|^2\right\}.$$

Mais, puisque $q \geq \frac{n-2}{2(n-1)}$, on a

$$\frac{n}{2(n-1)}\frac{|df|^2 + \varepsilon}{|df|^2} + q - 1 \geq 0 \quad ,$$

et on obtient la minoration

$$\begin{aligned}\mathbf{L}\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^q &\geq 2qr\,|df|^2\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^{q-1} \\ &= 2qr\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^q - 2qr\varepsilon\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^{q-1}.\end{aligned}$$

Or, puisque $q - 1$ est négatif, on a $\varepsilon^q \geq \varepsilon\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^{q-1}$, d'où finalement

$$\mathbf{L}\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^q \geq 2qr\left[|df|^2 + \varepsilon\right]^q - 2q\varepsilon^q \sup(r, 0) \quad ,$$

ce qu'on voulait démontrer. $\square$

Remarques.—

1. Lorsque $\mathbf{L}$ est le laplacien usuel de $\mathbf{R^n}$, cette propriété a été démontrée par STEIN et WEISS [StW] : il s'agit du lemme de sous-harmonicité qui est à la base de la théorie $\mathbf{H^1}$ dans $\mathbf{R^n}$.

2. Lorque $n = 2$, la même démonstration montre que, pour une fonction f $\mathbf{L}$-harmonique,
$$\mathbf{L}\left(\mathrm{Log}\left(|df^2| + \varepsilon\right)\right) \geq 2\mathrm{inf}\,(r, 0).$$
On retrouve ici une propriété classique des fonctions harmoniques dans le plan.

La proposition suivante donne une autre conséquence intéressante des propriétés de (courbure, dimension) de $\mathbf{L}$:

Proposition 2.4.— Plaçons nous dans les hypothèses du théorème **2.3.**, avec $n \geq 4$ et supposons de plus que $f > 0$ dans l'ouvert $\mathbf{\Omega}$. Alors, pour tout $q \in [\frac{n-4}{n-2}, 1]$, on a, toujours dans $\mathbf{\Omega}$,
$$\mathbf{L}(f^q) \leq 0 \qquad ; \qquad (\mathbf{L} - 2rI)\mathbf{L}(f^q) \leq 0.$$

Preuve. Tout d'abord, la formule du changement de variables (3) nous donne
$$\mathbf{L}(f^q) = qf^{q-1}\,\mathbf{L}(f) + q(q-1)f^{q-2}\,|df|^2 = q(q-1)f^{q-2}\,|df|^2 \quad ,$$
la dernière inégalité venant de l'harmonicité de f. On voit donc que $\mathbf{L}(f^q) \leq 0$, puisque $0 \leq q \leq 1$.

Ensuite, pour $\alpha = q - 2$, calculons $\mathbf{L}\left(f^\alpha |df|^2\right)$: on obtient
$$\alpha(\alpha-1)f^{\alpha-2}|df|^4 + 2\alpha f^{\alpha-1} df.d\left(|df|^2\right) + f^\alpha \mathbf{L}\left(|df|^2\right).$$

Grâce à la proposition **2.1.**, ceci se minore par
$$f^{\alpha-2}\left[\alpha(\alpha-1)|df|^4 + 2\alpha f\, df.d\left(|df|^2\right) + \frac{n}{2(n-1)}f^2\frac{\left||df|^2\right|^2}{|df|^2}\right] + 2rf^\alpha|df|^2.$$

Nous écrivons ensuite
$$\left[df.d\left(|df|^2\right)\right]^2 \leq |df|^2\left|d|df|^2\right|^2;$$

le coefficient de $f^{\alpha-2}$ dans l'expression précédente est alors positif dès que $\alpha(\alpha-1) \geq 0$ et que $(1-\frac{1}{\alpha})\frac{n}{2(n-1)} \geq 1$, ce qui, compte tenu de ce que $\alpha \leq -1$, se résume à $\alpha + 2 \geq \frac{n-4}{n-2}$. ▯

Remarque.—
Lorsque $n = \infty$, la proposition précédente devient :

Si $f > 0$ est harmonique dans l'ouvert Ω,

$$\mathbf{L}(f\mathrm{Log}f) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{L} - 2rI)\mathbf{L}(f\mathrm{Log}f) \geq 0.$$

La démonstration est exactement semblable à celle de la proposition précédente.

3.— Semigroupe de la chaleur et prolongements harmoniques.

La proposition **2.1.** du chapitre précédent et ses corollaires **2.3.** et **2.4.** s'appliquent à priori aux fonctions $\mathbf{L}$ -harmoniques sur $\mathbf{E}$; or, dans le cas des variétés compactes, les fonctions harmoniques sont constantes. Ce n'est donc pas à elles que nous allons appliquer ce résultat, mais à des fonctions définies sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$, harmoniques pour les opérateurs $\mathbf{L}^{\alpha,\beta}$ définis dans le chapitre précédent. Nous allons montrer ici comment construire de telles fonctions harmoniques lorsqu'on s'est donné leur restriction sur le bord $\mathbf{E}$ de $\mathbf{E}\times]0,\infty[$.

Cette construction ne se fait aisément (je veux dire par là sans faire appel à des résultats sophistiqués d'analyse) que dans deux cas : le cas où la variété $\mathbf{E}$ est compacte, et celui où l'opérateur $\mathbf{L}$, défini sur l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, y est essentiellement autoadjoint par rapport à une "bonne" mesure μ. Comme d'autre part nous n'appliquerons finalement les résultats de ce chapitre qu'au cas autoadjoint *, nous nous placerons dans cette dernière situation . C'est celle dans laquelle nous avons étudié les transformations de Riesz (cf [B2]), et nous renvoyons le lecteur à cette référence pour les démonstrations des propriétés élémentaires que nous énonçons ci-dessous.

---

* Sauf dans le chapitre **6**, auquel cas notre variété sera compacte.

Désormais, nous supposons donc que notre opérateur $\mathbf{L}$ est de la forme $\mathbf{\Delta} + \nabla h$, où h est une fonction sur $\mathbf{E}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$: dans ce cas, l'opérateur $\mathbf{L}$ est symétrique par rapport à la mesure $\mu(dx)$ dont la densité par rapport à la mesure riemannienne est égale à $e^{h(x)}$: pour toutes les fonctions f et g dans l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$, on a

$$\int_{\mathbf{E}} f\cdot \mathbf{L}g\, d\mu = \int_{\mathbf{E}} g\cdot \mathbf{L}f\, d\mu = -\int_{\mathbf{E}} \nabla f\cdot\nabla g\, d\mu. \tag{1}$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, nous appelerons $\langle f,g\rangle$ le produit scalaire dans l'espace $\mathbf{L}^2(\mu)$: $\langle f,g\rangle = \int_{\mathbf{E}} fg\, d\mu$. De même, nous noterons $\langle f\rangle$ l'intégrale $\int_{\mathbf{E}} f\, d\mu$. Quitte à ajouter une constante à la fonction h, ce qui ne change pas l'opérateur $\mathbf{L}$, on peut toujours supposer que la masse totale de la mesure μ est égale à 1 ou à l'infini.

La formule (1) nous montre que, pour tout élément f de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$, on a $\langle \mathbf{L}f, f\rangle \leq 0$. L'opérateur $\mathbf{L}$, défini sur l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$ admet donc une extension autoadjointe, l'extension de FRIEDRICH , qui est le générateur infinitésimal d'un semigroupe fortement continu $\mathbf{P}_t$ de contractions sur l'espace $\mathbf{L}^2(\mu)$.

L'hypothèse supplémentaire que nous ferons est que la variété $\mathbf{E}$, munie de la structure riemannienne associée à $\mathbf{L}$, est **complète**. Cette propriété s'exprime de façon intrinsèque en termes de l'opérateur carré du champ associé à $\mathbf{L}$: la variété $\mathbf{E}$ est complète si et seulement si il est possible de trouver sur $\mathbf{E}$ une suite (f_n) d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty$, telle que, pour tout n, $0 \leq f_n \leq 1$ et $\mathbf{\Gamma}(f_n, f_n) \leq \dfrac{1}{n}$.

Dans ces conditions, l'opérateur $\mathbf{L}$ est non seulement symétrique, mais il est essentiellement autoadjoint sur $\mathbf{L}^2(\mu)$: l'extension autoadjointe de $\mathbf{L}$ est unique et l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$ est dense, dans le domaine de cette extension, pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{D}} = \|f\|_2 + \|\mathbf{L}(f)\|_2 \,.$$

Les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui sont dans le domaine sont alors exactement les fonctions f telles que $\mathbf{L}f$ est dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Pour un couple (f,g) de telles fonctions, la formule d'intégration par parties (1) reste valable.

La décomposition spectrale de l'opérateur $\mathbf{L}$ dans l'espace $\mathbf{L}^2(\mu)$ s'écrit

$$\mathbf{L} = -\int_{[0,\infty[} \lambda\, dE_\lambda \quad ,$$

et l'espace propre E_0 correspond aux fonctions de $\mathbf{L}^2(\mu)$ solutions de $\mathbf{L}f = 0$, c'est à dire aux fonctions constantes : il est donc réduit à $\{0\}$ lorsque la mesure μ est de masse infinie, et est formé des fonctions constantes lorsqu'elle est de masse 1.

Le semigroupe $\mathbf{P}_t$ admet alors comme décomposition spectrale

$$\mathbf{P}_t = \int_{[0,\infty[} e^{-\lambda t}\, dE_\lambda \quad .$$

Il est formé de contractions symétriques de $\mathbf{L}^2(\mu)$, et c'est l'unique semigroupe fortement continu sur $\mathbf{L}^2(\mu)$ qui vérifie la propriété suivante :

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_t(f) = \mathbf{P}_t(\mathbf{L}f), \tag{2}$$

la dérivation précédente étant entendue au sens de l'espace $\mathbf{L}^2(\mu)$. Lorsque t tend vers l'infini, $\mathbf{P}_t f$ converge dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ vers la projection de la fonction f sur l'espace E_0, c'est à dire vers 0 si la mesure μ est de masse infinie, et vers $\langle f\rangle$ si c'est une mesure de probabilité.

En fait, compte tenu du caractère elliptique de l'opérateur $\mathbf{L}$, la fonction $(x,t) \mapsto \mathbf{P}_t\big(f(x)\big)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$, et l'égalité (2) peut être précisée en

$$\forall f \in \mathcal{C}_c^\infty; \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{P}_t(f) = \mathbf{L}\mathbf{P}_t(f) = \mathbf{P}_t(\mathbf{L}f)\ ; \tag{3}$$

la première égalité, qui est valable lorsque $t=0$ si f est dans l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$, reste valable pour $t>0$ pour toutes les fonctions du domaine de $\mathbf{L}$.

Le semigroupe $\mathbf{P}_t$ est un semigroupe sous-markovien de noyaux de transitions absoluments continus par rapport à la mesure $\mu(dx)$, c'est à dire qu'on peut représenter les opérateurs $\mathbf{P}_t$ par des noyaux $p_t(x,y)$ de telle façon que

$$\mathbf{P}_t f(x) = \int_{\mathbf{E}} f(y)\, p_t(x,y)\, \mu(dy)$$

où les fonctions $p_t(x,y)$ sont symétriques en (x,y), positives, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en (t,x,y) et satisfont à

$$\int_{\mathbf{E}} p_t(x,y)\, \mu(dy) \leq 1 \quad :$$

ce sont des noyaux sous-markoviens.

Désormais, nous supposerons en outre que le tenseur de Ricci $\mathbf{R}(\mathbf{L})$ de l'opérateur $\mathbf{L}$ est minoré, c'est à dire qu'il existe une constante r telle que le couple (∞,r) soit un couple (dimension, courbure) admissible pour $\mathbf{L}$. Cette constante r est fixée dans ce qui suit.

Nous savons qu'alors que le semigroupe $\mathbf{P}_t$ est markovien, c'est à dire que

$$\forall t, \qquad \int_{\mathbf{E}} p_t(x,y)\,\mu(dy) = 1 ,$$

où encore que $\mathbf{P}_t(1) = 1$ (cf [B3], par exemple). Si la constante r est strictement positive, nous savons également que la mesure μ est de masse finie, donc de masse 1 d'après nos conventions.

De plus, si r désigne un minorant du tenseur de Ricci de $\mathbf{L}$, on sait que, pour toutes les fonctions f de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$,

$$|d(\mathbf{P}_t f)| \leq e^{-rt}\mathbf{P}_t|df|. \tag{4}$$

Rappelons que $|df|$ désigne la longueur de la forme df dans la structure riemannienne associée à $\mathbf{L}$.) (cf [B3] ou [B2]). Comme plus haut, en vertu du caractère autoadjoint de $\mathbf{L}$, cette inégalité se prolonge à toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ du domaine de $\mathbf{L}$.

Associé à ce semigroupe markovien sur $\mathbf{E}$, nous pouvons introduire le processus de diffusion gouverné par $\mathbf{L}$; pour fixer les idées, nous le supposerons construit sur l'espace canonique : si Ξ désigne l'espace des fonctions continues $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{E}$, et $X_t(\xi) = \xi(t)$ le processus des coordonnées. Pour tout point x de $\mathbf{E}$, il existe sur Ξ une unique probabilité $\mathbf{P}^x$ telle que, pour toute fonction borélienne sur $\mathbf{E}$, et pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, on ait

$$\mathbf{P}_t f(x) = \int_\Xi f(X_t)\,d\mathbf{P}^x = E^x[f(X_t)].$$

Dans ces conditions, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}$ et pour toute loi $\mathbf{P}^x$, le processus

$$M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \mathbf{L}f(X_s)\,ds$$

est une martingale locale continue, nulle en 0, dont le processus croissant vaut

$$[M^f, M^f]_t = 2\int_0^t |df|^2(X_s)\,ds.$$

Remarquons tout de suite que, si f, $\mathbf{L}(f)$ et $|df|^2$ sont des fonctions bornées, c'est une vraie martingale, bornée sur les intervalles de temps compacts.

Nous noterons $\mathbf{P}^\mu$ la mesure $\int \mathbf{P}^x\,\mu(dx)$ sur l'espace Ξ, et $E^\mu(Z)$ la moyenne, sous $\mathbf{P}^\mu$, d'une variable aléatoire Z définie sur Ξ. On remarquera que $\mathbf{P}^\mu$ n'est une mesure de probabilité que si la mesure μ elle même en est une.

Différents types de prolongements harmoniques

Dans ce paragraphe, à partir des solutions de l'équation de la chaleur, nous allons construire des fonctions $f(x,t)$ définies sur le demi-espace $\mathbf{E} \times [0,\infty[$, solutions des équations

$$\mathbf{L}^\sigma(f(x,t) = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\sigma\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L})f(x,t) = 0.$$

Nous dirons que de telles fonctions sont σ-harmoniques.

Soit $\mu_t(du)$ le semigroupe stable d'ordre $\frac{1}{2}$ sur $\mathbf{R}_+$:

$$\mu_t(du) = \pi^{-\frac{1}{2}} t u^{-\frac{3}{2}} exp\Big(-\frac{t^2}{4u}\Big)\, du.$$

C'est un semigroupe de convolution de probabilités sur $\mathbf{R}_+$, qui satisfait à

$$\forall c \geq 0, \qquad \int_0^\infty e^{-c^2 s}\, \mu_t(ds) = e^{-ct} \tag{5}$$

Considérons les opérateurs suivants, définis pout tout $\sigma > 0$ et pour toute fonction f de $\mathbf{L}^2(\mu)$,

$$\mathbf{Q}_t^\sigma = e^{\sigma t} \int_0^\infty \mathbf{P}_u(f) e^{-\sigma^2 u}\, \mu_t(du).$$

Ils vérifient les propriétés suivantes :

Proposition 3.1.—

(i) Pour tout $\sigma > 0$, la famille $t \mapsto \mathbf{Q}_t^\sigma$ est un semigroupe markovien, symétrique sur $\mathbf{L}^2(\mu)$, de générateur infinitésimal

$$\mathbf{C}^\sigma = \sigma I - (\sigma^2 I - \mathbf{L})^{\frac{1}{2}} \ ;$$

(ii) Il existe des constantes universelles $c(\sigma)$ telles que, pour tout $p \in [1,\infty]$ et pour toute fonction f de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$,

$$||\mathbf{C}^\sigma f||_p \leq c(\sigma)\Big\{||f||_p + ||\mathbf{L}f||_p\Big\}.$$

(iii) Pour toute fonction f de l'espace $\mathcal{C}_c^\infty$, la fonction $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}_t^\sigma(f)(x)$ est continue sur $\mathbf{E} \times [0,\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E} \times]0,\infty[$, et solution de l'équation $\mathbf{L}^\sigma \tilde{f}(x,t) = 0$.

Définition.—*Le semigroupe* $\mathbf{Q}_t^\sigma$ *sera appelé le semigroupe de* CAUCHY *d'ordre* σ *associé à* $\mathbf{L}$.

Preuve. Tout d'abord, il est clair sur la définition de $\mathbf{Q}_t^\sigma$ que, si f est une fonction positive, il en est de même de $\mathbf{Q}_t^\sigma(f)$. D'autre part, puisque $\mathbf{P}_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, la formule (5) nous montre que $\mathbf{Q}_t^\sigma(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Ceci montre que l'opérateur $\mathbf{Q}_t^\sigma$ est bien un opérateur markovien.

Rappelons que la décomposition spectrale de $\mathbf{P}_t$ s'écrit $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dE_\lambda$. On a donc

$$\mathbf{Q}_t^\sigma = e^{\sigma t} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\lambda+\sigma^2)u}\, \mu_t(du) dE_\lambda = \int_0^\infty e^{\lambda t(\sigma - \sqrt{\lambda+\sigma^2})}\, dE_\lambda .$$

Par conséquent, dans $\mathbf{L}^2(\mu)$,

$$\mathbf{Q}_t^\sigma = \exp t(\sigma - \sqrt{\sigma^2\mathbf{I} - \mathbf{L}}) \,;$$

Les opérateurs $\mathbf{Q}_t^\sigma$ forment donc bien un semigroupe d'opérateurs bornés sur $\mathbf{L}^2(\mu)$, de générateur infinitésimal $\mathbf{C}^\sigma = \sigma - \sqrt{\sigma^2\mathbf{I} - \mathbf{L}}$. Ceci prouve **i**).

La proposition **ii**) se trouve dans [B2], proposition 2.1. p.148. Elle repose uniquement sur un calcul élémentaire de transformées de LAPLACE et elle n'utilise pas la symétrie des semigroupes; il suffit de démontrer que

$$\|\sqrt{\sigma^2\mathbf{I} - \mathbf{L}}(f)\|_p \le c(\sigma)\big[\|f\|_p + \|\mathbf{L}f\|_p\big] \,,$$

ou encore que $\|\sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{L}}(f)\|_p \le c\big[\|f\|_p + \|\mathbf{L}f\|_p\big]$; or, la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$ est transformée de LAPLACE d'une mesure bornée $n(du)$, ce qui peut s'écrire

$$\sqrt{1+\lambda} = (1+\lambda) \int_0^\infty e^{-\lambda u}\, n(du) \,.$$

On a alors $\sqrt{\mathbf{I} - \mathbf{L}}f = \displaystyle\int_0^\infty \mathbf{P}_u(\mathbf{I} - \mathbf{L})(f)\, n(du)$, et il ne reste plus qu'à écrire que $\mathbf{P}_u$ est une contraction de $\mathbf{L}^p(\mu)$ et que n est une mesure bornée.

Enfin, en ce qui concerne l'assertion **iii**), nous recopions à nouveau [B2] en écrivant, pour une fonction f de $\mathbf{L}^2(\mu)$,

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{Q}_t^\sigma(f) = \mathbf{C}^\sigma \mathbf{Q}_t^\sigma(f) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{Q}_t^\sigma(f) = (\mathbf{C}^\sigma)^2 \mathbf{Q}_t^\sigma(f) \,,$$

Or, l'opérateur $\mathbf{C}^\sigma$ vérifie $(\mathbf{C}^\sigma)^2 - 2\sigma\mathbf{C}^\sigma + \mathbf{L} = 0$; on en tire

$$\mathbf{L}^\sigma \mathbf{Q}_t^\sigma(f) = (\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\sigma\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L})\mathbf{Q}_t^\sigma(f) = \big((\mathbf{C}^\sigma)^2 - 2\sigma\mathbf{C}^\sigma + \mathbf{L}\big)\mathbf{Q}_t^\sigma(f) = 0 \,.$$

La fonction $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}_t^\sigma(f)(x)$ est donc solution, au sens de $\mathbf{L}^2(\mu)$, de l'équation différentielle elliptique $\mathbf{L}^\sigma \tilde{f} = 0$; elle est donc solution de cette équation au sens des distributions. On en déduit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E} \times \mathbf{R}_+$, et solution de l'équation au sens ordinaire.

D'autre part, on a

$$||\mathbf{Q}_t^\sigma f - f||_\infty \leq \int_0^t ||\mathbf{Q}_t^\sigma \mathbf{C}^\sigma f||_\infty \, dt \leq t \, ||\mathbf{C}^\sigma f||_\infty \, ;$$

On en déduit, grâce à la majoration de la partie **ii)**, la continuité à droite en $t = 0$ de la fonction $\tilde{f}$; la même méthode vaut pour toutes ses dérivées successives par rapport à t. □

Remarques.—

1 La définition des semigroupes $\mathbf{Q}_t^\sigma$ à partir du semigroupe $\mathbf{P}_t$ peut se faire pour n'importe quel semigroupe $\mathbf{P}_t$ (sous)-markovien, non nesseçairement symétrique. On obtient alors des semigroupes (sous)-markoviens associés aux solutions des équations $\mathbf{L}^\sigma = 0$, où $\mathbf{L}$ est le générateur infinitésimal de $\mathbf{P}_t$. Mais la justification de cette dernière assertion est alors beaucoup plus délicate.

2 Contrairement à $\mathbf{L}$, les opérateurs $\mathbf{C}^\sigma$ ne sont pas des opérateurs locaux : on obtient une expression de $\mathbf{C}^\sigma$ en fonction de $\mathbf{P}_t$ en écrivant

$$\mathbf{C}^\sigma f = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} (\mathbf{P}_u f - f) e^{-\sigma^2 u} \, du \, ,$$

ou encore, en rappelant que $p_t(x,y)$ désigne la densité de $\mathbf{P}_t$ par rapport à la mesure μ,

$$\mathbf{C}^\sigma f(x) = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbf{E}} \int_0^\infty u^{-\frac{3}{2}} p_u(x,y) \big(f(y) - f(x)\big) e^{-\sigma^2 u} \, \mu(dy) du \, .$$

3 Lorsque $\sigma \to \infty$, l'opérateur $\mathbf{Q}_{2\sigma t}^\sigma$ converge vers l'opérateur $\mathbf{P}_t$, dans $\mathbf{L}^2(\mu)$ au sens faible ($\forall f \in \mathbf{L}^2(\mu), \mathbf{Q}_{2\sigma t}^\sigma f \to \mathbf{P}_t f$, dans $\mathbf{L}^2(\mu)$). Cela se voit immédiatement sur la décomposition spectrale. En ce sens, les semigoupes de CAUCHY de paramètre σ sont des semigroupes intermédiaires entre le semigroupe de la chaleur $\mathbf{P}_t$ et le semigroupe de CAUCHY "classique" $\mathbf{Q}_t^0$. Tous les semigroupes de CAUCHY sont, par définition, subordonnés au semigroupe $\mathbf{P}_t$. En fait, lorsque $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, le semigroupe $\mathbf{Q}_t^{\sigma_1}$ est subordonné au semigoupe $\mathbf{Q}_t^{\sigma_2}$, à l'aide d'un semigroupe de convolution de probabilités. (On peut calculer le subordinateur à l'aide d'une table de transformées de LAPLACE, mais la formule exacte nous importe peu *.) On dispose donc ainsi de toute une famille de semigroupes markoviens, subordonnés les uns aux autres, intermédiaires entre le semigroupe de la chaleur $\mathbf{P}_t$ et le semigroupe de CAUCHY associé $\mathbf{Q}_t^0$.

Dans [B2], nous avons introduit, à coté des semigroupes markoviens $\mathbf{Q}_t^\sigma$, les semigroupes (positifs, mais non markoviens) $\mathbf{Q}_t^{\sigma,\delta} = \exp t(\sigma-\delta)\mathbf{Q}_t^\delta$, définis pour tout $\delta > 0$ et tout σ réel; de la même manière, la fonction $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}_t^{\sigma,\delta}(f)(x)$ est solution de l'équation $\mathbf{L}_\delta^\sigma = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\sigma\dfrac{\partial}{\partial t} + (\sigma^2-\delta^2)\mathbf{I} + \mathbf{L} = 0$.

Les nouveaux opérateurs $\mathbf{L}_\delta^\sigma = \mathbf{L}^s + (\sigma^2-\delta^2)\mathbf{I}$ ainsi définis sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$, qu'on ne doit pas confondre avec les opérateurs $\mathbf{L}^{\sigma,\delta} = e^{2\delta t}\mathbf{L}^\sigma$ du chapitre précédent, vérifient

$$\mathbf{L}_\delta^\sigma = \Big(\frac{\partial}{\partial t}-(\sigma-\delta)\mathbf{I}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}-(\sigma+\delta)\mathbf{I}\Big)+\mathbf{L} = \Big(\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{C}^\delta-(\sigma-\delta)\mathbf{I}\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{C}^\delta-(\sigma+\delta)\mathbf{I}\Big). \tag{6}$$

On notera d'autre part la manière simple dont ils commutent avec les multiplications par des exponentielles :

$$\mathbf{L}_\delta^\sigma(e^{\beta t}f) = e^{\beta t}\mathbf{L}_\delta^{\sigma-\beta}(f). \tag{7}$$

Remarques.—

1 Lorsque σ est négatif, le semigroupe $\mathbf{Q}_t^{\sigma,|\sigma|} = \exp(-2|\sigma|t)\mathbf{Q}_t^{|\sigma|}$ donne les solutions de l'équation $\mathbf{L}^\sigma f = 0$; mais c'est alors un semigroupe sous-markovien.

2 Il arrive fréquemment que le spectre de $\mathbf{L}$ soit inclus dans $\{0\}\cup[\lambda_0,\infty[$, avec $\lambda_0 > 0$ (On a alors un trou spectral). Désignons alors par $\mathbf{L}_0^2$

---

* La formule exacte est en fait $\mathbf{Q}_t^{\sigma_1} = \displaystyle\int_0^\infty \mathbf{Q}_s^{\sigma_2}\,\nu_t^{\sigma_1,\sigma_2}(ds)$, avec

$$\nu_t^{\sigma_1,\sigma_2}(ds) = \Big\{\delta_t(ds) + \frac{t}{2}(\sigma_2^2-\sigma_1^2)h\big((\sigma_2^2-\sigma_1^2)\frac{s^2-t^2}{4}\big)1_{s>t}ds\Big\}\exp(t\sigma_1 - s\sigma_2)$$

où $h(x)$ désigne la fonction $\displaystyle\sum_n \frac{x^n}{n!(n+1)!}$.

l'orthogonal de l'espace propre $\mathbf{E}_0$ dans $\mathbf{L}^2(\mu)$. Les semigroupes $\mathbf{Q}_t^{\sigma,i\delta}$ sont bornés sur $\mathbf{L}_0^2$ pour tout δ compris entre 0 et δ_0. (Ce ne sont alors plus des semigroupes positifs). Ils correspondent aux solutions de l'équation $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\sigma\frac{\partial}{\partial t} + (\sigma^2+\delta^2)\mathbf{I} + \mathbf{L})f = 0.$

Désignons par $\mathbf{X}_t^x$ le processus de diffusion sur $\mathbf{E}$, de générateur $\mathbf{L}$, décrit plus haut. Considérons d'autre part un mouvement brownien réel indépendant $\mathbf{B}_t^a$, issu de $a > 0$. (Il s'agit du mouvement brownien des analystes, de générateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ et de processus croissant associé $\langle \mathbf{B}_t^a, \mathbf{B}_t^a\rangle = 2t$.)

Le processus $\mathbf{B}_t^a - 2\sigma t$ est une diffusion sur la droite réelle, de générateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\sigma\frac{\partial}{\partial t}$, issue de a. Appelons $T^{a,\sigma}$ le temps d'arrêt

$$T^{a,\sigma} = \inf\{s; \mathbf{B}_s^a - 2\sigma s = 0\}.$$

Le processus $\mathbf{Z}_s^{x,a} = \left(X_{s\wedge T^{a,\sigma}}^x, B_{s\wedge T^{a,\sigma}}^a - 2\sigma s \wedge T^{a,\sigma}\right)$ est une diffusion sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$, de générateur $\mathbf{L}^\sigma$, issue du point (x,a) ; c'est ce que nous résumons dans la proposition suivante :

Proposition 3.3.— Soit $f(x,t)$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$, continue en $t=0$. Le processus

$$\mathbf{M}_t^f = f(\mathbf{Z}_t^{x,a}) - f(x,a) - \int_0^{t\wedge T^{a,\sigma}} (\mathbf{L}^\sigma f)(\mathbf{Z}_s^{x,a})\, ds$$

est une martingale locale continue, nulle en 0, dont le processus croissant associé est donné par la formule

$$d\langle \mathbf{M}^f, \mathbf{M}^f\rangle_t = 2\, 1_{t<T^{a,\sigma}} \left[(\frac{\partial}{\partial t}f)^2 + |\nabla_x f|^2\right](\mathbf{Z}_s^{x,a})\, ds.$$

Preuve. On se ramène par arrêt au cas où f est à support compact dans $E\times]0,\infty[$, puis par convergence uniforme au cas où c'est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $g(x)h(t)$; c'est alors une conséquence immédiate de l'indépendance des processus $\mathbf{B}_t^a$ et $\mathbf{X}_t^x$, et des propriétés de diffusion de ces deux processus pris séparément. $\square$

Corollaire 3.4.—Soit f une fonction bornée sur $\mathbf{E}$; on a

$$E[f(X^x_{T^{a,\sigma}})] = \mathbf{Q}^\sigma_a(f)(x).$$

Preuve. Il suffit de démontrer le corollaire lorsque f est dans l'espace $\mathcal{C}^\infty_c$. Posons alors $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}^\sigma_t(f)(x)$. Nous savons que c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$, continue en $t=0$, solution de $\mathbf{L}^\sigma(\tilde{f}) = 0$.

En appliquant la proposition précédente, on voit que le processus $\mathbf{M}^f_t = \tilde{f}(\mathbf{Z}^{x,a}_t) - \tilde{f}(x,a)$ est une martingale locale. Celle-ci est bornée par hypothèse, et c'est donc une vraie martingale.

Il ne nous reste plus qu'à écrire que $E[M^f_{T^{a,\sigma}}] = 0$ pour obtenir le résultat. $\square$

Corollaire 3.5.— Soit $f(x,t)$ une fonction continue bornée sur $\mathbf{E}\times[0,\infty[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$; supposons que f satisfasse à $\mathbf{L}^\sigma f \geq 0$. On a alors

$$\forall t \geq 0\,;\ \forall u \geq 0\,; f(x,t+u) \leq \mathbf{Q}^\sigma_t\big(f(.,u)\big)(x).$$

Preuve. Il suffit de démontrer le corollaire lorsque $u=0$. Soit alors $\mathbf{Y}_s$ le processus $f(\mathbf{Z}^{x,t}_s)$: d'après la proposition **3.3.**, c'est une sous-martingale, bornée par hypothèse. On a alors

$$E[Y_{T^{a,\sigma}}] \geq E[Y_0] = f(x,t).$$

Mais le corollaire **3.4.** permet de calculer
$E[Y_{T^{a,\sigma}}] = E[f(Z^x_{T^{t,\sigma}})] = \mathbf{Q}^\sigma_t\big(f(.,0)\big)(x)$. $\square$

Remarque.—
Le corollaire précédent nous dit que, lorsque $\mathbf{L}^\sigma f \geq 0$, on a $\mathbf{Q}^\sigma_t f(x,u) \geq f(x,t+u)$. Ces deux quantités étant égales lorsque $t=0$, on peut dériver cette inégalité en $t=0$, du moins lorsque $f(.,u)$ est dans le domaine de l'opérateur $\mathbf{C}^\sigma$. On obtient alors $\mathbf{C}^\sigma f \geq \dfrac{\partial}{\partial t} f$, ou encore $\big(\mathbf{C}^\sigma - \dfrac{\partial}{\partial t}\big) f \geq 0$. Or, d'après (6), l'opérateur $\mathbf{L}^\sigma$ se factorise en

$$\mathbf{L}^\sigma = \big(\mathbf{C}^\sigma - \frac{\partial}{\partial t}\big)\big(2\sigma\mathbf{I} - \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{C}^\sigma\big).$$

On voit donc que le corollaire précédent provient en fait de ce que l'opérateur $\left(2\sigma\mathbf{I} - \dfrac{\partial}{\partial t} - \mathbf{C}^\sigma\right)^{-1}$ est un opérateur positif sur $\mathbf{E}\times]0,\infty[$. On peut le voir directement, au moins lorsque $\sigma > 0$, grâce à l'expression

$$\left(2\sigma\mathbf{I} - \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{C}^\sigma\right)^{-1}(f)(x,t) = \int_0^\infty \mathbf{Q}_u^\sigma f(x,t+u)\exp(-2\sigma u)\,du.$$

De la même manière, on montrerait que, si f est une fonction qui satisfait à $\mathbf{L}_\delta^\sigma f \geq 0$ et qui est telle que $e^{(\sigma-\delta)t}f$ soit bornée, alors

$$(\mathbf{C}^\delta + (\sigma-\delta)\mathbf{I} - \frac{\partial}{\partial t})f \geq 0.$$

4.— Inégalités maximales dans $\mathbf{L}^1(\mu)$

Lorsqu'on a un semigroupe $\mathbf{P}_t$ markovien et symétrique sur un espace mesuré $(E;\mathcal{E};\mu)$, il est bien connu que, pour tout $p \in]1,\infty[$, il existe une constante c_p pour laquelle l'inégalité maximale suivante a lieu :

$$\forall f \in \mathbf{L}^p(\mu), \qquad ||\sup_t |\mathbf{P}_t f|||_p \leq c_p ||f||_p.$$

Cette inégalité devient fausse lorsque $p = 1$ ou $p = \infty$. En particulier, dans $\mathbf{R}^n$, pour le semigroupe de CAUCHY usuel $\mathbf{Q}_t$ dont le générateur infinitésimal est $-(-\Delta)^{1/2}$, on a

$$||\sup_t |\mathbf{Q}_t f|||_1 \leq c(n)\{||f||_1 + \sum_i ||R_i f||_1\}, \tag{1}$$

où R_i désigne la $i^{i\grave{e}me}$ transformation de RIESZ dans $\mathbf{R}^n$, c'est à dire l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(-\Delta)^{-1/2}$. L'inégalité inverse a également lieu, à savoir

$$\forall i, \quad ||R_i f||_1 \leq c(n)||\sup_t |\mathbf{Q}_t f|||_1.$$

L'inégalité (1) s'écrit encore

$$||\sup_t |\mathbf{Q}_t f|||_1 \leq c(n)\Big[||f||_1 + ||d(-\Delta)^{1/2} f||_1\Big],$$

c'est à dire, en appelant $\mathbf{C}$ la générateur du semigroupe $\mathbf{Q}_t$,

$$||\sup_t |\mathbf{Q}_t \mathbf{C} f|||_1 \leq c(n)\Big[||\mathbf{C} f||_1 + ||df||_1\Big].$$

Le but de ce chapitre est de montrer que, si l'on remplace Δ par un opérateur $\mathbf{L}$ de courbure et de dimension finies, une inégalité du type (1) reste valable, moyennant quelques modifications, et en particulier à condition de remplacer le semigroupe de CAUCHY $\mathbf{Q}_t$ par l'un des semigroupes $\mathbf{Q}_t^\sigma$ définis au chapitre précédent.

Pour démontrer de telles inégalités, nous nous appuyerons sur le lemme de sous-harmonicité du chapitre 2, que nous appliquerons aux opérateurs introduits au chapitre 3. Commençons donc par rappeler la situation dans laquelle nous nous trouvons.

L'opérateur elliptique $\mathbf{L}$ munit la variété $\mathbf{E}$ d'une structure riemannienne. Comme dans le chapitre 3, nous supposerons que la variété $\mathbf{E}$ est complète, et que $\mathbf{L}$ est symétrique par rapport à la mesure $\mu(dx)$.

En outre, nous ferons l'hypothèse que $\mathbf{L}$ admet un couple (dimension, courbure) admissible constant (n,r), avec $n \geq 2$. Rappelons tout d'abord quelques notations.

Sur $\mathbf{E}\times\mathbf{R}_+$, le point générique est en général noté (x,t), la variable x étant dans $\mathbf{E}$ et la variable t étant dans $\mathbf{R}_+$. Lorsque $f(x,t)$ est une fonction sur $\mathbf{E}\times\mathbf{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, nous noterons $|\tilde\nabla f|^2$ la quantité $(\frac{\partial}{\partial t}f)^2 + |\nabla_x f|^2$.

Sur l'espace $\mathbf{E}\times\mathbf{R}_+$, nous avons introduit au chapitre précédent les opérateurs suivants :

$$\mathbf{L}^\sigma = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2\sigma\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{L} \quad \text{et}$$

$$\mathbf{L}^{\sigma,\beta} = e^{2\beta t}\mathbf{L}^\sigma \quad ; \quad \mathbf{L}_\delta^\sigma = \mathbf{L}^\sigma + (\sigma^2-\delta^2)\mathbf{I}.$$

Rappelons les résultats du chapitre 1 : lorsque

$$\sigma^2 \geq (n-1)r \quad \text{et que} \quad (n-1)\beta = \sigma + \vartheta\sqrt{\sigma^2-(n-1)r}, \tag{2}$$

avec $|\vartheta| \leq 1$, l'opérateur $\mathbf{L}^{\sigma,\beta}$ admet $(n', e^{2\beta t}r')$ comme couple (dimension, courbure) admissible, où

$$n' = 2 + \frac{n-1}{1-\vartheta^2} \quad \text{et} \quad r' = r - 2\sigma\beta.$$

Choisissons $\sigma \geq 0$ de telle façon que $\sigma^2 \geq -\frac{n-1}{n-2}r$ et $\sigma^2 \geq n(n-1)r$; prenons également $\beta = \frac{\sigma}{n-1}$, de façon à avoir $\vartheta = 0$, $n' = n+1$ et $r' = r - \frac{2\sigma^2}{n+1}$. Soit alors une fonction f sur $\mathbf{E}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact ; appelons $\tilde f$ la fonction $\tilde f(x,t) = \mathbf{Q}_t^\sigma f(x)$. Dans ce cas, nous avons

$$|\tilde\nabla\tilde f|^2 = |\nabla\mathbf{Q}_t^\sigma f|^2 + |\mathbf{Q}_t^\sigma\mathbf{C}^\sigma f|^2.$$

On en déduit une majoration

$$\begin{aligned}\sup_x|\tilde{\nabla}\tilde{f}| &\leq ||C\sigma f||_\infty + e^{t(\sigma-\sqrt{\sigma^2+r})}||df||_\infty \\ &\leq C\Big\{||f||_\infty + ||\mathbf{L}f||_\infty + e^{t(\sigma-\sqrt{\sigma^2+r})}||df||_\infty\Big\} \end{aligned} \tag{3}$$

On a $\mathbf{L}^\sigma f = 0$, et donc, pour tout β, $\mathbf{L}^{\sigma,\beta}\tilde{f} = 0$. Or, pour la connexion $\tilde{\nabla}^\beta$ sur $\mathbf{E}\times\mathbf{R}_+$ associée à l'opérateur $\mathbf{L}^{\sigma,\beta}$, on a

$$|\tilde{\nabla}^\beta\tilde{f}|^2 = e^{2\beta t}|\tilde{\nabla}\tilde{f}|^2;$$

appliquons le lemme de sous-harmonicité du chapitre 2 : nous obtenons, pour $p = \dfrac{n'-1}{n'-2} = \dfrac{n-1}{n}$ et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Big\{\mathbf{L}^{\sigma,\beta} - pr'e^{2\beta t}\mathbf{I}\Big\}\Big\{e^{2\beta t}||\tilde{\nabla}\tilde{f}||^2+\varepsilon\Big\}^{p/2} \geq -p\sup\{r',0\} = 0, \tag{4}$$

la dernière égalité provenant en fait de

$$\sigma^2 \geq n(n-1)r \geq \frac{n-1}{2}r \qquad \Rightarrow \qquad r' \leq 0.$$

En posant $\varepsilon_t = \varepsilon e^{-2\beta t}$, (3) s'écrit encore

$$\Big\{\mathbf{L}^\sigma - pr'\mathbf{I}\Big\}\Big\{e^{p\beta t}\Big[|\tilde{\nabla}\tilde{f}|^2+\varepsilon_t\Big]^{p/2}\Big\} \geq 0.$$

Posons alors $\delta = \sqrt{\sigma^2+pr'} = \sqrt{\dfrac{n-2}{n}\sigma^2 + \dfrac{n-1}{n}r}$, ce qui est possible d'après notre choix de σ. L'inégalité précédente s'écrit encore

$$\mathbf{L}^\sigma_\delta e^{p\beta t}\Big[|\tilde{\nabla}\tilde{f}|^2+\varepsilon_t\Big]^{p/2} \geq 0,$$

ou encore, d'après la formule (7) du chapitre précédent,

$$\mathbf{L}^\delta e^{\gamma t}\Big[|\tilde{\nabla}\tilde{f}|^2+\varepsilon_t\Big]^{p/2} \geq 0\,;$$

dans la dernière formule, on a posé $\gamma = p\beta+\delta-\sigma = \sqrt{\dfrac{n-2}{n}\sigma^2 + \dfrac{n-1}{n}r} - \dfrac{n-1}{n}\sigma$.
Remarquons que $\gamma \leq 0$ puisque l'on a choisi $\sigma^2 \geq n(n-1)r$.

Nous avons donc obtenu le résultat suivant :

Proposition 4.1.—Pour tout $\sigma \geq 0$ vérifiant $\sigma^2 \geq \sup\{-\frac{n-1}{n-2}r; n(n-1)r\}$, posons $\delta = \sqrt{\frac{n-2}{n}\sigma^2 + \frac{n-1}{n}r}$ et $\gamma = \delta - \frac{n-1}{n}\sigma$; pour tout $\varepsilon > 0$, notons $\varepsilon_t = \varepsilon e^{-2\frac{n}{n-1}t}$.

Soit alors f une fonction sur $\mathbf{E}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact et soit $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}_t^\sigma f(x)$. On a

$$\mathbf{L}^\delta\left[e^{\gamma t}\left(|\tilde{\nabla}\tilde{f}|^2 + \varepsilon_t\right)^{\frac{n-1}{2n}}\right] \geq 0.$$

Corollaire 4.2.—Avec les mêmes notations que précédement,

$$\left\{|\mathbf{Q}_t^\sigma \mathbf{C}^\sigma f|^2 + |\nabla \mathbf{Q}_t^\sigma f|^2\right\}^{\frac{n-1}{2n}} \leq e^{-\gamma t}\mathbf{Q}_t^\delta\left\{(\mathbf{C}^\sigma f)^2 + |\nabla f|^2\right\}^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Preuve du corollaire. Remarquons que, grâce à la majoration (3), la fonction $e^{\gamma t}\left(|\tilde{\nabla}\tilde{f}|^2 + \varepsilon_t\right)^{\frac{n-1}{2n}}$ est bornée : en effet, γ est négatif, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, ce qui permet de majorer les termes en $||f||_\infty$ et en $||\mathbf{L}f||_\infty$, et le coefficient de $||df||_\infty$ sera majoré dès que $\frac{n-1}{n}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + r}) + \gamma \leq 0$, ce qui s'écrit $\sigma^2 \geq (n-1)r$.

On peut donc appliquer le corollaire **3.5.** du chapitre précédent pour obtenir, pour tout $\varepsilon > 0$, la majoration

$$\left\{|\mathbf{Q}_t^\sigma \mathbf{C}^\sigma f|^2 + |\nabla \mathbf{Q}_t^\sigma f|^2 + \varepsilon_t\right\}^{\frac{n-1}{2n}} \leq e^{-\gamma t}\mathbf{Q}_t^\delta\left\{(\mathbf{C}^\sigma f)^2 + |\nabla f|^2 + \varepsilon\right\}^{\frac{n-1}{2n}}.$$

Il ne reste plus qu'a faire tendre ε vers 0 pour obtenir le résultat. □

Corollaire 4.3..—Avec les mêmes notations que plus haut, posons $\gamma_1 = \frac{n}{n-1}\gamma$. Il existe une constante C, **ne dépendant que de** n, telle que

$$||\sup_t e^{\gamma_1 t}|\mathbf{Q}_t^\sigma \mathbf{C}^\sigma f|||_1 \leq C(n)\left\{||\mathbf{C}^\sigma f||_1 + ||\nabla f||_1\right\}.$$

Preuve. La majoration précédente nous permet d'écrire

$$e^{\gamma_1 t}|\mathbf{Q}_t^\sigma \mathbf{C}^\sigma f| \leq \left\{\mathbf{Q}_t^\delta\left[(\mathbf{C}^\sigma f)^2 + |\nabla f|^2\right]^{\frac{n-1}{2n}}\right\}^{\frac{n}{n-1}};$$

il ne nous reste plus alors qu'à appliquer le lemme maximal au semi-groupe $\mathbf{Q}_t^\delta$, avec l'exposant $\dfrac{n}{n-1} > 1$, pour obtenir la majoration annoncée.
□

Remarque.—
La proposition précédente montre que, lorsque la fonction f est de la forme $\mathbf{C}^\sigma(g)$, où g est dans $\mathcal{C}_c^\infty$, la fonction $\sup_t e^{\gamma_1 t}|\mathbf{Q}_t^\sigma f|$ est intégrable. Cette propriété reste évidement vraie lorsque la fonction f est de la forme $\mathbf{Q}_{t_0}^\sigma \mathbf{C}^\sigma g$, pour tout t_0 ; appelons $\mathcal{H}^\sigma$ le sous-espace de $\mathbf{L}^1(\mu)$ formé par de telles fonctions ; $\mathcal{H}^\sigma$ n'est malheureusement pas dense dans l'espace $\mathbf{L}^1(\mu)$. La proposition suivante caractérise sa fermeture :

Proposition 4.4.—Soit $\mathcal{H}_0$ le sous-espace fermé de $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ formé des fonctions $\mathbf{L}$-harmoniques et bornées. La fermeture de $\mathcal{H}^\sigma$ dans $\mathbf{L}^1(\mu)$ est l'orthogonal de $\mathcal{H}_0$.

Remarque.—
Bien sûr, si la mesure μ est de masse finie, les fonctions harmoniques bornées sont de carré intégrable et sont donc constantes. Dans ce cas, la fermeture de $\mathcal{H}^\sigma$ dans n'est rien d'autre que l'espace des fonctions intégrables de moyenne nulle.

Preuve. Remarquons tout d'abord que si f est dans $\mathcal{H}_0$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et, si g est dans $\mathcal{C}_c^\infty$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle f, \mathbf{P}_t g\rangle = \langle f, \mathbf{L}\mathbf{P}_t g\rangle = \langle \mathbf{L}f, \mathbf{P}_t g\rangle = 0 \ :$$

donc $\langle f, \mathbf{P}_t g\rangle = \langle \mathbf{P}_t f, g\rangle = \langle f, g\rangle$ et on en déduit que $\mathbf{P}_t f = f$. Par conséquent, f vérifie également $\mathbf{Q}_t^\sigma f = f$. Réciproquement, il est immédiat de voir que si un élément f de $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ vérifie $\mathbf{P}_t f = f$ pour tout t, alors il est dans $\mathcal{H}_0$. Puisque l'opérateur $\mathbf{P}_t$ est continu sur $\mathbf{L}^\infty(\mu)$, cette caractérisation permet de voir que $\mathcal{H}_0$ est fermé dans $\mathbf{L}^\infty(\mu)$.

Pour voir que $\mathcal{H}^\sigma$ est inclus dans l'orthogonal de $\mathcal{H}_0$, prenons un élément $\mathbf{Q}_{t_0}^\sigma \mathbf{C}^\sigma g$ de $\mathcal{H}^\sigma$, avec g dans $\mathcal{C}_c^\infty$, et un élément h de $\mathcal{H}_0$. On a $\langle \mathbf{Q}_{t_o}^\sigma g, \mathbf{Q}_t^\sigma h\rangle = \langle h, \mathbf{Q}_{t_0+t}^\sigma g\rangle = \langle h, g\rangle$, d'après ce qui précède.
On peut dériver cette identité en $t = 0$, ce qui est légitime d'après la proposition **3.1.**, pour obtenir $\langle \mathbf{C}^\sigma \mathbf{Q}_{t_0}^\sigma f, h\rangle = \langle \mathbf{Q}_{t_0}^\sigma \mathbf{C}^\sigma f, h\rangle = 0$.

Réciproquement, il nous faut vérifier que tout élément h de $\mathbf{L}^\infty(\mu)$ qui est orthogonal à $\mathcal{H}^\sigma$ est dans $\mathcal{H}_0$. Pour tout élément f de $\mathcal{C}_c^\infty$ et pout tout t, on a

$\langle \mathbf{Q}_t^\sigma \mathbf{C}^\sigma f, h\rangle = 0$, d'où l'on tire, en dérivant en $t = 0$, $\langle (\mathbf{C}^\sigma)^2 f, h\rangle = 0$. Puisque l'on a de même $\langle \mathbf{C}^\sigma f, h\rangle = 0$, et que $(\mathbf{C}^\sigma)^2 - 2\sigma\mathbf{C}^\sigma + \mathbf{L} = 0$, on obtient $\langle \mathbf{L} f, h\rangle = 0$, d'où $\langle f, \mathbf{P}_t h\rangle = \langle \mathbf{P}_t f, h\rangle = \langle f, h\rangle$. Cette dernière identité ayant lieu pour toutes les fonctions f de $\mathcal{C}_c^\infty$, on obtient $\mathbf{P}_t h = h$, ce qui prouve que h est dans $\mathcal{H}_0$. □

5. — Equivalences de normes H^1 dans le cas de la courbure positive.

Nous nous plaçons dans les mêmes conditons qu'au chapitre précédent, mais nous supposons en plus que la courbure est positive, c'est à dire que l'opérateur $\mathbf{L}$ admet $(n, 0)$ comme couple (dimension, courbure) admissibble, avec $n \geq 2$.

Les opérateurs $\mathbf{C}^\sigma$ et $\mathbf{Q}_t^\sigma$ du chapitre précédent seront toujours pris avec $\sigma = 0$. Pour simplifier les notations, nous les noterons $\mathbf{C}$ et $\mathbf{Q}_t$.

Comme dans le chapitre 3, $\mathbf{X}_t$ désignera le processus des coordonnées (sur l'espace canonique des trajectoires continues à valeurs dans $\mathbf{E}$) ; $\mathbf{P}^x$ désigne la loi qui en fait une diffusion de générateur $\mathbf{L}$, issue de x, et $\mathbf{P}^\mu$ la mesure $\int \mathbf{P}^x\, \mu(dx)$.

L'espérance sous la loi $\mathbf{P}^x$ sera notée E^x, et E^μ sous la loi $\mathbf{P}^\mu$, même lorsque ce n'est pas une loi de probabilité. De même, lorsque $\mathcal{B}$ est une sous tribu de la tribu canonique, les espérances conditionnelles seront notées $E^x(\cdot/\mathcal{B})$ et $E^\mu(\cdot/\mathcal{B})$. L'opérateur $E^\mu(\cdot/\mathcal{B})$ n'est pas égal à $\int E^\mu(\cdot/\mathcal{B})\, \mu(dx)$. Pour le définir lorsque μ n'est pas une probabilité, on procède exactement comme si c'en était une : d'abord comme projecteur orthogonal sur $\mathbf{L}^2(\mathbf{P}^\mu)$, puis, grâce à sa positivité, on l'étend à $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{P}^\mu) + \mathbf{L}^1(\mathbf{P}^\mu)$, ce qui en fait une contraction de tous les $\mathbf{L}^p(\mathbf{P}^\mu)$.

Comme plus haut, nous introduisons notre mouvement brownien auxiliaire $\mathbf{B}_t$, issu de $a > 0$, dont on désigne la loi par $\mathbf{Q}^a$; on note $T_0 = \inf\{t; \mathbf{B}_t = 0\}$. on appelle $\mathbf{Z}_t$ le processus $(\mathbf{X}_{t\wedge T_0}, \mathbf{B}_{t\wedge T_0})$. Les lois $\mathbf{P}^x \otimes \mathbf{Q}^a$ et $\mathbf{P}^\mu \otimes \mathbf{Q}^a$ seront notées respectivement $\mathbf{P}^{x,a}$ et $\mathbf{P}^{\mu,a}$, de même que les espérances seront notées $E^{x,a}$ et $E^{\mu,a}$.

Soit f une fonction borélienne bornée sur $\mathbf{E}$ et soit $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}_t f(x)$. Comme nous l'avons déjà vu, le processus $M_t^f = \tilde{f}(\mathbf{Z}_t)$ est une martingale bornée pour toute loi $\mathbf{P}^{x,a}$. On notera

$$||f||_{H^{1,a}} = E^{\mu,a}\{\sup_t |M_t^f|\}.$$

Remarquons que, si $b > a$, $||f||_{H^{1,a}} \leq ||f||_{H^{1,b}}$. En effet, soit $T_a = \inf\{t; \mathbf{B}_t = a\}$. La loi de $\mathbf{X}_{T_a}$ sous $\mathbf{P}^{\mu,b}$ n'est autre que μ, et, grâce à la propriété de MARKOV du processus $\mathbf{Z}_t$, la loi du processus $\mathbf{Z}_{T_a+t}$ sous $\mathbf{P}^{\mu,b}$ n'est autre que celle du processus $\mathbf{Z}_t$ sous $\mathbf{P}^{\mu,a}$. Par suite,

$$\begin{aligned}||f||_{H^{1,b}} =& E^{\mu,b}\{\sup_t \tilde{f}(\mathbf{Z}_t)\} \geq E^{\mu,b}\{\sup_{\{T_a \leq t\}} \tilde{f}(\mathbf{Z}_t)\}\\ =& E^{\mu,a}\{\sup_t \tilde{f}(\mathbf{Z}_t)\} = ||f||_{H^{1,a}}.\end{aligned}$$

Suivant alors la définition de Meyer [M1] dans le cas de $\mathbf{R}^n$, nous pouvons poser

Définition.—*On dira qu'une fonction f est dans l'espace $\mathbf{H}^1_P$ (l'espace $\mathbf{H}^1$ probabiliste) si la quantité $||f||_{\mathbf{H}^1} = \lim_{a\to\infty} ||f||_{H^{1,a}}$ est finie.*

La première remarque que l'on peut faire est la suivante :

Proposition 5.1.— $||\sup_t |\mathbf{Q}_t|||_1 \quad \leq \quad ||f||_{\mathbf{H}^1}$.

Preuve. En effet, grâce à la symétrie du semigroupe $\mathbf{Q}_t$, on a, pour $b > a$,

$$E^{\mu,b}\{\tilde{f}(\mathbf{Z}_{T_a})/\mathbf{X}_{T_0}\} = E^{\mu,b}\{\mathbf{Q}_a f(\mathbf{X}_{T_a})/\mathbf{X}_{T_0}\} = \mathbf{Q}_{2a} f(\mathbf{X}_{T_0}).$$

Puis, comme l'espérance conditionnelle par rapport à la loi $\mathbf{P}^\mu$ diminue la norme dans $\mathbf{L}^1$ et que $\mathbf{X}_{T_0}$ a la loi μ, on obtient

$$||f||_{H^{1,b}} \geq ||\sup_{0\leq a\leq b} |\mathbf{Q}_{2a} f|||_1.$$

$\square$

Le corollaire **4.3.** du chapitre précédent peut s'écrire, pour f dans $\mathcal{C}_c^\infty$,

$$||\sup_t |\mathbf{Q}_t \mathbf{C} f|||_1 \leq C(n)\Big\{||\mathbf{C}f||_1 + ||df||_1\Big\};$$

D'après ce qui précède, la proposition suivante en est donc une amélioration;

Proposition 5.2.—Soit f un élément de $\mathcal{C}_c^\infty$; on a

$$||\mathbf{C}f||_{H_1} \leq C(n)\Big\{||\mathbf{C}f||_1 + ||df||_1\Big\}.$$

Preuve. La démonstration est identique à celle de la proposition **4.3.** : pour tout $\varepsilon > 0$, appelons h^ε la fonction $\Big[(\mathbf{C}\tilde{f})^2 + |\nabla \tilde{f}|^2 + \varepsilon\Big]^{\frac{n-1}{n}}$. Le lemme de sous-harmonicité nous dit que c'est une fonction sous-harmonique, et donc que le processus $\mathbf{Y}_s = h^\varepsilon(\mathbf{Z}_s)$ est une sous-martingale positive, sous toute loi $\mathbf{P}^{x,a}$. Les inégalités classiques de la théorie des martingales montrent qu'alors

$$E^x\left\{\sup_s|\mathbf{Y}_s|^{\frac{n}{n-1}}\right\} \leq C(n)E^x\left\{|\mathbf{Y}_\infty|^{\frac{n}{n-1}}\right\} \tag{1}$$

En intégrant les deux membres de cette expression par rapport à la mesure $\mu(dx)$, on obtient à gauche une expression qui domine $||\mathbf{C}f||_{H^{1a}}$, tandis que de l'autre on obtient

$$E^{\mu,a}\left\{(\mathbf{C}\tilde{f})^2 + |\nabla\tilde{f}|^2 + \varepsilon\right\}^{1/2}(\mathbf{Y}_{T_0}) = \int\left\{(\mathbf{C}f)^2 + |\nabla f|^2 + \varepsilon\right\}^{1/2}\mu(dx).$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre ε vers 0 pour obtenir le résultat. $\square$

Le but de ce chapitre est de démontrer que l'inégalité inverse a également lieu :

Proposition 5.3.—Soit f une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty$; on a $||df||_1 \leq C||\mathbf{C}f||_{\mathbf{H}^1}$, où C est une constante universelle, indépendante de n et valable pour toutes les diffusions à courbure positive.

Preuve. On trouve dans [B2] un résultat analogue, mais relatif à $\mathbf{L}^p(\mu)$. La démonstration que nous donnons ci-desous suit de près celle de cet article, c'est pourquoi nous n'en exquissons que les grandes lignes, en renvoyant le lecteur à [B2] pour la justification des détails.

Tout d'abord, introduisons, sur l'espace $\boldsymbol{\Omega}$ des formes différentielles sur $\mathbf{E}$ à support compact, l'opérateur de divergence δ : il envoie les q-formes sur les (q-1)-formes et il est défini comme l'adjoint de l'opérateur différentiel d pour la mesure $\mu(dx)$:

$$\int_{\mathbf{E}} d\omega\cdot\eta\,\mu(dx) = \int_{\mathbf{E}} \omega\cdot\delta\eta\,\mu(dx).$$

Sur les 1-formes, on définit alors l'opérateur de DE-RHAM associé à $\mathbf{L}$: c'est l'opérateur $\vec{\mathbf{L}} = -(d\delta + \delta d)$.

Pour fixer les idées, donnons l'écriture de $\vec{\mathbf{L}}$ dans un système de coordonnées locales : supposons que $\mathbf{L}$ soit mis sous sa forme canonique décrite au chapitre 1, à savoir $\mathbf{L}f = g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_j f + \nabla_i h\nabla_j f\right)$; dans ce cas, on a

$$(\vec{\mathbf{L}}\omega)_k = g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_j\omega_k + (d\omega)_{ik}\nabla_j h - \mathbf{R}(\mathbf{L})_{ik}\omega_j\right) + \nabla_k(\omega\cdot dh),$$

où $\mathbf{R}(\mathbf{L})$ désigne le tenseur de RICCI de l'opérareur $\mathbf{L}$.

L'opérateur $\vec{\mathbf{L}}$ jouit des propriétés suivantes :

1. Il est autoadjoint et négatif sur l'espace $\vec{\mathbf{L}}^2(\mu)$ des 1-formes de carré intégrables : on a

$$\int_{\mathbf{E}} \vec{\mathbf{L}}\omega\cdot\eta\,\mu(dx) = \int_{\mathbf{E}} \omega\cdot\vec{\mathbf{L}}\eta\,\mu(dx) = -\int_{\mathbf{E}} d\omega\cdot d\eta\,\mu(dx) - \int_{\mathbf{E}} \delta\omega\cdot\delta\eta\,\mu(dx).$$

En particulier, c'est le générateur infinitésimal d'un semigroupe $\vec{\mathbf{P}}_t = \exp(-t\vec{\mathbf{L}})$ de contractions sur $\vec{\mathbf{L}}^2(\mathbf{P}_\mu)$.

2. Pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{E}$, on a

$$d\mathbf{L}f = \vec{\mathbf{L}}df \quad \text{d'où} \quad d\mathbf{P}_t f = \vec{\mathbf{P}}_t df.$$

3. Grâce à la positivité de la courbure de Ricci de $\mathbf{L}$, pour toute forme ω, on a, $|\vec{\mathbf{P}}_t\omega| \leq \mathbf{P}_t|\omega|$.

Comme au paragraphe 3, introduisons le semigroupe de Cauchy $\vec{\mathbf{Q}}_t$ associé à $\vec{\mathbf{P}}_t$, et son générateur infinitésimal $\vec{\mathbf{C}}$:

$$\vec{\mathbf{C}} = -\sqrt{-\vec{\mathbf{L}}} \text{ et } \vec{\mathbf{Q}}_t = \exp(t\vec{\mathbf{C}}).$$

$\vec{\mathbf{C}}$ et $\vec{\mathbf{Q}}_t$ sont également autoadjoints sur $\vec{\mathbf{L}}^2(\mu)$, et on a, pour toute fonction f du domaine de $\mathbf{L}$,

$$d\mathbf{C}f = \vec{\mathbf{C}}df\ ;\ d\mathbf{Q}_t f = \vec{\mathbf{Q}}_t df.$$

De même, pour toute 1-forme η de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur $\mathbf{E}$, on a $|\vec{\mathbf{Q}}_t\eta| \leq \mathbf{Q}_t|\eta|$.

On peut même dire un peu mieux : posons $\tilde{\eta}(x,t) = \vec{\mathbf{Q}}_t\eta(x)$; la fonction $|\tilde{\eta}|^2(x,t)$ est sous-harmonique, et plus précisément

$$(\mathbf{L} + \frac{\partial^2}{\partial t^2})|\tilde{\eta}|^2(x,t) \geq 2|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\eta}|(x,t).$$

Rappelons maintenant une formule de Meyer [M2] : soit $h(x,t)$ une fonction borélienne et positive sur $\mathbf{E} \times [0,\infty[$; on a

$$E^{\mu,a}\{\int_0^{T_0} h(\mathbf{Z}_s)\,ds\} = \int_{\mathbf{E}\times[0,\infty[} h(x,s)\ s\wedge a\ ds\,\mu(dx).$$

Rappelons enfin l'inégalité de FEFFERMAN. Soit H_s un processus mesurable adapté, que nous supposerons borné pour simplifier ; nous dirons que H_s est dans **BMO** s'il existe une constante **c** telle que, pour tout temps d'arrêt $T \leq T_0$, on ait

$$E[\int_T^{T_0} H_s^2\, ds/\mathcal{F}_T] \underset{p.s.}{\leq} \mathbf{c}^2.$$

La meilleure constante **c** satisfaisant une telle inégalité est appelée $||H||_{BMO}$.

Soit alors K_s un autre processus mesurable, adapté et borné : l'inégalité de FEFFERMAN s'écrit :

$$E[\int_0^{T_0} |H_s||K_s|\, ds] \leq \sqrt{2}E\Big[\int_0^{T_0} |K_s|^2\, ds\Big]^{1/2} \cdot ||H||_{BMO}.$$

Pour démontrer la proposition **5.3.**, il nous suffit de démontrer que pour toute fonction f de $\mathcal{C}_c^\infty$, et pour toute 1-forme η de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact sur **E**,

$$\int_{\mathbf{E}} df \cdot \eta\, \mu(dx) \leq C||\mathbf{C}f||_{\mathbf{H}^1}||\eta||_\infty.$$

Posons $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}_t f(x)$, $\tilde{g}(x,t) = \mathbf{Q}_t \mathbf{C} f(x) = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(x,t)$, et $\tilde{\eta}(x,t) = \vec{\mathbf{Q}}_t \eta(x)$.

$$\text{On a} \qquad \tilde{f}(x,\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbf{Q}_t f(x) = \begin{cases} \int f\, \mu(dx) & \text{si } \mu \text{ est finie} \\ 0 & \text{si } \mu \text{ est infinie} \end{cases}$$

On peut alors écrire, en admettant que les calculs qui suivent soient justifiés (voir [B2] et les remarques précédentes) :

$$f(x) - \tilde{f}(x,\infty) = \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{f}(x,t)\, t\, dt \quad \text{d'où}$$

$$\begin{aligned} df &= \int_0^\infty d\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\tilde{f}(,t)\}\, t\, dt = \int_0^\infty d\{\mathbf{C}^2\mathbf{Q}_t f\}\, t\, dt \\ &= 4\int_0^\infty d\{\mathbf{C}\mathbf{Q}_{2t}\mathbf{C}f\}\, t\, dt = 4\int_0^\infty \vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{Q}}_t d\{\mathbf{Q}_t\mathbf{C}f\}\, t\, dt. \end{aligned}$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{E}} df\cdot\eta\,\mu(dx) =&4\int_{\mathbf{E}}\int_0^\infty \{\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{Q}}_t d\{\mathbf{Q}_t\mathbf{C}f\}\}\cdot\eta\, t\, dt\,\mu(dx)\\
=&4\int_0^\infty\int_{\mathbf{E}}\{\vec{\mathbf{C}}\vec{\mathbf{Q}}_t\eta\}\cdot d\{\mathbf{Q}_t\mathbf{C}f\}\,\mu(dx)\,t\,dt\\
=&4\int_{\mathbf{E}}\int_0^\infty\{\frac{\partial}{\partial t}\tilde\eta(\cdot,t)\}\cdot d\{\tilde g(\cdot,t)\}\,t\,dt\,\mu(dx)\\
=&4\lim_{a\to\infty}\int_{\mathbf{E}\times[0,\infty[}\{\frac{\partial}{\partial t}\tilde\eta(\cdot,t)\}\cdot d\{\tilde g(\cdot,t)\}\,t\wedge a\,dt\,\mu(dx)\\
=&4\lim_{a\to\infty}E^{\mu,a}\Big(\int_0^{T_0}\{\frac{\partial}{\partial t}\tilde\eta\}\cdot d\tilde g(\mathbf{Z}_s)\,ds\\
\le&4\sqrt{2}\lim_{a\to\infty}E^{\mu,a}\{\int_0^{T_0}|d\tilde g|^2(\mathbf{Z}_s)\,ds\}^{1/2}\times\|\,|\frac{\partial}{\partial t}\tilde\eta|(\mathbf{Z}_s)\,\|_{BMO}
\end{aligned}
$$

Il ne nous reste plus qu'à voir que

$$
(1)\qquad E^{\mu,a}\Big\{\Big(\int_0^{T_0}|d\tilde g|^2(\mathbf{Z}_s)\,ds\Big)^{1/2}\Big\}\le C\,\|\tilde g(\cdot,0)\|_{\mathbf{H}_1}=C\,\|\mathbf{C}f\|_{\mathbf{H}_1};
$$

$$
(2)\qquad \|\,|\frac{\partial}{\partial t}\tilde\eta|(\mathbf{Z}_s)\,\|_{BMO}\le C\,\|\eta\|_\infty.
$$

Occupons nous tout d'abord de (**1**). Soit $(\mathbf{Y}_s)$ le processus $\tilde g(\mathbf{Z}_s)$; c'est une martingale sous $\mathbf{P}^{x,a}$, de processus croissant associé

$$
d\langle\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle_s=2\,\{(\frac{\partial}{\partial t}\tilde g)^2+|d\tilde g|^2\}(\mathbf{Z}_s)\,ds\ge 2\,|d\tilde g|^2(\mathbf{Z}_s)\,ds.
$$

L'inégalité de Davis nous donne

$$
E^{x,a}\{\langle\mathbf{Y},\mathbf{Y}\rangle_{T_0}^{1/2}\}\le C\,E^{x,a}\{\sup_s|\mathbf{Y}_s|\};
$$

et finalement (**1**) en intégrant l'inégalité précédente par rapport à $\mu(dx)$.

Passons maintenant à l'inégalité (**2**); considérons le processus $\mathbf{V}_s = |\tilde\eta|^2(\mathbf{Z}_s)$: c'est un processus borné puisque

$$
\begin{aligned}
\sup_t\mathbf{V}_t\le&\sup_{x,t}|\tilde\eta|^2(x,t)=\sup_{x,t}|\vec{\mathbf{Q}}_t\eta|^2(x)\\
\le&\sup_{x,t}\{\mathbf{Q}_t|\eta|^2(x)\}\le|\eta|_\infty^2.
\end{aligned}
$$

De plus, sous $\mathbf{P}^{x,a}$, c'est une sous-martingale, puisque la fonction $|\tilde{\eta}|^2$ est sous-harmonique. Cette sous-martingale se décompose en $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}_0 + \mathbf{M}_s + \mathbf{A}_s$, où $\mathbf{M}_s$ est une martingale nulle en 0 et $\mathbf{A}_s$ est un processus croissant continu. On a

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}_s = 1_{s\leq T_0}(\mathbf{L} + \frac{\partial^2}{\partial t^2})\{|\tilde{\eta}|^2\}(\mathbf{Z}_s)\,ds \geq 2\,1_{s\leq T_0}\{|\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\eta}|^2\}(\mathbf{Z}_s)\,ds.$$

Pour tout temps d'arrêt T, on a

$$E(\mathbf{A}_{T_0} - \mathbf{A}_T/\mathcal{F}_T) = E(\mathbf{V}_{T_0} - \mathbf{V}_T/\mathcal{F}_T) \leq 2\|\eta\|_\infty,$$

et par suite $\|(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\eta})^2(\mathbf{Z}_s)\|_{BMO} \leq \|\eta\|_\infty$. □

6. Inégalités du type Sobolev en courbure positive

Sur une variété compacte de dimension n, l'inégalité de Sobolev s'écrit

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty, \qquad \langle f^{\frac{2n}{n-2}}\rangle^{\frac{n-2}{n}} \leq \langle f^2\rangle + C\langle |df|^2\rangle. \tag{1}$$

L'intérêt de cette inégalité réside dans le fait que l'exposant $\frac{n}{n-2}$ qui apparaît est plus grand que 1. Ici, la mesure de référence est la mesure riemannienne, normalisée pour en faire une probabilité; C est une constante qui dépend de la variété.

Remarquons que l'inégalité (1) peut encore s'écrire

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty, \qquad \langle f^{\frac{2n}{n-2}}\rangle^{\frac{n-2}{n}} \leq \langle f^2\rangle - C\langle f, \Delta f\rangle. \tag{2}$$

Dans [BE], nous avons prouvé que, si $\mathbf{L}$ est un opérateur de diffusion **symétrique** par rapport à la mesure μ, admettant un couple constant (n,r) comme (dimension, courbure) admissible avec $r > 0$, alors il satisfait une inégalité du type (2) :

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty, \qquad \langle f^{\frac{2m}{m-2}}\rangle^{\frac{m-2}{m}} \leq \langle f^2\rangle - C\langle f, \mathbf{L}f\rangle. \tag{2'}$$

Ici, l'intégration a lieu par rapport à la mesure μ, C est une constante positive ne dépendant que de n et r, et la constante m est strictement supérieure à n, lorsque $n > 2$. (Ce qui donne une inégalité moins forte que l'inégalité de Sobolev usuelle.)

En posant $g = f^{\frac{2m}{m-2}}$ et $q = \dfrac{m-2}{m} < 1$, (2') devient

$$\langle g\rangle^q \leq \langle g^q\rangle - C\langle g^{q/2}, \mathbf{L}g^{q/2}\rangle.$$

Mais on peut écrire*

$$\begin{aligned}\langle g^{q/2}, \mathbf{L} g^{q/2}\rangle &= -\langle d(g^{q/2})\cdot d(g^{q/2})\rangle = -(q/2)^2 \langle g^{q-2}, |dg|^2\rangle \\ &= (q/2)^2 \frac{1}{1-q} \langle d(g^{q-1})\cdot dg\rangle = -(q/2)^2 \frac{1}{1-q} \langle g^{q-1}, \mathbf{L} g\rangle.\end{aligned}$$

On obtient donc l'inégalité

$$\langle g\rangle^q \leq \langle g^q\rangle + C'\langle g^{q-1}, \mathbf{L} g\rangle. \tag{3}$$

Le but de ce paragraphe est de montrer qu'on peut obtenir une inégalité analogue à (3), **sans l'hypothèse de symétrie sur l'opérateur L**, lorsqu'il admet un couple constant (n, r) admissible, **avec** $r > 0$, mais à condition de remplacer $\mathbf{L}$ par certains des opérateurs $\mathbf{C}^\sigma$ du chapitre 3.

Pour simplifier, nous supposerons que notre variété est compacte, et que $n \geq 3$. La mesure de référence μ sera une probabilité **invariante** pour $\mathbf{L}$, ce qui revient à dire que

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty, \qquad \int_{\mathbf{E}} \mathbf{L} f \, d\mu = 0.$$

Comme d'habitude, $\mathbf{P}_t$ désigne le semigroupe de la chaleur associé à $\mathbf{L}$; nous supposerons que

$$\forall f \in \mathcal{C}^\infty, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}_t f \underset{p.p.}{=} \int_{\mathbf{E}} f \, d\mu.$$

La construction du semigroupe $\mathbf{Q}_t^\sigma$ par subordination à partir de $\mathbf{P}_t$ ne pose pas de problèmes, et l'opérateur $\mathbf{C}^\sigma$ est son générateur infinitésimal.

Remarquons que la propriété d'invariance de $\mathbf{L}$ se prolonge en une propriété d'invariance pour $\mathbf{C}^\sigma$; en effet

$$\int_{\mathbf{E}} \mathbf{L} f \, d\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{E}} \mathbf{P}_t f \, d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \, d\mu \quad \Rightarrow$$
$$\int_{\mathbf{E}} \mathbf{Q}_t^\sigma f \, d\mu = \int_{\mathbf{E}} f \, d\mu \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathbf{E}} \mathbf{C}^\sigma f \, d\mu = 0.$$

---

* Ce calcul reste valable même si $\mathbf{L}$ n'est pas symétrique ; il suppose seulement que $\int \mathbf{L} f \, d\mu = 0$, $\forall f \in \mathcal{C}^\infty$.

Proposition 6.1.—Soient σ un réel positif tel que $\frac{n-1}{4}r \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)^2}{8}r$ et f une fonction positive de classe $\mathcal{C}^\infty$; pour tout $q \in [\frac{n-3}{n-1}, 1]$, on a

$$\langle f\rangle^q \leq \langle f\rangle^q + \frac{q}{\gamma}\langle f^{q-1}, \mathbf{C}^\sigma f\rangle, \tag{4}$$

avec $\gamma = \sqrt{\sigma^2\frac{n-9}{n-1} + 2r} - \sigma\frac{n-5}{n-1}$.*

Preuve. Posons $\beta = \frac{2\sigma}{n-1}$. Nous savons d'après le chapitre 1 que l'opérateur $\mathbf{L}^{\sigma,\beta}$ admet $(n+1, r')$ comme couple admissible (dimension, courbure), avec $r' = e^{2\beta t}(r - \frac{4\sigma^2}{n-1}) = e^{2\beta t}r''$. Soit $\tilde{f}(x,t) = \mathbf{Q}_t^\sigma f(x)$; nous pouvons appliquer la proposition **2.4.**, qui est une variante du lemme de sous-harmonicité, pour obtenir

$$\mathbf{L}^{\sigma,\beta}\tilde{f}^q \leq 0 \quad \text{et} \quad (\mathbf{L}^{\sigma,\beta} - 2r'\mathbf{I})\mathbf{L}^{\sigma,\beta}\tilde{f}^q \leq 0.$$

En écrivant que $\mathbf{L}^{\sigma,\beta} = e^{2\beta t}\mathbf{L}^\sigma$, la dernière inégalité se réécrit

$$(\mathbf{L}^\sigma - 2r''\mathbf{I})e^{2\beta t}\mathbf{L}^\sigma\tilde{f}^q \leq 0. \tag{5}$$

Si l'on se rapelle que $\mathbf{L}^\sigma_\delta = \mathbf{L}^\sigma + (\sigma^2 - \delta^2)\mathbf{I}$ et que $\mathbf{L}^\sigma_\delta(e^{2\beta t}h) = e^{2\beta t}\mathbf{L}^{\sigma-2\beta}_\delta h$, on voit que l'inégalité (5) s'écrit encore

$$\mathbf{L}^{\sigma-2\beta}_\delta\mathbf{L}^\sigma\tilde{f}^q \leq 0, \qquad \text{avec} \quad \delta^2 = \sigma^2 + 2r'' = \frac{n-9}{n-1}\sigma^2 + 2r.$$

Grâce aux hypothèses faites sur σ, la quantité $-\gamma = \sigma - 2\beta - \delta$ est négative. Il n'y a donc aucune difficulté à appliquer les remarques qui suivent le corollaire **3.5.** : on obtient alors

$$(\mathbf{C}^\sigma - \frac{\partial}{\partial t})\tilde{f}^q \leq 0 \quad \text{et} \quad (\mathbf{C}^\delta + (\sigma - 2\beta - \delta)\mathbf{I} - \frac{\partial}{\partial t})\mathbf{L}^\sigma\tilde{f}^q \leq 0;$$

une nouvelle application de la même remarque donne

$$(\mathbf{C}^\delta + (\sigma - 2\beta - \delta)\mathbf{I} - \frac{\partial}{\partial t})(\mathbf{C}^\sigma - \frac{\partial}{\partial t})\tilde{f}^q \leq 0.$$

Intégrons toutes ces inégalités par rapport à la mesure $\mu(dx)$, en remarquant que toutes les expressions qui apparaissent sous la forme $\int \mathbf{C}^\sigma h\, d\mu$ s'annulent. Il

---

* Bien sûr ; l'opérateur $\mathbf{C}^\sigma$ n'étant pas local, on ne peut pas revenir de l'inégalité (4) à la "vraie" inégalité de Sobolev (1).

nous reste

$$\int_{\mathbf{E}} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}^q \, d\mu \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{E}} \Big(\frac{\partial}{\partial t} - (\sigma - 2\beta - \delta)\mathbf{I}\Big) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}^q \, d\mu \leq 0.$$

En intervertissant les signes de sommation et de dérivation, ceci s'écrit encore

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbf{E}} \tilde{f}^q \, d\mu \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t}\{e^{\gamma t} \frac{\partial}{\partial t}\{\int_{\mathbf{E}} \tilde{f}^q \, d\mu\}\} \leq 0.$$

De la seconde inégalité, on tire

$$\Big[\frac{\partial}{\partial t}\{\int_{\mathbf{E}} \tilde{f}^q \, d\mu\}\Big](t) \leq e^{-\gamma t} \Big[\frac{\partial}{\partial t}\{\int_{\mathbf{E}} \tilde{f}^q \, d\mu\}\Big](0) = e^{-\gamma t} q\langle f^{q-1}, \mathbf{C}^\sigma f\rangle.$$

Il ne nous reste plus qu'à écrire

$$\langle f\rangle^q - \langle f^q\rangle = \langle \tilde{f}^q(\infty)\rangle - \langle \tilde{f}^q(0)\rangle = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\langle \tilde{f}^q(t)\rangle dt \leq q\langle f^{q-1}, \mathbf{C}^\sigma f\rangle \int_0^\infty e^{-\gamma t} \, dt,$$

ce qui nous donne l'inégalité cherchée. □

—Références

[B1] BAKRY (Dominique)— RICCI curvature and dimension for diffusion semigroups —**Stochastic Processes in Classical and Quantum Physics**, Lecture Notes in Physics, *à paraître.*

[B2] BAKRY (Dominique)— Etude des transformations de RIESZ dans les variétés riemanniennes à courbure de RICCI minorée —**Séminaire de Probabilités XXI** , Lecture Notes in Math. *n°* **1247**, Springer, 1987, p. 137-172 .

[B3] BAKRY (Dominique) — Un critère de non explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète —Comptes Rendus Acad. Sc., t. **303**, série 1, *n°* 1, 1986, p. 23-27 .

[B4] BAKRY (Dominique)— Transformations de RIESZ pour les semigroupes symétriques —**Séminaire de Probabilités XIX** , Lecture Notes in Math. *n°* **1123**, Springer, 1985, p. 130-174 .

[BE] BAKRY (Dominique); EMERY (Michel) —Inégalités de SOBOLEV pour un semigroupe symétrique —Comptes Rendus Acad. Sc., t.**301**, série 1, *n°* 8, 1985, p. 411-413 .

[CW] COIFMAN (Ronald R.) et WEISS (Guido)— Invariant systems of conjugate harmonic functions associated with compact LIE groups, Studia Mathematica, vol.**44**, 1972, p. 301-308 .

[FS] FEFFERMAN (Charles) et STEIN (Elias M.)— $\mathbf{H}^p$ spaces of several variables, Acta Mathematica, vol.**129** , 1972, p. 137-193 .

[M1] MEYER (Paul-André)— Démonstration probabiliste de certaines inégalités de LITTLEWOOD - PALEY —**Séminaire de Probabilités X** , Lecture Notes in Math. *n°* **511**, Springer, 1976, p. 125-183 .

[M2] MEYER (Paul-André)— Le dual de $\mathbf{H}^1(\mathbf{R}^\nu)$: démonstrations probabilistes. —**Séminaire de Probabilités XI** , Lecture Notes in Math. *n°* **581**, Springer, 1977, p. 132-195 .

[Sch] SCHOUTEN (J.A.)— **RICCI calculus**—Springer, 2d ed., Berlin,1954.

[St] STEIN (Elias M.) — **Singular integrals and differentiability properties of functions**—Princeton,1970.

StW] STEIN (Elias M.) et WEISS (Guido)— On the theory of harmonic functions of several variables, Acta Mathematica, vol.**103**, 1960, p. 25-62 .

Dominique Bakry
IRMA
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG cedex
FRANCE