

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PHILIPPE BIANE

## Sur un calcul de F. Knight

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 22 (1988), p. 190-196

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1988\\_\\_22\\_\\_190\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1988__22__190_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SUR UN CALCUL DE F. KNIGHT

par Ph. Biane

C.N.R.S., L.A. 212, Tour 45-55 5<sup>e</sup> étage

Université Paris VII 2 place Jussieu

75251 PARIS CEDEX 05

## Introduction

Le mouvement Brownien possède de nombreuses propriétés d'invariance (par changement d'échelle, translation, inversion du temps, etc...) qui donnent lieu à des identités remarquables entre les lois de certaines de ses fonctionnelles. Dans [1]...[4], on a montré comment certaines identités, dues à Chung, Kennedy, Verwaat, s'interprétaient au moyen de décompositions de la trajectoire Brownienne. On se propose ici, à titre d'exemple d'application des méthodes développées dans [1]...[4], d'expliquer une identité donnée par F. Knight [5]

### a) L'identité de Knight

Soit  $B$  un mouvement Brownien réel issu de 0. On note  $l_t^0$  son temps local en 0,  $\tau(\alpha) = \inf\{ t > 0 / l_t^0 > \alpha \}$ ,  $M_\alpha = \sup\{ |B_s| / s \leq \tau(\alpha) \}$ . F. Knight a calculé la loi de la variable  $\frac{\tau(\alpha)}{M_\alpha^2}$  en donnant sa transformée de Laplace:

$$E\left[\exp -\lambda \frac{\tau(\alpha)}{M_\alpha^2}\right] = \frac{2\sqrt{2\lambda}}{\text{sh}2\sqrt{2\lambda}}$$

(Le fait que la loi de cette variable ne dépende pas de  $\alpha$  résulte d'un argument de changement d'échelle usuel)

En particulier, elle a la même loi que le premier temps d'atteinte de 2 par un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0 (cf. Itô McKean [6]). C'est cette égalité en loi que nous nous proposons d'expliquer ici par des considérations trajectorielles.

b) Quelques notations:

On va utiliser dans la suite des notations introduites dans [2], §6. Pour la commodité du lecteur nous les rappelons ici.

$W$  désigne l'espace des fonctions continues  $\omega$ , définies sur un intervalle  $[0, \zeta(\omega)]$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On va définir des opérations sur  $W$ :

"Composition": soient  $\omega_1, \omega_2 \in W$ ,  $\omega_1 \circ \omega_2$  est défini par:

$$\begin{aligned} \zeta(\omega_1 \circ \omega_2) &= \zeta(\omega_1) + \zeta(\omega_2) \\ \omega_1 \circ \omega_2(s) &= \omega_1(s), && \text{si } 0 \leq s \leq \zeta(\omega_1) \\ &= \omega_1(\zeta(\omega_1)) + \omega_2(s - \zeta(\omega_1)) - \omega_2(0) && \text{si } \zeta(\omega_1) \leq s \leq \zeta(\omega_1 \circ \omega_2) \end{aligned}$$

"Retournement": soit  $\omega \in W$ ,  $\check{\omega}$  est défini par:

$$\begin{aligned} \zeta(\check{\omega}) &= \zeta(\omega) \\ \check{\omega}(s) &= \omega(\zeta(\omega) - s) \quad \text{si } 0 \leq s \leq \zeta(\omega). \end{aligned}$$

"Arrêt": soit  $T: W \rightarrow \mathbb{R}_+$  une application mesurable,  $\omega^T$  est défini par:

$$\begin{aligned} \zeta(\omega^T) &= T(\omega) \wedge \zeta(\omega) \\ \omega^T(s) &= \omega(s) \quad \text{si } 0 \leq s \leq \zeta(\omega^T) \end{aligned}$$

"Translation": soit  $a \in \mathbb{R}$ ,  ${}^a\omega$  est défini par:

$$\begin{aligned} \zeta({}^a\omega) &= \zeta(\omega) \\ {}^a\omega(s) &= \omega(s) + a \quad \text{si } 0 \leq s \leq \zeta(\omega). \end{aligned}$$

Si  $M$  et  $N$  sont des mesures sur  $W$ , on notera  $M \circ N$  (resp.  $\check{M}$ ,  $M^T$ ,  ${}^aM$ ) l'image de  $M \otimes N$  (resp.  $M$ ,  $M$ ,  $M$ ) par l'application  $\circ$  (resp.  $\check{\cdot}$ ,  $\cdot^T$ ,  $\cdot^a$ ).

On utilisera par la suite les mesures suivantes sur  $W$ :

$P$  = la loi du mouvement Brownien réel issu de 0

$S$  = la loi du processus de Bessel de dimension 3 issu de 0

$N_a$  = la loi du mouvement Brownien issu de 0 et conditionné à ne pas dépasser  $a$  en valeur absolue.

Cette dernière loi est définie de la façon suivante:

si  $n$  désigne la mesure d'excursions du mouvement Brownien réel hors de 0, la mesure sur  $W$ :  $n(\cdot 1_{\{\sup|\omega| \leq a\}})$  est la mesure d'excursions d'une diffusion sur  $\mathbb{R}$ , dont on note la loi  $N_a$ . (On peut montrer, par exemple en utilisant les techniques de grossissement de filtration (cf. Jeulin [7]), que cette diffusion a pour générateur infinitésimal:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \left[ \frac{1}{x+a} 1_{\{-a < x < 0\}} + \frac{1}{x-a} 1_{\{0 < x < a\}} \right] \frac{d}{dx}.$$

On note  $l_t^x$  la famille des temps locaux de l'élément  $\omega$  de  $W$  (pour toutes les mesures que nous aurons à considérer  $l_t^x$  existe p.s. et admet une version bicontinue en  $(x, t)$ ).

On utilisera également les temps définis sur  $W$  par:

$$\begin{aligned} T_x &= \inf\{ t \geq 0 / \omega(t) = x \} \\ R_x &= \inf\{ t \geq 0 / |\omega(t)| = x \} \\ \tau(\alpha) &= \inf\{ t \geq 0 / l_t^0 \geq \alpha \}; \end{aligned}$$

### c) Une transformation de la trajectoire Brownienne

On va énoncer ici le résultat principal de cet article et en déduire l'identité de Knight.

Soit  $\omega \in W$ , on pose:

$$\begin{aligned} M(\omega) &= \sup_{0 \leq s \leq \zeta(\omega)} |\omega(s)|, \quad R(\omega) = \inf\{ t \geq 0 / |\omega(t)| = M(\omega) \}, \\ g(\omega) &= \sup\{ t \leq R / \omega(t) = 0 \}, \quad d(\omega) = \inf\{ t \geq R / \omega(t) = 0 \} \end{aligned}$$

On définit la transformation  $T: W \rightarrow W$  par:

$$\begin{aligned} \zeta(T\omega) &= \zeta(\omega) \\ T\omega(s) &= \omega(s+g) \quad \text{si } \omega(R) = M && \text{pour } 0 \leq s \leq R-g \\ &= -\omega(s+g) \quad \text{si } \omega(R) = -M \\ T\omega(s) &= M + \omega(s-R+g) && \text{pour } R-g \leq s \leq R \\ T\omega(s) &= M + \omega(s-R+d) && \text{pour } R \leq s \leq \zeta+R-d \\ T\omega(s) &= M + \omega(\zeta+R-s) \quad \text{si } \omega(R) = M && \text{pour } \zeta+R-d \leq s \leq \zeta \\ &= M - \omega(\zeta+R-s) \quad \text{si } \omega(R) = -M \end{aligned}$$

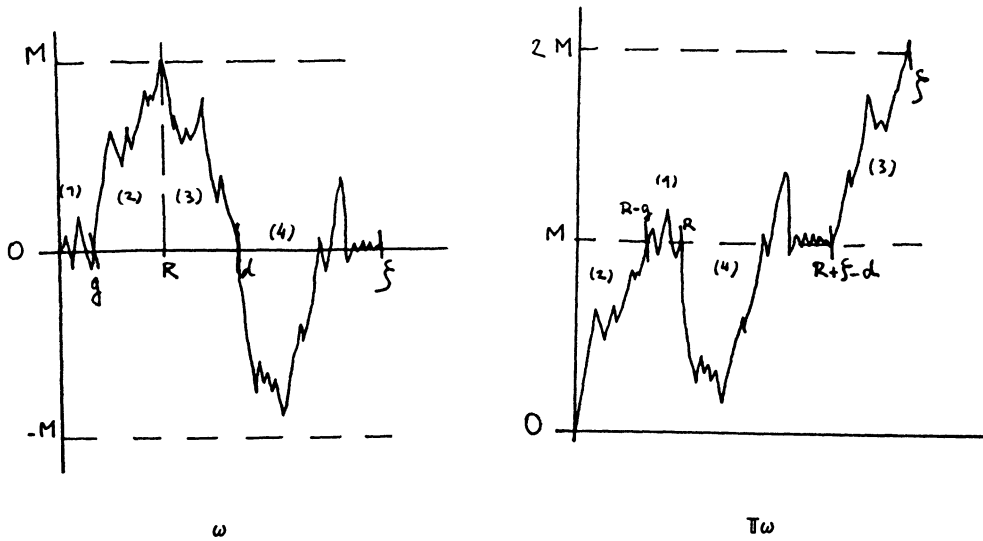
remarque:  $\mathbb{T}$  n'est définie que sur le sous ensemble de  $\mathcal{W}$  des  $\omega$  tels que

$$\omega(0) = \omega(\zeta) = 0$$

d'autre part, on a:

$$\mathbb{T}\omega(\zeta) = 2M(\omega) \quad \text{et} \quad l_{\zeta}^0(\omega) = l_{\zeta}^{M(\omega)}(\mathbb{T}\omega)$$

Voici un exemple sur un dessin:



Enonçons maintenant le

**Théorème:**

La mesure  $\int_0^{\infty} S^{T x} \frac{dx}{x}$  sur  $\mathcal{W}$  est l'image par la transformation  $\mathbb{T}$

de la mesure  $\int_0^{\infty} P^{\tau(\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha}$ .

(La seconde de ces mesures étant portée par l'ensemble des  $\omega$  tels que  $\omega(0) = \omega(\zeta) = 0$ , son image par  $\mathbb{T}$  est bien définie ).

La démonstration du Théorème occupe la suite de l'article; avant de commencer cette preuve, nous allons voir comment le résultat implique l'identité trouvée par Knight.

Tout d'abord, on a:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\alpha}{\alpha} 1_{\{1 < \alpha < 2\}} P^{\tau(\alpha)} \left[ \exp - \lambda \frac{\tau(\alpha)}{M^2} \right] = \text{Log} 2 \cdot P^{\tau(1)} \left[ \exp - \lambda \frac{\tau(1)}{M^2} \right]$$

car la loi de la variable  $\frac{\tau(\alpha)}{M^2}$  sous  $P^{\tau(\alpha)}$  est indépendante de  $\alpha$ , à cause des propriétés de scaling du mouvement Brownien.

D'autre part, cette quantité vaut, d'après le Théorème:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} S^{T_{2x}} [1_{(1 < T_{2x} < 2)} \exp -\lambda \frac{T_{2x}}{x^2}]$$

$$= \int_0^\infty \frac{dx}{x} S^{T_2} [1_{(\frac{1}{2} < T_2 < \frac{1}{x} < 1)} \exp -\lambda T_2] , \text{ (d'après les propriétés de}$$

scaling du processus de Bessel de dimension 3).

$$= \text{Log} 2 \cdot S^{T_2} [\exp -\lambda T_2] , \text{ (en intégrant par rapport à } x)$$

ce qui montre le résultat de Knight.

#### d) Preuve du Théorème

Le théorème résulte d'un certain nombre de résultats de décomposition de trajectoires de diffusions réelles que nous énonçons:

Lemme 1:

$$P^x = \int_0^\infty N_x^{\tau(\alpha)} \circ S^x \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x} d\alpha$$

Preuve: voir Jeulin [7] p. 107.

Lemme 2:

$$S^{T_{2x}} = S^{T_x} \circ \int_0^\infty x(N_x^{\tau(\alpha)}) \frac{e^{-\frac{\alpha}{x}}}{x} d\alpha \circ x(S^{T_x}) = S^{T_x} \circ x(P^x)$$

Preuve: voir [2], p. 91, Prop. (7.8).

Lemme 3:

- a)  $\vee(N_x^{\tau(\alpha)}) = N_x^{\tau(\alpha)}$
- b)  $x(N_x^{\tau(\alpha)}) \circ x(N_x^{\tau(\beta)}) = x(N_x^{\tau(\alpha+\beta)})$

Preuve: a) résulte de l'invariance du mouvement Brownien par

retournement du temps et b) de la propriété de Markov au temps  $\tau(\alpha)$ .

Lemme 4:

$$\int_0^{\infty} P^{\tau(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} P^R_x [ \cdot / \omega(R_x) = x ] \circ \check{\vee} (P^R_x [ \cdot / \omega(R_x) = x ]).$$

Preuve: voir [2] p. 89, Proposition 7.5.

Lemme 5:

$$\int_0^{\infty} P^{\tau(\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} d\gamma \frac{e^{-(\beta+\gamma)/|x|}}{(\beta+\gamma)|x|^2} N_x^{\tau(\beta)} \circ S^T_x \circ \check{\vee} (S^T_x) \circ N_x^{\tau(\gamma)}$$

(ici, si  $x \leq 0$ ,  $S^T_x$  désigne la loi de  $-\omega$  sous  $S^{-x}$  et  $N_x \equiv N_{-x}$ )

Preuve: on utilise successivement le lemme 4, puis le lemme 1, puis le lemme 3a), en remarquant que  $\check{\vee} (M \circ N) = \check{\vee} N \circ \check{\vee} M$ , pour deux mesures  $M$  et  $N$  sur  $\mathcal{W}$ .

Lemme 6:

$$\int_0^{\infty} S^{T_{2x}} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} S^T_x \circ \left[ \int_0^{\infty} x(N_x^{\tau(\alpha)}) \frac{e^{-\alpha/x}}{x} d\alpha \right] \circ x(S^T_x) \frac{dx}{x}$$

Preuve: résulte immédiatement du lemme 2.

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème:

La décomposition de la trajectoire donnée par le lemme 5 est exactement celle qui est utilisée pour effectuer la transformation  $\mathbb{T}$ , on a donc:

$$\begin{aligned} & \mathbb{T} \left[ \int_0^{\infty} P^{\tau(\alpha)} \frac{d\alpha}{\alpha} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} d\gamma \frac{1}{|x|^2} \exp \frac{-(\beta+\gamma)}{|x|} \mathbb{T} \left[ N_x^{\tau(\beta)} \circ S^T_x \circ \check{\vee} (S^T_x) \circ N_x^{\tau(\gamma)} \right] \quad (\text{lemme 5}) \\ &= \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} d\gamma \frac{1}{|x|^2} \exp \frac{-(\beta+\gamma)}{|x|} S^T_x \circ x(N_x^{\tau(\beta)}) \circ x(N_x^{\tau(\gamma)}) \circ x(S^T_x) \\ & \hspace{20em} (\text{par définition de } \mathbb{T}) \\ &= \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} d\beta \int_0^{\infty} d\gamma \frac{1}{|x|^2} \exp \frac{-(\beta+\gamma)}{|x|} S^T_x \circ x(N_x^{\tau(\beta+\gamma)}) \circ x(S^T_x) \quad (\text{lemme 3}) \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty dx \int_0^\infty d\alpha \frac{1}{|x|} \exp\left(-\frac{\alpha}{|x|} S^T x \circ_x (N_x^{\tau(\alpha)}) \circ_x (S^T x)\right)$$

$$= \int_0^\infty S^{2x} \frac{dx}{x} \quad \text{ce qui montre le théorème .}$$

Je remercie J.F. Le Gall pour une conversation au sujet de cet article.

#### Références:

- [1] Ph. Biane: *Relations entre pont et excursions du mouvement Brownien réel*  
Annales de l'I.H.P., vol 22, n°1, 1986, p. 1-7.
- [2] Ph. Biane et M. Yor: *Valeurs principales associées aux temps locaux Browniens*, Bull. Sc. math., 2<sup>e</sup> série, 111, 1987, p. 23-101.
- [3] Ph. Biane, J.F. Le Gall, et M. Yor: *Un processus qui ressemble au pont Brownien*, Séminaire de Probabilités XXI, Lecture Notes in Mathematics n° 1247 Springer 1987, p. 270-275.
- [4] Ph. Biane et M. Yor: *Précisions sur le méandre Brownien*, à paraître au Bull. Sc. math, Vol 112, 1988.
- [5] F. Knight: *Inverse Local Times, Positive Sojourns, and Maxima for Brownian Motion*, à paraître dans Astérisque, volume consacré au colloque Paul Lévy.
- [6] K. Itô et H.P. McKean, Jr: *Diffusion Processes and their sample paths*, Academic Press (1965), New York.
- [7] Th. Jeulin: *Semi-martingales et grossissement d'une filtration*, Lecture Notes in Mathematics n°833, Springer 1980.