P. DARTNELL
SERVET MARTINEZ
JAIME SAN MARTIN

Opérateurs filtrés et chaînes de tribus invariantes sur un espace probabilisé dénombrable

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 22 (1988), p. 197-213
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__197_0>

OPERATEURS FILTRES ET CHAINES DE TRIBUS INVARIANTES SUR UN ESPACE PROBABILISE DENOMBRABLE

P. Dartnell, S. Martinez, J. San Martin
Departamento de Matematicas Aplicadas,
Facultad de Ciencas Fisicas y Matematicas
Universidad de Chile, Casilla 170/3, correo 3,
Santiago, Chile

0 . INTRODUCTION.

Il y a quelques années, Dellacherie posait le problème de reconnaître quand un opérateur symétrique Λ d'un espace $L^2(\Omega,F,\mu)$ réel et séparable est un *opérateur d'intégrale stochastique* ; il entendait par là l'existence d'une filtration $(a_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (vérifiant les conditions habituelles) et d'un processus (H_t) prévisible pour cette filtration de sorte que l'on ait, pour tout $x \in L^2(\mu)$, $\Lambda x = \int_{0-}^{\infty} H_t dx_t$ où (x_t) est la version continue à droite de la martingale $t \to E^{a_t}x$, et, avec Stricker, il a montré dans [2] qu'on peut alors choisir la filtration $(a_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sorte que le processus (H_t) puisse être pris déterministe. Ainsi, l'opérateur symétrique Λ est un opérateur d'intégrale stochastique - on dira plutôt un *opérateur filtré* - ssi il existe une filtration $(a_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et une fonction borélienne h sur $\mathbb{R}_+$ telles que Λ soit l'intégrale de h par rapport à la résolution de l'identité $(E_t)_{t\in\mathbb{R}}$ où $E_t = 0$ pour $t < 0$ et $E_t = E^{a_t}$ pour $t \geq 0$. Dans le cas très particulier où Ω est fini, si bien qu'on peut représenter l'opérateur symétrique Λ par une matrice symétrique $(a^{ij} : 1 \leq i,j \leq n)$, Dellacherie a montré, au cours d'une séance du Séminaire de Probabilités de Paris VI, que le caractère "opérateur filtré" équivaut essentiellement au fait que la relation $a^{ij} = a^{ik}$, qui signifie intuitivement que le triangle i,j,k est isocèle de sommet i, définit une géométrie ultramétrique sur $\{1,\ldots,n\}$. Il a conjecturé que cette caractérisation de nature algorithmique était encore vraie pour Ω infini dénombrable.

Dans cet article, nous présentons une solution, algorithmique, de ce dernier problème en suivant une voie différente de celle de

Dellacherie, notamment en utilisant les chaînes maximales de tribus qui sont préservées par l'opérateur Λ. En particulier on trouve un algorithme qui réduit l'étude du cas dénombrable au cas fini (théorème 2) et dans ce dernier cas on explicite un algorithme à n-2 pas qui vérifie si un opérateur est filtré. On prouve que l'écriture intégrale de cette classe d'opérateurs se réduit à une somme dans le cas dénombrable (théorème 1) et qu'on peut ainsi caractériser et calculer le spectre facilement. Au théorème 3 on retrouve la caractérisation de Dellacherie de ces opérateurs : leurs matrices définissent une géométrie supermétrique.

1. DEFINITIONS. OPERATEURS FILTRES. CHAINE DE TRIBUS INVARIANTES.

Définitions. Soit (Ω, F, μ) un espace probabilisé et considérons l'action d'un opérateur Λ borné symétrique sur $L^2(\mu)$. On dit que Λ est *filtré* (Dellacherie [1]) ssi :

$$\Lambda = \int_{0-}^{\infty} h(s)\, dE^{a_s} \tag{1.1}$$

où h est une fonction mesurable bornée, E^{a_s} est l'espérance conditionnelle par rapport à a_s, et $(a_s)_{s\geq 0}$ est une filtration vérifiant les conditions habituelles. On supposera que $a_s \nearrow F$ si $s\nearrow\infty$ (sinon on prend $F = a_\infty = \lim_{s\nearrow\infty} a_s$), et que $a_0 = N$ la tribu triviale (sinon on décale le domaine d'intégration et on pose h(s) = 0 entre l'origine et l'origine décalée).

On dit que Λ est *filtré au sens large* si $\Lambda = \Lambda_0 + \Phi.$ où Λ_0 est filtré tandis que $\Phi.$ est l'opérateur de multiplication par la fonction bornée Φ. Un opérateur filtré au sens large est filtré ssi $\Lambda 1$ est constante.

Si Λ est un opérateur sur $L^2(\mu)$ et $a \subset F$ est une sous-tribu μ-complète, on définit $\Lambda^{(-1)}a = \sigma\{\Lambda 1_A : A\in a\}$, $\sigma(\zeta)$ étant la plus petite tribu μ-complète qui rend mesurable la famille de fonction ζ. Si $\Lambda^{(-1)}a \subset a$ on dit que a est *Λ-invariante*, ce qui équivaut à $\Lambda\left(L^2(\mu_a)\right) \subset L^2(\mu_a)$ (Λ agit sur $L^2(\mu_a)$) où μ_a est la restriction de μ à a. On dit que a est *strictement Λ-invariante* si $\Lambda^{(-1)}a = a$.

Une suite croissante de tribus μ-complètes ordonnées par inclusion $\tilde{a}_{\Gamma'} = (a_{\lambda'})_{\lambda'\in\Gamma'}$ sera appelée une *chaîne*. Toute chaîne $\tilde{a}_{\Gamma'}$ est contenue dans une *chaîne maximale* $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$, où Γ est un ensemble filtré ordonné par l'inclusion des tribus. L'ensemble Γ a un minimum et un maximum qu'on note respectivement 0 et ∞ : $a_0 = N$, $a_\infty = B$. On dira qu'*une chaîne maximale de tribus* $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ *est* Λ*-invariante* (respectivement *strictement* Λ*-invariante*) si toute tribu a_λ est Λ-invariante (respectivement strictement Λ-invariante). S'il existe une chaîne maximale Λ-invariante, $\Lambda 1$ est nécessairement constante.

Proposition 1. Soit Λ un opérateur filtré sur $L^2(\mu)$; alors il existe une chaîne maximale de tribus $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ Λ-invariante.

Démonstration. Soit $\Lambda = \int_{0-}^{\infty} h(s)dE^{a_s}$ et considérons la chaîne maximale $\tilde{a}_\Gamma$ associée à $(a_s)_{s\geq 0}$. Soit $a \in \tilde{a}_\Gamma$; pour $s_0 = \inf\{s\in[0,\infty]: a \subset a_s\}$ on a $\bigvee_{s<s_0} a_s \subset a \subset a_{s_0}$. Il est alors clair que pour, toute fonction x bornée a-mesurable, la fonction $\int_{0-}^{\infty} h(s)dE^{a_s}x$ est a-mesurable, d'où $\Lambda^{(-1)} a \subset a$.

□ q.e.d.

L'étude de la réciproque de ce résultat, quand l'espace probabilisé (Ω,F,μ) est dénombrable, constitue une part importante de notre travail.

Notations. On va préciser quelques notations et résultats nécessaires pour la suite du travail.

Si $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ est une chaîne maximale de tribus on introduira un élément strictement plus petit que $0 \in \Gamma$, qu'on note 0-, et on écrira $a_{0-} = \{\emptyset\}$, $L^2\{\mu_{a_{0-}}\} = \{0\}$, $E^{a_{0-}} = 0$. Si $\Lambda^{(-1)}a_0 \subset a_0$ (i.e. $\Lambda 1$) est constante) on a $\Lambda^{(-1)}a_0 = a_0$ ssi $\Lambda 1 \neq 0$ et $\Lambda^{(-1)}a_0 = a_{0-}$ ssi $\Lambda 1 = 0$.

Si $a \subset F$ est une sous-tribu on note $\hat{a}$ l'ensemble des atomes de a et $A(\alpha) \in \hat{a}$ l'atome de $\hat{a}$ qui contient $\alpha \in \Omega$. On note $\hat{a}_{0-} = \emptyset$. Quand Ω est dénombrable, on identifiera les fonctions définies sur $\hat{a}$ aux fonctions a-mesurables définies sur Ω.

Nous allons nous restreindre à étudier le cas où (Ω,F,μ) est un *espace probabilisé dénombrable* : $\Omega = \{\alpha_n : n\in I \subset \mathbb{N}\}$, $F = P(\Omega)$ est *l'ensemble des parties de* Ω et Ω *est le support de* μ. Dans ce cas, l'opérateur Λ sur $L^2(\mu)$ est défini par une matrice $\Lambda = (a(\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \Omega)$ telle que $\Lambda x(\alpha) = \sum_{\beta\in\Omega} a(\alpha,\beta)x(\beta)$ (si on écrit $\Lambda x(\alpha) = \sum_{\beta\in\Omega} a^{\alpha\beta}x(\beta)\mu(\beta)$ on a $a(\alpha,\beta) = a^{\alpha\beta}\mu(\beta)$). Et la condition Λ

symétrique équivaut aux égalités $\mu(\alpha)a(\alpha,\beta) = \mu(\beta)a(\beta,\alpha)$ (ou $a^{\alpha\beta} = a^{\beta\alpha}$) pour $\alpha,\beta \in \Omega$. La tribu a est Λ-invariante ssi $\Lambda 1_A(\alpha) = \Lambda 1_A(\beta)$ pour tout $A \in \hat{a}$ et α,β tel que $A(\alpha) = A(\beta)$. Dans ce cas on note Λ_a l'opérateur induit sur $L^2(\mu_a)$, sa matrice associée étant $\Lambda_a = \left(a_a(A,A') : A,A' \in \hat{a}\right)$ où $a_a(A(\alpha),A') = \Lambda 1_{A'}(\alpha) = \sum_{\beta\in A'} a(\alpha,\beta)$. Si Λ est auto-adjoint Λ_a l'est aussi.

Si a est une tribu on écrit $\alpha|\beta(a)$ ssi $A(\alpha) \neq A(\beta)$, $\alpha.\beta(a)$ ssi $A(\alpha) = A(\beta)$ et $\alpha|\beta.\gamma(a)$ ssi $A(\alpha) \neq A(\beta) = A(\gamma)$. Si $a_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ est une chaîne de tribus on note $\alpha|\beta.\gamma(a_\Gamma)$ ssi $\exists\lambda \in \Gamma$ tel que $\alpha|\beta.\gamma(a_\lambda)$. Si $\Omega' \subset \Omega$, on note $a|_{\Omega'}$ la tribu induite sur Ω' et $a_\Gamma|_{\Omega'} = (a'_{\lambda'})_{\lambda'\in\Gamma}$ est la chaîne de tribus induite sur Ω'. On a $a'_{\lambda'} = a_\lambda|_{\Omega'}$ ssi $A'_{\lambda'}(\alpha) = A_\lambda(\alpha) \cap \Omega'$ pour tout $\alpha \in \Omega'$, dans ce cas $\alpha|\beta.\gamma(a'_{\lambda'})$ ssi $\alpha|\beta.\gamma(a_\lambda)$ et alors $\alpha|\beta.\gamma\left(a_\Gamma|_{\Omega'}\right)$ ssi $\alpha|\beta.\gamma(a_\Gamma)$ pour $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega'$ (on a noté par $A_\lambda(\alpha)$ et $A'_{\lambda'}(\alpha)$ les atomes de $\hat{a}_\lambda$ et $\hat{a}'_{\lambda'}$ qui contiennent α).

2. <u>OPERATEURS FILTRES SUR UN ESPACE PROBABILISE DENOMBRABLE</u>.

2.1. <u>Chaînes Maximales Invariantes</u>.

Dans ce paragraphe nous allons prouver la réciproque de la proposition 1 sur les espaces probabilisés dénombrables.

Préalablement nous allons décrire les espaces linéaires associés aux chaînes maximales de tribus. Dans le cas fini cette description est triviale puisqu'une chaîne maximale $\tilde{a}_{\Gamma_n} = \{0,\dots,n-1\} = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma_n}$ est une suite de n tribus où le pas de a_λ à $a_{\lambda+1}$ s'obtient par le découpage en deux d'un seul atome.

Si $L'' \subset L'$ sont des sous-espaces hilbertiens dans $L^2(\mu)$ on note par $L' \ominus L''$ le sous-espace hilbertien orthogonal à L'' dans L'.

<u>Lemme 1</u>. Soit (Ω,μ) un espace probabilisé dénombrable où μ est à support Ω. Soit $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ une chaîne maximale de tribus. Considérons :

$$\Gamma^- = \left\{\lambda \in \Gamma \setminus\{0\} : a_\lambda \neq \bigwedge_{\lambda'<\lambda} a_{\lambda'}\right\}$$

$$\lambda^- = \operatorname{Sup}\{\lambda'<\lambda\} \text{ si } \lambda \in \Gamma^-$$

$$S_\lambda = L^2\left(\mu_{a_\lambda}\right) \ominus L^2\left(\mu_{a_{\lambda^-}}\right) \quad \text{pour } \lambda \in \Gamma^- \cup \{0\}$$

Alors la classe de sous-espaces $(S_\lambda)_{\lambda\in\Gamma^-\cup\{0\}}$ est dénombrable et vérifie :

(2.1) S_λ est de dimension 1 pour tout $\lambda \in \Gamma^-\cup\{0\}$

(2.2) les espaces $(S_\lambda)_{\lambda\in\Gamma^-\cup\{0\}}$ sont orthogonaux entre eux

(2.3) $L^2(\mu) = \bigoplus_{\lambda\in\Gamma^-\cup\{0\}} S_\lambda$ (résolution de l'identité)

Démonstration. D'après la maximalité on peut définir $\lambda^- = \sup\{\lambda'<\lambda\} \in \Gamma\cup\{0-\}$ pour $\lambda \in \Gamma$; on a $a_{\lambda^-} = \bigwedge_{\lambda'<\lambda} a_\lambda$. Alors on a $\lambda^-\leq\lambda$, et $\lambda^-<\lambda$ ssi $\lambda \in \Gamma_0^- = \Gamma^-\cup\{0\}$ (rappelons que $0^-<0$, $a_{0^-} = \{\emptyset\}$).

Pour tout $\alpha \neq \beta$ dans Ω il existe $\lambda(\alpha,\beta) \in \Gamma^-$ tel que $\alpha|\beta(a_{\lambda(\alpha,\beta)})$ et $\alpha.\beta(a_{\lambda(\alpha,\beta)^-})$. En fait on a $a_{\lambda(\alpha,\beta)} = \bigcap_{\{\lambda\in\Gamma:\alpha|\beta(a_\lambda)\}} a_\lambda$

et $a_{\lambda(\alpha,\beta)^-} = \bigwedge_{\{\lambda\in\Gamma:\alpha.\beta(\alpha_\lambda)\}} a_\lambda$, qui appartiennent à $\tilde{a}_\Gamma$ grâce à la maximalité de cette chaîne de tribus. On en déduit :

(2.4)
$$a_\lambda = \bigwedge_{\{\lambda(\alpha,\beta)\leq\alpha\neq\beta\}} a_{\lambda(\alpha,\beta)} = \bigwedge_{\left\{\lambda'\in\Gamma_0^-:\lambda'\leq\lambda\right\}} a_{\lambda'}.$$

Réciproquement si on a $\lambda \in \Gamma^-$, $\alpha.\beta\left(a_{\lambda^-}\right)$ et $\alpha|\beta(a_\lambda)$: alors, d'après la maximalité ,on a $\lambda = (\alpha,\beta)$. D'après l'égalité $\Gamma^- = \{\lambda(\alpha,\beta):\alpha\neq\beta$ dans $\Omega\}$ cet ensemble est dénombrable.

Pour tout $\lambda \in \Gamma^-$ il existe alors un seul atome qui se divise en deux, tous les autres restant égaux, quand on passe de a_{λ^-} à a_λ. Donc les espaces $S_\lambda = L^2(\mu_{a_\lambda}) \ominus L^2(\mu_{a_{\lambda^-}})$, qui sont évidemment orthogonaux entre eux, sont de dimension 1.

Prouvons maintenant l'égalité (2.3). L'espace linéaire engendré par $\left(1_{\{\alpha\}}:\alpha \in \Omega\right)$ est dense dans $L^2(\mu)$ donc il suffit de prouver l'égalité $1_{\{\alpha\}} = \sum_{\lambda\in\Gamma_0^-} \left(E^{a_\lambda} - E^{a_{\lambda^-}}\right)1_{\{\alpha\}}$, ou encore, grâce à l'orthogonalité des $(S_\lambda)_{\lambda\in\Gamma_0^-}$,

(2.5)
$$\left\|1_{\{\alpha\}}\right\|^2 = \sum_{\lambda\in\Gamma_0^-} \left\|\left(E^{a_\lambda} - E^{a_{\lambda^-}}\right)1_{\{\alpha\}}\right\|^2$$

Fixons $\alpha \in \Omega$. Pour chaque $\beta \neq \alpha$ on notera $\lambda(\beta) = \lambda(\alpha,\beta)$. Or on a $\left(E^{a_\lambda} - E^{a_{\lambda^-}}\right)1_{\{\alpha\}} = 0$ si $\lambda \notin \Gamma_\alpha^- = \{\alpha(\beta):\beta \neq \alpha\}$, et

$\left\|1_{\{\alpha\}}\right\|^2 = \mu(\alpha)$, $\left\|\left(E^{a_0} - E^{a_{0-}}\right)1_{\{\alpha\}}\right\|^2 = \mu(\alpha)^2$. Si on pose $\Gamma_\alpha^- = \{\lambda_n : n \in I \subset \mathbb{N}\}$, alors l'expression **(2.5)** se met sous la forme :

(2.6) $$\mu(\alpha)(1-\mu(\alpha)) = \sum_{n\in I}\left\|\left(E^{a_{\lambda_n}} - E^{a_{\lambda_{n-}}}\right)1_{\{\alpha\}}\right\|^2$$

On a $E^{a_\lambda}\, 1_{\{\alpha\}} = \dfrac{\mu(\alpha)}{\mu(A_\lambda(\alpha))}\, 1_{A_\lambda(\alpha)}$. Posons $b_n = \mu\left(A_{\lambda_n}(\alpha)\right)$, $c_n = \mu\left(A_{\lambda_{n-}}(\alpha)\right)$; alors

$$\left\|\left(E^{a_{\lambda_n}} - E^{a_{\lambda_{n-}}}\right)1_{\{\alpha\}}\right\|^2 = (\mu(\alpha))^2\left(b_n\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{c_n}\right)^2 + \frac{(c_n - b_n)}{c_n^2}\right).$$

Développant cette expression, on trouve

$$\frac{1}{(\mu(\alpha))^2}\left\|\left(E^{a_{\lambda_n}} - E^{a_{\lambda_{n-}}}\right)1_{\{\alpha\}}\right\|^2 = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{c_n}$$

(on a $b_n < c_n$ d'après l'inclusion stricte $A_{\lambda_n}(\alpha) \subsetneq A_{\lambda_{n-}}(\alpha)$), d'où

$$\frac{1}{(\mu(\alpha))^2}\sum_{n\in I}\left\|\left(E^{a_{\lambda_n}} - E^{a_{\lambda_{n-}}}\right)1_{\{\alpha\}}\right\|^2 = \sum_{n\in I}\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{c_n}\right) = \sum_{n\in I}\int_{b_n}^{c_n}\frac{1}{t^2}\,dt .$$

Si $m \neq n$ on a $A_{\lambda_n}(\alpha) \subset A_{\lambda_{m-}}(\alpha)$ ou $A_{\lambda_m}(\alpha) \subset A_{\lambda_{n-}}(\alpha)$ ce qui entraîne $b_n \leq c_m$ ou $b_m \leq c_n$, donc les intervalles $((b_n, c_n))_{n\in I}$ sont disjoints entre eux. Si on note $J = \bigcup_{n\in I}(b_n, c_n)$, on a $\sum_{n\in I}\int_{b_n}^{c_n}\frac{1}{t^2}\,dt = \int_J \frac{1}{t^2}\,dt.$

D'un autre côté, de $\bigcap_{n\in I} A_{\lambda_n}(\alpha) = \{\alpha\}$, $\bigcup_{n\in I} A_{\lambda_n}(\alpha) = \Omega$ on tire $\mu(\alpha) = \inf\{b_n : n\in\mathbb{N}\}$, $1 = \operatorname{Sup}\{c_n : n\in\mathbb{N}\}$. Comme on a

$$\int_{\mu(\alpha)}^{1}\frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{\mu(\alpha)} - 1,$$

l'expression **(2.6)** équivaut à l'égalité $\int_{\mu(\alpha)}^{1}\frac{1}{t^2}\,dt = \int_J\frac{1}{t^2}\,dt.$

De $J \subset [\mu(\alpha), 1]$ et $\dfrac{1}{t^2} > 0$ pour $t \in [\mu(a), 1]$ il vient que l'égalité précédente a lieu ssi :

(2.7) $J \underset{dt}{=} [\mu(\alpha), 1]$, dt étant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Or, si $\beta \neq \alpha$, $\lambda(\beta) \neq \lambda_n$ on a

$$\beta \in \left(A_{\lambda_n}(\alpha) \cap A_{\lambda_{n-}}(\alpha)\right) \cup \left(\left(\Omega \backslash A_{\lambda_n}(\alpha)\right) \cap \left(\Omega \backslash A_{\lambda_{n-}}(\alpha)\right)\right),$$

d'où $1_{A_{\lambda_n}(\alpha)}(\beta) - 1_{A_{\lambda_{n-}}(\alpha)}(\beta) = 0$. On a $\beta \in A_{\lambda(\beta)-}(\alpha) \backslash A_{\lambda(\beta)}(\alpha)$ donc $1_{\{\alpha\}}(\beta) = \sum_{n \in I} \left(1_{A_{\lambda_n}(\alpha)} - 1_{A_{\lambda_{n-}}(\alpha)}\right)(\beta) + 1$. Comme $1_{A_{\lambda_n}(\alpha)}(\alpha) = 1$, on en déduit l'égalité des fonctions $1 - 1_{\{\alpha\}}$ et $\sum_{n \in I}\left(1_{A_{\lambda_{n-}}(\alpha)} - 1_{A_{\lambda_n}(\alpha)}\right)$.

Finalement si on intègre cette égalité on obtient :

$$1 - \mu(\alpha) = \sum_{n \in I} (c_n - b_n) = \int_J dt .$$

Comme $J \subset [\mu(\alpha), 1]$ on en déduit **(2.7)**, d'où **(2.3)**.

□ q.e.d.

Théorème 1.

Soit (Ω, μ) un espace probabilisé dénombrable où le support de μ est Ω. Alors un opérateur borné symétrique Λ sur $L^2(\mu)$ est filtré ssi il existe une chaîne maximale de tribus $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda \in \Gamma}$ Λ-invariante. Il existe une surjection $\Pi : \mathbb{R}^+ \cup \{0^-, \infty\} \to G \cup \{0^-\}$ préservant l'ordre, telle que $(a_{\Pi(s)})_{s \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}}$ est continue à droite et :

$$\text{(2.8)} \qquad \Lambda = \int_{0-}^{\infty} h(s) dE^{a_{\Pi(s)}} = \sum_{\Pi(s_n) \in \Gamma^- \cup \{0\}} \bar{h}(\Pi(s_n)) \left(E^{a_{\Pi(s_n)}} - E^{a_{\Pi(s_n^-)}}\right)$$

$\bar{h}(\Pi(s_n))$ étant la valeur propre associée au sous-espace propre $S_{\Pi(s_n)}$; on a $s_n^- = \inf\{s \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} : \Pi(s) = \lambda_{n-}\}$ pour $\lambda_n \in \Gamma^- \cup \{0\}$ et d'autre part $h(s) = \sum_n \bar{h}(\Pi(s_n)) 1_{]s_n^-, s_n]}$.

Démonstration .

Soit $S_\lambda = L^2(\mu_{a_\lambda}) \ominus L^2(\mu_{a_{\lambda-}})$, $y_\lambda \in S_\lambda - \{0\}$. D'après la Λ-invariance de $L^2(\mu_{a_\lambda})$ on a $\Lambda y_\lambda \in L^2(\mu_{a_\lambda})$. Soit $x \in L^2(\mu_{a_{\lambda-}})$, comme $\Lambda x \in L^2(\mu_{a_{\lambda-}})$ est Λ est symétrique on a $\langle \Lambda y_\lambda, x\rangle = \langle y_\lambda, \Lambda x\rangle = 0$, d'où $\Lambda y_\lambda \in S_\lambda$. S_λ étant de dimension 1 il existe un unique $\bar{h}(\lambda)$ satisfaisant :

$$\text{(2.9)} \qquad \Lambda y_\lambda = \bar{h}(\lambda) y_\lambda \quad \text{pour tout } y_\lambda \in S_\lambda , \ \lambda \in \Gamma^- \cup \{0\} .$$

D'après le lemme 1, on a $\Lambda x = \sum_{\lambda \in \Gamma_0^-} \bar{h}(\lambda)\left(E^{a_\lambda} - E^{a_{\lambda^-}}\right)x$ pour tout $x \in L^2(\mu)$, ce qui achève la démonstration dans le cas fini. Dans le cas dénombrable, il suffit de trouver une fonction Π vérifiant les propriétés énoncées ci-dessus.

$\Gamma^- \cup \{\infty\}$ étant un ensemble dénombrable totalement ordonné, on peut construire une injection $\Psi : \Gamma^- \cup \{0^-, \infty\} \to \mathbb{Q}^+ \cup \{0^-, \infty\}$ préservant l'ordre et vérifiant les propriétés suivantes : $\Psi\{0^-, 0, \infty\} = \{0^-, 0, \infty\}$, $\sup\{\Psi(\lambda') : \lambda' \in \Gamma^-, \lambda' < \lambda\} < \Psi(\lambda)$, et, si $\infty \notin \Gamma^-$, $\sup\{\Psi(\lambda') : \lambda' \in \Gamma^-\} = \infty$. Si $\lambda \in \Gamma \setminus \{\infty\}$ on pose : $\Psi(\lambda) = \sup\{\Psi(\lambda') : \lambda' \leq \lambda, \lambda' \in \Gamma^-\}$. D'après **(2.4)** la fonction $\Psi : \Gamma \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ est une injection préservant l'ordre.

Or, pour chaque $s \in \mathbb{R}^+ \cup \{0^-, \infty\}$ définissons $\Gamma(s) = \left\{\lambda \in \Gamma \cup \{0^-\} : \Psi(\lambda) \leq s\right\}$, $\Pi(s) = \sup \Gamma(s)$, $a_{\Pi(s)} = \bigwedge_{\lambda \in \Gamma(s)} a_\lambda$.
Alors Π est une surjection préservant l'ordre, et $\Pi \circ \psi = id_{\Gamma \cup \{0^-\}}$.

La collection de tribus $(a_{\Pi(s)})_{s \in \mathbb{R}^+ \cup (\infty)}$ est croissante, $t_n \nearrow \infty$ entraîne $a_{\Pi(t_n)} \nearrow F$ et $t_n \searrow 0$ entraîne $a_{\Pi(t_n)} \searrow N$. Montrons la continuité à droite de la famille $(a_{\Pi(s)})$. Dans le cas contraire on pourrait trouver une suite $t_n \nearrow t$ telle que $a_\lambda = \bigcap_n a_{\Pi(t_n)} \supsetneq a_{\Pi(t)}$. Alors $\Pi(t) = \lambda^-$, $\Psi(\lambda) - t > 0$. L'inégalité $t_n - t \geq \Psi(\lambda) - t$ entraîne une contradiction d'où la continuité à droite. La formule, **(2.8)** est conséquence des définitions et résultats précédents.

□ q.e.d.

Remarque .

Alors la famille d'espérances conditionnelles d'une chaîne maximale de tribus est une classe maximale de projecteurs dans le sens suivant : tout opérateur qui commute avec cette classe est une fonction de la décomposition spectrale associée à ces projecteurs.

2.2. Calcul des valeurs et vecteurs propres.

Soit Λ filtré. La valeur propre associée à l'espace de constantes est $\Lambda 1$. Les valeurs propres et vecteurs propres associés aux sous-espaces propres $\{S_{\lambda(\alpha,\beta)} : \alpha \neq \beta\}$ sont :

(v1) $$\bar{h}(\lambda(\alpha,\beta)) = \sum_{\gamma \in A_{\lambda(\alpha,\beta)}(\alpha)} (a(\alpha,\gamma) - a(\beta,\gamma))$$

(v2) $$y_{\lambda(\alpha,\beta)} = \mu(A_{\lambda(\alpha,\beta)}(\beta))1_{A_{\lambda(\alpha,\beta)}(\alpha)} - \mu(A_{\lambda(\alpha,\beta)}(\alpha))1_{A_{\lambda(\alpha,\beta)}(\beta)}.$$

Il est clair que $y_{\lambda(\alpha,\beta)}$ engendre $S_{\lambda(\alpha,\beta)}$; pour vérifier **(v1)** il faut utiliser la symétrie de Λ et l'égalité

$$\overline{h}(\lambda(\alpha,\beta)) = (\Lambda y_{\lambda(\alpha,\beta)}(\alpha))(y_{\lambda(\alpha,\beta)}(\alpha))^{-1} .$$

Corollaire 1 .

Soit (Ω,μ) un espace probabilisé dénombrable, avec μ de support Ω. Un opérateur borné symétrique Λ sur $L^2(\mu)$ est filtré injectif ssi il existe une chaîne maximale de tribus $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ strictement Λ-invariante.

Démonstration .

D'après **(2.9)** Λ est injectif ssi $0 \notin \left\{\overline{h}(\lambda) : \lambda \in \Gamma_0^-\right\}$, ce qui équivaut à $\Lambda S_\lambda = S_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Gamma_0^-$. Soit $\lambda \in \Gamma_0^-$ on a $L^2(\mu_\lambda) = \bigoplus_{\left\{\lambda'\in\Gamma_0^- : \lambda'\leq\lambda\right\}} S_{\lambda'}$, et comme $\Lambda S_{\lambda'} \perp \Lambda S_{\lambda''}$ on obtient :

$$\overline{\Lambda L^2(\mu_{a_\lambda})} = \bigoplus_{\left\{\lambda'\in\Gamma_0^- : \lambda'\leq\lambda\right\}} \Lambda S_{\lambda'} .$$ Alors Λ injectif entraîne

$\overline{\Lambda L^2(\mu_{a_\lambda})} = L^2\left(\mu_{a_\lambda}\right)$ pour tout $\lambda \in \Gamma_0^-$ ce qui implique $\Lambda^{(-1)}a_\lambda = a_\lambda$ pour $\lambda \in \Gamma_0^-$. Soit $\lambda \in \Gamma$; on a

$$a_\lambda \supset \Lambda^{(-1)}a_\lambda \supset \bigwedge_{\left\{\lambda'\in\Gamma_0^- : \lambda'\leq\lambda\right\}} \Lambda^{(-1)}a_{\lambda'} = \bigwedge_{\left\{\lambda'\in\Gamma_0^- : \lambda'\leq\lambda\right\}} a_{\lambda'} = \alpha_\lambda .$$

La réciproque est évidente ; si $\overline{h}(\lambda) = 0$ pour un certain $\lambda \in \Gamma_0^-$ on en déduit $\Lambda^{(-1)}a_\lambda \subset a_{\lambda^-}$.

□ q.e.d.

Remarque .

L'ensemble $P = \left\{\overline{h}(\lambda) : \lambda \in \Gamma^- \cup\{0\}\right\}$ est le spectre ponctuel de Λ et $\overline{P}\backslash P$ est le spectre continu de Λ. Si $0 \notin P$ l'opérateur Λ est injectif et il est bijectif quand $0 \notin \overline{P}$.

Si (Ω,μ) est un espace probabilisé dénombrable, un opérateur Λ sur $L^2(\mu)$ est filtré au sens large ssi il existe une fonction $(\varphi(\alpha) : \alpha \in \Omega)) \in L^2(\mu)$ telle que la matrice

$$\Lambda_0 = (a(\alpha,\beta) - \varphi(\alpha)\delta_{\alpha\beta} : \alpha,\beta \in \Omega)$$

induit un opérateur filtré (où $\delta_{\alpha\beta} = 1$ si $\alpha = \beta$, 0 sinon). Dans ce cas $\Lambda = \Lambda_0 + \Phi.$, il est facile de montrer que Λ_0 est uniquement défini à une constante additive près. *Une chaîne maximale* Λ_0*-invariante* sera appelée Λ*-invariante au sens large.*

Corollaire 2 .

Soit (Ω,μ) un espace probabilisé dénombrable. Un opérateur Λ sur $L^2(\mu)$ est filtré au sens large ssi il existe une chaîne maximale $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ telle que pour tout $\lambda \in \Gamma$ on ait :

$$\text{(2.10)} \qquad \alpha|\beta.\gamma(a_\lambda) \Longrightarrow \sum_{\alpha'\in A_\lambda(\alpha)} a(\beta,\alpha') = \sum_{\alpha'\in A_\lambda(\alpha)} a(\gamma,\alpha')$$

Dans ce cas $\tilde{a}_\Gamma$ est Λ-invariante dans le sens large.

Démonstration. Il découle directement du théorème 1 et de l'égalité

$$\Lambda 1_{A_\lambda(\alpha)}(\beta) = \sum_{\alpha'\in A_\lambda(\alpha)} a(\beta,\alpha').$$

□ q.e.d.

Un résultat fondamental pour les opérateurs filtrés et filtrés au sens large est le suivant :

Corollaire 3 .

Soient (Ω,μ) un espace probabilisé dénombrable et Λ un opérateur filtré (respectivement filtré au sens large) sur $L^2(\mu)$. Si $\tilde{a}_\Gamma = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma}$ est une chaîne maximale Λ-invariante (respectivement Λ-invariante au sens large) on a :

$$\text{(2.11)} \qquad \alpha|\beta.\gamma\left(\tilde{a}_\Gamma\right) \Longrightarrow a(\beta,\alpha) = a(\gamma,\alpha)$$

Démonstration .

Si $\alpha|\beta.\gamma\left(\tilde{a}_\Gamma\right)$ on a

$$\{\lambda \in \Gamma : A_\lambda(\beta) = A_\lambda(\alpha)\} = \{\lambda \in \Gamma : A_\lambda(\gamma) = A_\lambda(\alpha)\},$$

d'où $E^{a_\lambda}1_{\{\alpha\}}(\beta) = E^{a_\lambda}1_{\{\alpha\}}(\gamma)$ pour tout $\lambda \in \Gamma\cup\{0^-\}$. De l'expression **(2.8)**, on déduit

$$a(\beta,\alpha) = \Lambda 1_{\{\alpha\}}(\beta) = \sum_{\lambda\in\Gamma_0^-} \bar{h}(\lambda)\left(\left(E^{a_\lambda} - E^{a_{\lambda^-}}\right)1_{\{\alpha\}}\right)(\beta),$$

d'où **(2.11)**.

□ q.e.d.

Corollaire 4 .

Soient (Ω,μ) un espace probabilisé dénombrable, Λ un opérateur filtré au sens large sur $L^2(\mu)$ et $\tilde{a}_\Gamma$ une chaîne maximale Λ-invariante au sens large. Alors, pour tout $\Omega' \subset \Omega$, l'opérateur restreint à $L^2(\mu_{\Omega'})$ induit par la matrice $\Lambda_{\Omega'} = (a(\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \Omega')$ est filtré au sens large et la chaîne maximale restreinte $\tilde{a}_\Gamma|_{\Omega'}$ est $\Lambda_{\Omega'}$-invariante au sens large.

Démonstration .

Soit $a'_{\lambda'} \in \tilde{a}_\Gamma|_{\Omega'}$ telle que $a'_{\lambda'} = a_\lambda\Big|_{\Omega'}$. Si $\alpha|\beta.\gamma\left(a'_{\lambda'}\right)$, on a $\alpha|\beta.\gamma(a_\lambda)$ d'où $\alpha'|\beta.\gamma(a_\lambda)$ pour tout $\alpha' \in A_\lambda(\alpha)$.

D'après **(2.11)** : $a(\beta,\alpha') = a(\gamma,\alpha')$ pour $\alpha' \in A_\lambda(\alpha)$, alors

$$\sum_{\alpha'\in A_\lambda(\alpha)\cap\Omega'} a(\beta,\alpha') = \sum_{\alpha'\in A_\lambda(\alpha)\cap\Omega'} a(\gamma,\alpha').$$

Etant donné que $A'_{\lambda'}(\alpha) = A_\lambda(\alpha) \cap \Omega'$, on en déduit le résultat grâce au corollaire 2.

□ q.e.d.

Le résultat suivant va nous permettre de trouver un algorithme explicite qui permet de vérifier facilement quand un opérateur Λ défini sur $L^2(\mu)$ est filtré. En fait il réduit le problème de la construction de l'algorithme au cas fini.

Théorème 2 .

Soient (Ω,μ) un espace probabilisé dénombrable où le support de μ est Ω, et Λ un opérateur borné symétrique sur $L^2(\mu)$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Λ est filtré au sens large

(ii) $\Lambda_{\Omega_n} = \{a(\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \Omega_n\}$ est un opérateur filtré au sens large sur $L^2(\mu_{\Omega_n})$ pour tout sous-ensemble Ω_n fini inclus dans Ω.

(iii) Λ_{Ω_n} est un opérateur filtré au sens large sur $L^2(\mu_{\Omega_n})$ pour une suite $\Omega_n \underset{n\to\infty}{\nearrow} \Omega$.

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ **(ii)** découle directement du corollaire 4 et **(ii)** $\Longrightarrow$ **(iii)** est évidente.

(iii) $\Longrightarrow$ **(i)** Si Ω est fini il n'y a rien à prouver, alors on suppose Ω infini. Soit Λ_{Ω_n} filtré au sens large pour tout $n \geq 1$, $\Omega_n \nearrow \Omega$. On va montrer qu'il existe une suite de chaînes maximales $G = \left(\tilde{a}_{\Gamma_n}\right)_{n\geq 1}$ telle que :

(2.12) $\tilde{a}_{\Gamma_n}$ est Λ_{Ω_n}-invariante au sens large et $\forall n \leq m$, $\tilde{a}_{\Gamma_m}\big|_{\Omega_n} = \tilde{a}_{\Gamma_n}$,

On note $D^n = \left(a^k_{\Gamma_n} : k \in K_n\right)$ la famille de toutes les chaînes maximales Λ-invariantes au sens large. Prenons $n_0 > 1$, $n > n_0$; d'après le corollaire 4, on a $a^k_{\Gamma_n}\Big|_{\Omega_{n_0}} \in D^{n_0}$ pour tout $a^k_{\Gamma_n} \in D^n$.

Considérons $H\left(a^k_{\Gamma_{n_0}}\right) = \left\{n > n_0 : \exists\, k' \in K_n \text{ tel que } a^{k'}_{\Gamma_n}\Big|_{\Omega_{n_0}} = a^k_{\Gamma_{n_0}}\right\}$, il existe $k_0 \in K_{n_0}$ tel que $H\left(a^{k_0}_{\Gamma_{n_0}}\right)$ soit infini. D'après la définition de k_0 , pour $n_1 \in H\left(a^{k_0}_{\Gamma_{n_0}}\right)$ il existe $k_1 \in K_{n_1}$ tel que $a^{k_1}_{\Gamma_{n_1}}\Big|_{\Omega_{n_0}} = a^{k_0}_{\Omega_{n_0}}$ et $H\left(a^{k_1}_{\Gamma_{n_1}}\right)$ est infini. Ainsi on construit une suite $\left(a^{k_r}_{\Gamma_{n_r}}\right)_{r\geq 0}$ telle que $n_r \nearrow \infty$, $a^{k_r}_{\Gamma_{n_r}}\Big|_{\Omega_{n_{r'}}} = a^{k_{r'}}_{\Gamma_{n_{r'}}}$ pour $r' \leq r$. Si l'on pose $a_{\Gamma_n} = a^{k_r}_{\Gamma_{n_r}}\Big|_{\Omega_n}$ pour $n \leq n_r$, elle est uniquement définie et la suite de chaînes maximales $G = \left(a_{\Gamma_n}\right)_{n\geq 1}$ vérifie **(2.12)**.

Or, chaque $\tilde{a}_{\Gamma_n} \in G$ définit la relation de préordre total suivante sur les couples différents de Ω_n :

(2.13) $\alpha\beta \leq \gamma\delta\left(\tilde{a}_{\Gamma_n}\right)$ ssi $\left(\alpha.\beta(a_i) \Longrightarrow \gamma.\delta(a_i) \text{ pour tout } a_i \in a_{\Gamma_n}\right)$.

Les ensembles $A^{(n)}_{\alpha\beta^-}(\gamma) = \left\{\delta \in \Omega : \alpha\beta \leq \gamma\delta\left(\tilde{a}_{\Gamma}\right)\right\} \cup \{\gamma\}$ sont les atomes d'une partition qu'on note $a^{(n)}_{\alpha\beta^-} \in \tilde{a}_{\Gamma_n}$, qui est la plus fine des partitions de la chaîne maximale $\tilde{a}_{\Gamma_n}$ où α et β sont réunis dans le même atome. Prenons $\alpha\beta < \gamma\delta\left(\tilde{a}_{\Gamma_n}\right)$ ssi $\alpha\beta \leq \gamma\delta\left(\tilde{a}_{\Gamma_n}\right)$ et $\gamma\delta \not\leq \alpha\beta\left(\tilde{a}_{\Gamma_n}\right)$. Les ensembles $A^{(n)}_{\alpha\beta}(\gamma) = \left\{\delta \in \Omega : \alpha\beta < \gamma\delta\left(\tilde{a}_{\Gamma_n}\right)\right\} \cup \{\gamma\}$ sont les atomes de la partition $a^{(n)}_{\alpha\beta} \in \tilde{a}_{\Gamma_n}$ qui est la moins fine des partitions de $\tilde{a}_{\Gamma_n}$ où α et β appartiennent à des atomes différents.

D'après **(2.12)** la relation suivante est bien définie :

$$\text{(2.14)} \qquad \alpha\beta \leq \gamma\delta(G) \quad \text{ssi} \quad \alpha\beta \leq \gamma\delta\left(\tilde{a}_{\Gamma_n}\right) \quad \text{pour } \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Omega_n$$

et elle est un préordre total sur les couples différents de Ω. Les ensembles $A_{\alpha\beta-}(\gamma) = \{\delta \in \Omega : \alpha\beta \leq \gamma\delta(G)\} \cup \{\gamma\}$ sont les atomes d'une partition qu'on note $a_{\alpha\beta-}$ et les ensembles

$$A_{\alpha\beta-}(\gamma) = \{\delta \in \Omega : \alpha\beta < \gamma\delta(G)\} \cup \{\gamma\}$$

sont les atomes d'une partition qu'on note $a_{\alpha\beta}$. Evidemment $a_{\alpha\beta-} \subset a_{\alpha\beta}$. On a $A_{\alpha\beta-}(\alpha) = A_{\alpha\beta-}(\beta)$, $A_{\alpha\beta}(\alpha) \neq A_{\alpha\beta}(\beta)$ et $A_{\alpha\beta-}(\gamma) = A_{\alpha\beta}(\gamma)$ pour tout $\gamma \notin A_{\alpha\beta-}(\alpha)$ alors $a_{\alpha\beta-} \subset a \subset a_{\alpha\beta}$ entraîne $a = a_{\alpha\beta-}$ ou $a = a_{\alpha\beta}$.

La relation $\alpha\beta \leq \gamma\delta(G)$ équivaut à $a_{\alpha\beta-} \subset a_{\gamma\delta-}$ et à $a_{\alpha\beta} \subset a_{\gamma\delta}$. L'inclusion stricte $a_{\gamma\delta} \subsetneq a_{\alpha\beta}$ entraîne $a_{\gamma\delta} \subset a_{\alpha\beta-}$. Alors la suite de tribus $(a_{\alpha\beta-}, a_{\alpha\beta} : \alpha \neq \beta \text{ dans } \Omega)$ est ordonnée par inclusion.

Soit $\tilde{a}_\Gamma$ une filtration maximale contenant $(a_{\alpha\beta-}, a_{\alpha\beta} : \alpha \neq \beta \text{ dans } \Omega)$. Nous allons prouver que $\tilde{a}_\Gamma$ est une chaîne maximale Λ-invariante au sens large ce qui entraîne, d'après le corollaire 2, que Λ est filtré au sens large.

Préalablement montrons que tout $a \in \tilde{a}_\Gamma$ vérifie l'égalité suivante (ce qui entraîne l'unicité de $\tilde{a}_\Gamma$) :

$$\text{(2.15)} \qquad \sum_{\{\alpha\neq\beta : a_{\alpha\beta} \subset a\}} a_{\alpha\beta} = a = \bigcap_{\{\alpha\neq\beta : a_{\alpha\beta-} \supset a\}} a_{\alpha\beta-}$$

Si $a' = \sum_{\{\alpha\neq\beta : a_{\alpha\beta} \subset a\}} a_{\alpha\beta}$, $a'' = \bigcap_{\{\alpha\neq\beta : a_{\alpha\beta-} \supset a\}} a_{\alpha\beta-}$ il nous suffit de prouver que $a' = a''$. Dans le cas où $a' \subsetneq a''$ il existerait un couple $\gamma \neq \delta$ tel que $\delta \in A'(\gamma)$ et $\delta \notin A''(\gamma)$. On a $\delta \in A'(\gamma)$ ssi ($a_{\alpha\beta} \subset a$ entraîne $A_{\alpha\beta}(\delta) = A_{\alpha\beta}(\gamma)$) ssi ($a_{\alpha\beta} \subset a$ implique $a_{\alpha\beta} \subset a_{\gamma\delta-}$) ce qui a lieu, d'après la maximalité de $\tilde{a}_\Gamma$, ssi $a \subset a_{\gamma\delta-}$. De façon analogue $\delta \notin A''(\gamma)$ ssi ($a_{\alpha\beta-} \supset a$ entraîne $A_{\alpha\beta-}(\gamma) \neq A_{\alpha\beta-}(\delta)$) ssi ($a_{\alpha\beta-} \supset a$ implique $a_{\alpha\beta-} \supset a_{\gamma\delta}$) ce qui a lieu ssi $a \supset a_{\gamma\delta}$. Alors $a' \subsetneq a''$ implique l'existence d'un couple $\gamma \neq \delta$ vérifiant $a_{\gamma\delta} \subset a \subset a_{\gamma\delta-}$ ce qui est une contradiction.

Prouvons maintenant la Λ-invariance de $\tilde{a}_\Gamma$. On va commencer par prouver que $a_{\alpha\beta-}$ et $a_{\alpha\beta}$ sont Λ-invariantes. D'après les définitions on a :

$$\text{(2.16)} \qquad A_{\alpha\beta-}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} A^{(n)}_{\alpha\beta-}(\gamma) \ , \ A_{\alpha\beta}(\gamma) = \lim_{n\to\infty} A^{(n)}_{\alpha\beta}(\gamma)$$

alors $\sum_{\gamma' \in A_{\alpha\beta}(\gamma)} a(\delta,\gamma') = \lim_{n\to\infty} \sum_{\gamma' \in A_{\alpha\beta}^{(n)}(\gamma)} a(\delta,\gamma')$ (on utilise le fait que Λ est continu et (Ω,μ) dénombrable avec μ de support Ω).

Si $\gamma|\delta.\delta'(a_{\alpha\beta})$ on a $\gamma|\delta.\delta'\left(a_{\alpha\beta}^{(n)}\right)$ quand $\gamma,\delta,\delta' \in \Omega_n$. Soit $\tilde{a}_{\Gamma_n}$ une chaîne maximale Λ_{Ω_n}-invariante au sens large ; on déduit de ce qui précède

$$\sum_{\gamma' \in A_{\alpha\beta}^{(n)}(\gamma)} a(\delta,\gamma') = \sum_{\gamma' \in A_{\alpha\beta}^{(n)}(\gamma)} a(\delta',\gamma').$$

Si $n \to \infty$ on trouve

$$\sum_{\gamma' \in A_{\alpha\beta}(\gamma)} a(\delta,\gamma') = \sum_{\gamma' \in A_{\alpha\beta}(\gamma)} a(\delta',\gamma')$$

d'où $a_{\alpha\beta}$ vérifie **(2.10)** .

De façon analogue, on le prouve pour $a_{\alpha\beta-}$. Prenons $\Lambda_0 = \Lambda - (\Lambda 1)$. ; il est évident que $a_{\alpha\beta}$ et $a_{\alpha\beta-}$ sont Λ_0-invariantes.

Soit $a = \bigwedge_{a_{\alpha\beta} \subset a} a_{\alpha\beta}$. Soit $\{a_{\alpha\beta}: \alpha \neq \beta \text{ dans } \Omega\}$ un ensemble dénombrable totalement ordonné ; on peut trouver une suite croissante $a_{\alpha_n\beta_n} \underset{n\to\infty}{\nearrow} a$. Il est facile de montrer que, pour toute suite croissante de tribus $a_n \nearrow$ et tout opérateur continu Λ' sur $L^2(\mu)$, on a $\Lambda'^{(-1)} \bigwedge_{n\geq 1} a_n = \bigwedge_{n\geq 1} \Lambda'^{(-1)} a_n$. Alors $\Lambda_0^{(-1)} \bigwedge_{n\geq 1} a_{\alpha_n\beta_n} = \bigwedge_{n\geq 1} \Lambda_0^{(-1)} a_{\alpha_n\beta_n}$.

L'inclusion $\Lambda_0^{(-1)} a_{\alpha_n\beta_n} \subset a_{\alpha_n\beta_n}$ implique $\Lambda^{(-1)}a \subset a$, d'où $\tilde{a}_\Gamma$ est une chaîne maximale Λ_0-invariante. Le corollaire 2 implique le résultat.

□ q.e.d.

2.3. <u>Conditions de Dellacherie</u>.

On va introduire les notions par lesquelles Dellacherie a caractérisé les opérateurs filtrés sur les espaces probabilisés finis dans [1] (la suffisance y a été montré dans le cas dénombrable).

Soit $G(\alpha,\beta,\gamma)$ une relation ternaire sur un espace Ω (qui n'est pas nécessairement probabilisé). On dit que G est une *géométrie* si elle satisfait les deux conditions suivantes :

(G1) pour tout $\alpha \in \Omega$ la relation binaire $G(\alpha,.,.)$ est une relation d'équivalence,

(G2) pour tout α,β on a : $G(\alpha,\alpha,\beta) \Longrightarrow \alpha{=}\beta$

Si $G(\alpha,\beta,\gamma)$ est vérifiée, on dit que le triangle (α,β,γ) est G-isocèle en α et le triangle (α,β,γ) est dit G-équilatéral s'il n'est pas réduit à un seul point et s'il est G-isocèle en ses trois sommets.

La géométrie est appelée *ultramétrique* si elle vérifie les conditions supplémentaires :

(G3) tout triangle (α,β,γ) est G-isocèle (en un des sommets α, β,γ).

(G4) si le triangle (α,β,γ) est G-isocèle en α et le triangle (β,γ,δ) est G-isocèle en β, et si l'un de ces deux triangles n'est pas G-équilatéral, alors le triangle (α,γ,δ) est G-isocèle en α.

Remarquons que dans une géométrie G ultramétrique, un triangle qui n'est pas réduit à un point est G-équilatéral s'il est G-isocèle en deux de ses sommets.

Une géométrie G est dite *supermétrique* s'il existe une géométrie ultramétrique G' tel que : $G'(\alpha,\beta,\gamma) \Longrightarrow G(\alpha,\beta,\gamma)$.

Lemme 2.

Soit G une géométrie supermétrique définie sur Ω fini.
Alors il existe $\beta \neq \gamma$ dans Ω tel que $G(\alpha,\beta,\gamma)$ pour tout $\alpha \in \Omega\backslash\{\beta,\gamma\}$.

Démonstration.

Il suffit de le prouver pour G géométrie ultramétrique.
Si $|\Omega| = 3$ il est vérifié ; supposons qu'il ait été prouvé pour $|\Omega| \leq n-1$, montrons-le pour $|\Omega| = n$.

Considérons $\Omega\backslash|\delta|$, par récurrence il existe $\beta \neq \gamma$ dans $\Omega\backslash|\delta|$ tel que $\forall\alpha \in \Omega\backslash\{\delta,\beta,\gamma\}$ on ait $G(\alpha,\beta,\gamma)$. Si $G(\delta,\beta,\gamma)$ est satisfaite on a le résultat ; supposons donc qu'il n'est pas vérifié. D'après **(G3)** on peut supposer $G(\beta,\gamma,\delta)$. Comme (β,γ,δ) n'est pas équilatéral on peut appliquer **(G4)** ce qui implique $G(\alpha,\gamma,\delta)$ pour tout $\alpha \in \Omega\backslash\{\delta,\beta,\gamma\}$; alors le couple $\gamma \neq \delta$ vérifie la propriété du lemme.

□ q.e.d.

A chaque matrice $\Lambda = \{a(\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \Omega\}$ on attachera la relation suivante :

(2.17) $$G_\Lambda(\alpha,\beta,\gamma) \Longleftrightarrow [a(\beta,\alpha) = a(\gamma,\alpha) \text{ et } (\alpha=\beta) \Longrightarrow (\alpha=\gamma)]$$

(dans notre cas : (Ω,μ) espace probabilisé dénombrable et Λ symétrique, la relation **(2.17)** s'écrit aussi :
$$G_\Lambda(\alpha,\beta,\gamma) \Longleftrightarrow [a^{\alpha\beta}=a^{\alpha\gamma} \text{ et } (\alpha=\beta) \Longrightarrow (\alpha=\gamma)]).$$

Théorème 3 .

Soient (Ω,μ) un espace probabilisé dénombrable où μ est de support Ω, et Λ un opérateur borné symétrique sur $L^2(\mu)$. Alors Λ est filtré au sens large ssi G_Λ est supermétrique.

Démonstration.

$\Longrightarrow$) Si $\tilde{a}_\Gamma$ est une chaîne maximale Λ-invariante au sens large on lui associe la relation :

$$(2.18) \qquad G_\Gamma(\alpha,\beta,\gamma) \iff (\alpha=\beta=\gamma) \text{ ou } \alpha|\beta.\gamma(\tilde{a}_\Gamma)).$$

Il est facile de prouver que G_Γ est une géométrie ; prouvons maintenant que G_Γ vérifie les axiomes de géométrie ultramétrique.

(G3) Soient α,β,γ différents entre eux. La propriété est déduite du préordre total de Γ et des applications :
$\lambda(\beta,\gamma) < \lambda(\alpha,\beta) \Longrightarrow \gamma|\alpha.\beta(\tilde{a}_\Gamma)$; $\lambda(\beta,\gamma) = \lambda(\alpha,\beta) \Longrightarrow \beta|\alpha.\gamma(\tilde{a}_\Gamma)$;

$$\lambda(\beta,\gamma) > \lambda(\alpha,\beta) \quad \Longrightarrow \alpha|\beta.\gamma(\tilde{a}_\Gamma)$$

(G4) Supposons $G_\Gamma(\alpha,\beta,\gamma)$ et $G_\Gamma(\beta,\gamma,\delta)$ avec $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ différents entre eux (sinon l'analyse est facile). Les relations $\alpha|\beta.\gamma(a_\lambda)$ et $\beta|\gamma.\delta(a_{\lambda'})$ entraînent $\alpha|\gamma.\delta(a_\lambda)$, donc $G_\Gamma(\alpha,\gamma,\delta)$.
Or, le corollaire 3 entraîne $G_\Gamma \Longrightarrow G_\Lambda$ et donc G_Λ est supermétrique.

$\Longleftarrow$) D'après le théorème 2 il suffit de prouver cette implication dans le cas fini. En effet si G_Λ est une géométrie supermétrique et $\Omega' \subset \Omega$ alors la géométrie restreinte $G_{\Lambda_{\Omega'}}$ sur Ω' est supermétrique. Ayant prouvé le cas fini on déduit $\Lambda_{\Omega'}$ filtré au sens large pour tout Ω' fini et alors Λ est filtré au sens large. Supposons donc $|\Omega| = n$ fini.

D'après le lemme 2 il existe $\beta \neq \gamma$ dans Ω tels que :

$$(2.19) \qquad a(\beta,\alpha) = a(\gamma,\alpha) \text{ pour tout } \alpha \in \Omega\backslash\{\beta,\gamma\}.$$

Alors la tribu a_{n-2} dont les atomes sont $A_{n-2}(\alpha) = \{\alpha\}$ pour $\alpha \in \Omega\backslash\{\beta,\gamma\}$, $A_{n-2}(\beta) = A_{n-2}(\gamma) = \{\beta,\gamma\}$, vérifie **(2.10)**.

On va considérer :

$$(2.20) \qquad \begin{cases} \Omega_{n-1} = \hat{a}_{n-2} \text{ l'ensemble des atomes de } a_{n-2} \\ \Lambda_{n-1} = \{\bar{a}(\delta,\xi) \ : \ \delta,\xi \in \Omega_{n-1}\} \text{ où} \\ \bar{a}(\delta,\xi)=a(\delta,\xi) \text{ si } \xi\in\Omega_{n-1}\backslash A_{n-2}(\beta), \quad \bar{a}(\delta,A_{n-2}(\beta))=a(\delta,\beta)+a(\delta,\gamma) \end{cases}$$

On définit $G|_{\Omega_{n-2}}(\delta_1,\delta_2,\delta_3) \Leftrightarrow G(\delta'_1,\delta'_2,\delta'_3)$ pour $\delta'_i \in \delta_i$ étant $\delta_1,\delta_2,\delta_3 \in \Omega_{n-2}$ différents entre eux, et $G|_{\Omega_{n-2}} \Longrightarrow G_{\Lambda_{n-1}}$. Alors par récurrence on peut construire une chaîne maximale $\tilde{a}_{\Gamma_n} = (a_\lambda)_{\lambda\in\Gamma_n}$ vérifiant **(2.10)** d'où le résultat.

□ q.e.d.

Algorithme.

Soit $\Lambda = (a(\alpha,\beta) : \alpha,\beta \in \Omega)$ un opérateur borné sur $L^2(\mu)$. On vérifie facilement la condition Λ symétrique qu'on supposera satisfaite. On va construire un algorithme qui vérifie Λ filtré au sens large. Cela résoud le cas des opérateurs filtrés étant donné qu'ils sont des opérateurs filtrés au sens large avec $\Lambda 1$ constante.

Dans le cas Ω dénombrable on construit une suite $\Omega_n \nearrow \Omega$ et on vérifie que Λ_{Ω_n} est filtré au sens large pour tout n, condition nécessaire et suffisante pour que Λ soit filtré au sens large (théorème 2).

Supposons donc $\Omega = \Omega_n$ fini de cardinal n. Si n = 2 tout opérateur auto-adjoint est filtré au sens large ; on suppose donc $n \geq 3$.

Si $\Lambda = \Lambda_n$ est filtré il existe une tribu a_{n-2} formée par n-2 atomes : $\hat{a}_{n-2} = \{\{\beta,\gamma\},\{\alpha\},\ \alpha \in \Omega\backslash\{\beta,\gamma\}\}$, tel que $\beta \neq \gamma$ vérifient **(2.19)**.

Si **(2.19)** n'est vérifié pour aucun couple $\beta \neq \gamma$, on s'arrête ; dans ce cas l'opérateur Λ n'est pas filtré au sens large. Si elle est satisfaite pour $\beta \neq \gamma$ on prend Ω_{n-1}, Λ_{n-1} définis par **(2.20)**. On cherche à vérifier **(2.19)** par $\Lambda_{n'}$, où n' = n-1: si elle l'est on prend Ω_{n-2}, Λ_{n-2}, n' = n-2 et on continue ; dans le cas contraire on s'arrête. La condition d'arriver par cet algorithme à n' = 2 est nécessaire et suffisante pour que l'opérateur Λ soit filtré au sens large.

Dans le cas dénombrable on peut utiliser les formules suivantes pour le calcul des valeurs et vecteurs propres :

(v1')
$$\bar{h}(\lambda(\alpha,\beta)) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\gamma\in A^{(n)}_{\alpha\beta}(\alpha)} (a(\alpha,\gamma) - a(\beta,\gamma))$$

(v2')
$$y_{\lambda(\alpha,\beta)} = \lim_{n\to\infty}\left(\mu\left(A^{(n)}_{\alpha\beta}(\beta)\right)1_{A^{(n)}_{\alpha\beta}(\alpha)} - \mu\left(A^{(n)}_{\alpha\beta}(\beta)\right)1_{A^{(n)}_{\alpha\beta}(\beta)}\right).$$

REFERENCES.

[1] C. **DELLACHERIE.** Manuscrit non publié. Octobre 1984, 11 p.

[2] C. **DELLACHERIE,** C. **STRICKER.** Changements de temps et intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in Math. N° 581, 1977, p. 365-375, Springer Verlag.